Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

Боковые многофотонные резонансы и обмен энергией в сверхпроводниковом кубите

Выпускная квалификационная
работа на степень магистра
студента 528 гр. Гусева О.В.

Научный руководитель
д.ф.-м.н. Махлин Ю.Г.

Москва, 2011г.

Contents

1 Введение **2**

2 Предположения о способе накачки **3**

3 Приближения, упрощающие гамильтониан **4**

4 Определение условий на максимумы заселенности возбужденного уровня кубита **4**

5 Влияние кубита на импеданс **8**
5.1 Учет вклада от первой гармоники 8
5.2 Решение уравнений движения во вращающейся системе отсчета 9

6 Анализ полученного решения **10**

7 Исследование стационарных точек на устойчивость **11**

8 Режим слабой накачки осциллятора **13**

9 Лазерное поведение системы **15**

10 Заключение **17**

1 Введение

Одна из интересных проблем в области сверхпроводниковых кубитов - задача о взаимодействии многоуровневой системы (осциллятор) с двухуровневой (кубит) под внешним воздействием. Подобные задачи хорошо изучены для оптических систем [1], что позволяет использовать в данной работе некоторые известные методы из других областей физики.

В данной работе изучается система из взаимодействующих кубита и осциллятора под воздействием внешней накачки. В экспериментальной части работы [2] кубит накачивался с частотой близкой к резонансной частоте LC-контура, а на осциллятор по волноводу подавался низкочастотный сигнал. Для разных значений затворного напряжения n_g и внешней магнитного потока Φ_b измерялась амлитуда и фаза отраженного от осциллятора сигнала. На полученной таким образом интерференционной картине наблюдаются достаточно нетривиальные участки, которые теоретически объясняются в данной работе.

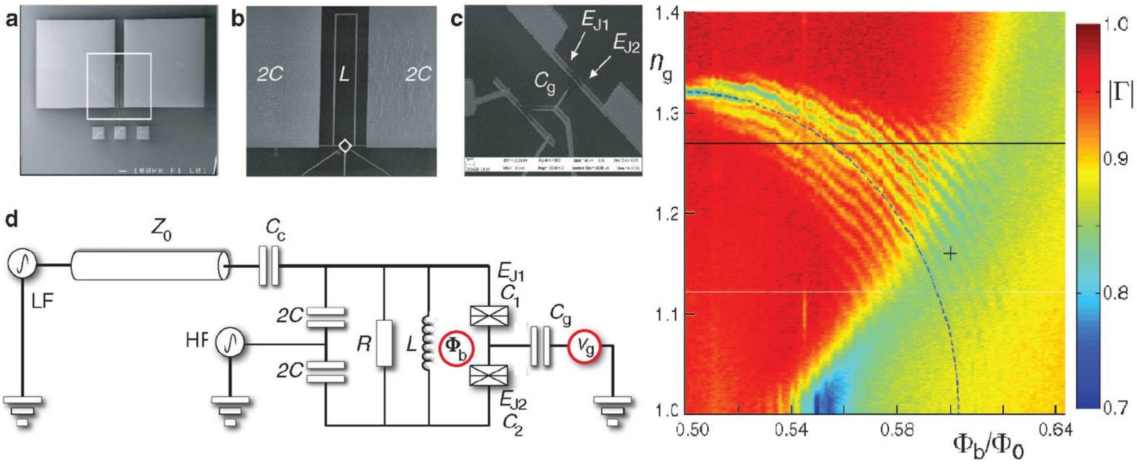

Figure 1: Экспериментальная установка

Краткое содержание работы. Для начала будет выписан гамильтониан кубита, в который добавлено взаимодействие с LC-контуром через магнитный поток в катушке. Далее показано, что на временах больших по сравнению с высокочастотной накачкой гамильтониан можно упростить. После чего для этого гамильтониана произведен более детальный анализ - найдена система отсчета, в которой уравнения движения для переменных кубита имеют Блоховский вид.

Таким образом выяснено, как заселенность возбужденного уровня кубита зависит от параметров системы. Далее исследован вопрос о влиянии кубита на импеданс колебательного контура.

Отдельно рассмотрен режим слабой накачки осциллятора, в котором возбуждение осциллятора можно считать независящим от кубита. Показано, что результаты, полученные в этом режиме, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

2 Предположения о способе накачки

В обозначениях статьи [3] гамильтониан кубита в зарядовом базисе имеет вид:

$$H = -2E_C\left(1-n_g\right)\sigma_z - E_J\cos\left(\phi/2\right)\sigma_x, \tag{1}$$

где $n_g = \frac{C_g V_g}{e}$ - обезразмеренное затворное напряжение, $\phi = \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}$ - фаза, связанная с магнитным потоком в кубите.

Накачка кубита осуществляется за счет периодического изменения затворного напряжения $n_g(t) = n_{g0} + \delta n\cos\omega_{\mu w}t$, а взаимодействие кубита с LC-контуром возникает за счет изменения магнитного потока, в линейном приближении $\cos\left(\phi/2\right) = \cos\left(\phi_{ex}/2\right) - \sin\left(\phi_{ex}/2\right)\frac{\delta\phi}{2}$ ($\delta\phi$ - фаза отвечающая за поток через катушку, а $\phi_{ex} = 2\pi\Phi_{ex}/\Phi_0$ - фаза связанная с внешним постоянным магнитным потоком), тогда гамильтониан кубита принимает вид:

$$H = -2E_C\left(1-n_{g0}\right)\sigma_z - E_J\cos\left(\phi_{ex}/2\right)\sigma_x + 2E_C\delta n\cos\omega_{\mu w}t\sigma_z + E_J\sin\left(\phi_{ex}/2\right)\frac{\delta\phi}{2}\sigma_x \tag{2}$$

Выразим фазу через операторы рождения/уничтожения по формуле

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\Phi_0}\sqrt{\frac{\omega_0 L}{2}}\left(a^+ + a\right), \tag{3}$$

тогда после поворота вокруг оси Oy на угол θ к собственному базису эти слагаемые примут вид:

$$\begin{aligned} H = -\tfrac{\Delta E}{2}\sigma_z + E_J\sin\left(\phi_{ex}/2\right)\tfrac{\pi}{\Phi_0}\sqrt{\tfrac{\omega_0 L}{2}}\left(a+a^+\right)\left[\cos\theta\sigma_x + \sin\theta\sigma_z\right] - \\ -2E_C\delta n\cos\omega_{\mu w}t\left[\cos\theta\sigma_z - \sin\theta\sigma_x\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Угол поворота к этому базису (выбираем такой угол, что $\cos\theta > 0$):

$$\sin\theta = \frac{-E_J\cos\frac{\phi_{ex}}{2}}{\sqrt{\left(2E_C\left(1-n_{g0}\right)\right)^2 + \left(E_J\cos\frac{\phi_{ex}}{2}\right)^2}} \tag{5}$$

$$\Delta E = 2\sqrt{\left(2E_C\left(1-n_{g0}\right)\right)^2 + \left(E_J\cos\frac{\phi_{ex}}{2}\right)^2} \tag{6}$$

3 Приближения, упрощающие гамильтониан

Экспериментально интересен случай с накачкой на околорезонансной частоте $|\Delta E - \omega_{\mu w}| \ll \omega_{\mu w}$. Поэтому перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг оси Oz с частотой $\omega_{\mu w}$, в ней гамильтониан 4 примет вид:

$$\begin{aligned}
&H = \tfrac{\omega_{\mu w}-\Delta E}{2}\sigma_z + \\
&+E_J\sin\left(\phi_{ex}/2\right)\tfrac{\pi}{\Phi_0}\sqrt{\tfrac{\omega_0 L}{2}}\left(a+a^+\right)\left[\cos\theta\left(\sigma_x\cos\omega_{\mu w}t - \sigma_y\sin\omega_{\mu w}t\right) + \sin\theta\sigma_z\right] - \\
&-2E_C\delta n\cos\omega_{\mu w}t\left[\cos\theta\sigma_z - \sin\theta\left(\sigma_x\cos\omega_{\mu w}t - \sigma_y\sin\omega_{\mu w}t\right)\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

В этой системе отсчета все процессы значительно медленнее $\omega_{\mu w}$, а потому гамильтониан можно усреднить по времени на интервалах τ:

$$\frac{1}{\omega_{\mu w}} \ll \tau \ll \min\left(\frac{1}{|\Delta E - \omega_{\mu w}|}, \frac{1}{E_C\delta n}, \frac{1}{E_J\delta\phi}\right) \tag{8}$$

После усреднения гамильтониан примет вид:

$$H = \left(\frac{\omega_{\mu w}-\Delta E}{2} + E_J\sin\left(\phi_{ex}/2\right)\frac{\pi}{\Phi_0}\sqrt{\frac{\omega_0 L}{2}}\left(a+a^+\right)\sin\theta\right)\sigma_z + 2E_C\delta n\sin\theta\sigma_x \tag{9}$$

4 Определение условий на максимумы заселенности возбужденного уровня кубита

Как будет показано далее в этой системе кубит намного быстрее LC-контура и можно их разделить в адиабатическом приближении. Поэтому сперва выясним, как параметры задачи влияют на состояние кубита.

Добавим в гамильтониан слагаемые отвечающие за LC-контур, подверженный внешней накачке. Тогда в новых обозначениях формула 9 примет вид:

$$H = \omega_0 a^+ a + \left[a^+ e^{-i\omega t} F^* + a e^{i\omega t} F\right] + g\left[a + a^+\right]\sigma_z + \frac{\omega_{\mu w} - \Delta E}{2}\sigma_z + \frac{A}{2}\sigma_x, \tag{10}$$

где для удобства введены следующие обозначения:

$$\begin{array}{l} A = 4E_C \delta n \sin\theta \\ g = E_J \sin\left(\phi_{ex}/2\right) \frac{\pi}{\Phi_0}\sqrt{\frac{\omega_0 L}{2}} \sin\theta \end{array} \tag{11}$$

Выпишем уравнения Гейзенберга $\dot{A} = i\left[H, A\right]$ для средних значений операторов:

$$\begin{cases} \dot{a} = -i\omega_0 a - ie^{-i\omega t}F^* - ig\sigma_z \\ \dot{\sigma}_z = A\sigma_y \\ \dot{\sigma}_y = \left[2g\left(a + a^+\right) + \omega_{\mu w} - \Delta E\right]\sigma_x - A\sigma_z \\ \dot{\sigma}_x = -\left[2g\left(a + a^+\right) + \omega_{\mu w} - \Delta E\right]\sigma_y \end{cases} \tag{12}$$

Теперь сделаем преобразование, домножающее операторы на фазу, зависящую от времени, в базисе осцилляторных переменных, т.ч. $\tilde{a} = e^{i\omega t}a$. В новых переменных система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dot{a} = i\left(\omega - \omega_0\right)a - iF^* - g\sigma_z e^{i\omega t} \\ \dot{\sigma}_z = A\sigma_y \\ \dot{\sigma}_y = \left[2g\left(ae^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}\right) + \omega_{\mu w} - \Delta E\right]\sigma_x - A\sigma_z \\ \dot{\sigma}_x = -\left[2g\left(ae^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}\right) + \omega_{\mu w} - \Delta E\right]\sigma_y \end{cases} \tag{13}$$

Сделаем следующие предположения относительно параметров задачи:
1) Частота сигнала, подаваемого на LC-контур, близка к резонансной частоте контура.
2) Амплитуда сигнала, подаваемого на LC-контур, в некотором (определим позднее) смысле мала.
При выполнении этих условий осциллятор можно считать медленным по сравнению с кубитом и решать уравнения на спин в адиабатическом приближении, положив переменную $a(t) \equiv a$ независящей от времени.
Для удобства введем следующие обозначения: $\alpha = 4g\mathrm{Re}\ a$, $\beta = 4g\mathrm{Im}\ a$ и $\varepsilon = (\omega_{\mu w} - \Delta E) - \omega n$, причем целое число n подбирается так что $|\varepsilon| \leq \omega/2$, тогда спиновые уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_z = A\sigma_y \\ \dot{\sigma}_y = \left[\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t + n\omega + \varepsilon\right]\sigma_x - A\sigma_z \\ \dot{\sigma}_x = -\left[\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t + n\omega + \varepsilon\right]\sigma_y \end{cases} \tag{14}$$

Будем решать эту систему, делая поворот относительно оси Oz в спиновом пространстве на угол $\psi(t)$, зависящий от времени. Для того, чтобы в новой СО магнитное поле вдоль оси Oz было мало удобно выбрать $\psi(t) = -\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\alpha \cos\omega\tau + \beta \sin\omega\tau + n\omega\right) = \frac{1}{\omega}\left(\beta\cos\omega t - \alpha \sin\omega t\right) - n\omega t$. После подстановки получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot\sigma_z = A\left(\sigma_x \sin\psi + \sigma_y \cos\psi\right) \\ \dot\sigma_y = \varepsilon\sigma_x - A\sigma_z \cos\psi \\ \dot\sigma_x = -\varepsilon\sigma_y - A\sigma_z \sin\psi \end{array} \right. \tag{15}$$

Заметим, что $\sin\psi$, $\cos\psi$ - периодические функции времени с периодом $2\pi/\omega$. Следовательно, их можно разложить в ряды Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin\psi = \sum_k f_k e^{ik\omega t} & f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} \sin\left(\frac{1}{\omega}\left(\beta\cos x - \alpha\sin x\right) - nx\right) \\ \cos\psi = \sum_k g_k e^{ik\omega t} & g_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} \cos\left(\frac{1}{\omega}\left(\beta\cos x - \alpha\sin x\right) - nx\right) \end{array} \right. \tag{16}$$

Введем обозначение $I(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \exp\left\{i\left[-(n+k)x + \frac{1}{\omega}\left(\beta\cos x - \alpha\sin x\right)\right]\right\}$, тогда

$$f_k = \frac{1}{2i}\left(I(k) - I^*(-k)\right) \qquad g_k = \frac{1}{2}\left(I(k) + I^*(-k)\right) \tag{17}$$

Вычислим $I(k)$, для чего введем обозначения $D = \frac{1}{\omega}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ и $e^{i\varphi} = \frac{\beta + i\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

$$I(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \exp\left\{i\left[-(n+k)x + D\cos\left(x+\varphi\right)\right]\right\} = \tag{18}$$

пользуясь тем, что подыинтегральная функция имеет период 2π

$$= \frac{e^{i(n+k)\varphi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx e^{iD\cos x - i(n+k)x} = \tag{19}$$

пользуясь интегральным представлением функции Бесселя первого рода $J_n(z) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos x + inx} dx$

$$= e^{i(n+k)\varphi} i^{-n-k} J_{-n-k}(D) = e^{i(n+k)(\varphi+\pi/2)} J_{n+k}(D) \tag{20}$$

Теперь можно получить окончательные коэффициенты разложения $\cos\psi, \sin\psi$ в ряды Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k = \frac{1}{2i} e^{ik(\varphi+\pi/2)}\left(e^{in(\varphi+\pi/2)} J_{n+k}(D) - e^{-in(\varphi+\pi/2)} J_{n-k}(D)\right) \\ g_k = \frac{1}{2} e^{ik(\varphi+\pi/2)}\left(e^{in(\varphi+\pi/2)} J_{n+k}(D) + e^{-in(\varphi+\pi/2)} J_{n-k}(D)\right) \end{array} \right. \tag{21}$$

Воспользуемся RWA (приближение вращающейся волны, в котором пренебрегают всеми ненулевыми гармониками периодических функций), т.е. оставим только нулевые гармоники в разложениях $\cos\psi, \sin\psi$, тогда в системе уравнений на компоненты спина полностью исчезнет зависимость от времени, и она примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\sigma}_z = A\left(\sigma_x \sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right) + \sigma_y \cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right)\right) J_n(D)\\ \dot{\sigma}_y = \varepsilon\sigma_x - A\sigma_z \cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right) J_n(D)\\ \dot{\sigma}_x = -\varepsilon\sigma_y - A\sigma_z \sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right) J_n(D)\end{array}\right. \tag{22}$$

Сделаем еще один поворот спинового базиса $U = \exp\left\{-i\frac{\sigma_z}{2}\left(n(\varphi+\pi/2)\right)\right\}$, чтобы убрать σ_x из уравнения на $\dot{\sigma}_z$. Это нужно для того, чтобы система приняла вид идентичный системе уравнений Блоха из [4]. В новом базисе получим:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\sigma}_z = AJ_n(D)\sigma_y\\ \dot{\sigma}_y = \varepsilon\sigma_x - AJ_n(D)\sigma_z\\ \dot{\sigma}_x = -\varepsilon\sigma_y\end{array}\right. \tag{23}$$

Феноменологически добавим в эту систему члены, ответственные за затухание с временами T_1, T_2 вдоль оси Oz и в перпендикулярной плоскости соответственно. Так как все повороты совершались относительно оси Oz, то эти же времена можно было ввести в самом начале, и в этой много раз повернутой системе координат они бы не изменились. Система уравнений Блоха:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\sigma}_z = AJ_n(D)\sigma_y - \frac{\sigma_z-\sigma_0}{T_1}\\ \dot{\sigma}_y = \varepsilon\sigma_x - AJ_n(D)\sigma_z - \frac{\sigma_y}{T_2}\\ \dot{\sigma}_x = -\varepsilon\sigma_y - \frac{\sigma_x}{T_2}\end{array}\right. \tag{24}$$

Выпишем из [4] стационарное решение:

$$\begin{array}{l}\sigma_z\Big|_{st} = \frac{1+(\varepsilon T_2)^2}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\sigma_0\\ \sigma_y\Big|_{st} = \frac{-AJ_n(D)T_2}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\sigma_0\\ \sigma_x\Big|_{st} = \frac{AJ_n(D)\varepsilon T_2^2}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\sigma_0\end{array} \tag{25}$$

Вспоминая, что $\sigma_z = \sigma_0$ соответствует основному состоянию кубита, введем $\rho_{excit} = \sigma_0 - \sigma_z$ - заселенность возбужденного уровня.

$$\rho_{excit} = \frac{\left(AJ_n(D)\right)^2 T_1T_2}{1+\left(\varepsilon T_2\right)^2 + \left(AJ_n(D)\right)^2 T_1T_2}\sigma_0 \tag{26}$$

Как видно из этой формулы, максимумы заселенности возбужденного уровня соответствуют экстремумам функции Бесселя (нулям производной функции Бесселя, которые обозначим $j'_{n,s}$) и $\varepsilon = 0$. Т.е. система уравнений на параметры задачи, определяющая максимумы:

$$\begin{cases} \omega_{\mu w} - \Delta E = \omega n \\ j'_{n,s} = D = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\omega} = \frac{4g|a|}{\omega} \end{cases} \tag{27}$$

5 Влияние кубита на импеданс

В этом разделе исследуем влияние кубита на импеданс колебательного контура. Ввиду того, что будут использоваться некоторые приближения, сделаем это двумя различными способами для надежности.

5.1 Учет вклада от первой гармоники

Вернемся к проведенному ранее анализу, уравнение движения на a: 13:

$$\dot{a} = i\left(\omega - \omega_0\right) a - iF^* - ig\sigma_z e^{i\omega t} \tag{28}$$

Как видно из уравнения на $\dot{a}$, вклад от нулевой гармоники σ_z обнуляется на временах $\tau \gg \frac{1}{\omega}$. Весь ненулевой вклад дается усреднением этого слагаемого:

$$\overline{\sigma_z e^{i\omega t}} = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} dt e^{i\omega t}\int \frac{d\Omega}{2\pi}\tilde{\sigma}_z(\Omega)e^{i\Omega t} \approx \frac{1}{2\tau}\tilde{\sigma}_z(-\omega) \tag{29}$$

Поэтому нужно более аккуратно исследовать систему уравнений движения. Для этого рассмотрим фурье образ уравнения $\dot{\sigma}_z = A\left(\sigma_x \sin\psi + \cos\psi\sigma_y\right)$:

$$i\Omega\tilde{\sigma}_z(\Omega) = A\sum_k \left(f_k\tilde{\sigma}_x(\Omega - k\omega) + g_k\tilde{\sigma}_y(\Omega - k\omega)\right) \tag{30}$$

Полагая, что ненулевые гармоники σ_x, σ_y дают вклады более высокой степени по A, оставим только их нулевые гармоники:

$$-i\omega\tilde{\sigma}_z(-\omega) = A\left(\tilde{\sigma}_x(0)f_{-1} + \tilde{\sigma}_y(0)g_{-1}\right) \tag{31}$$

$$\tilde{\sigma}_z(-\omega) = \frac{iA}{\omega}\left(\tilde{\sigma}_x(0)f_{-1} + \tilde{\sigma}_y(0)g_{-1}\right) \tag{32}$$

Переходя от Фурье-гармоник к усреднению по времени:

$$\overline{\sigma_z e^{i\omega t}} = \frac{iA}{\omega}\left(\overline{\sigma_x}f_{-1} + \overline{\sigma_y}g_{-1}\right) \tag{33}$$

Подставим сюда стационарные значения для $\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}$ и f_{-1}, g_{-1}, которые равны:

$$\begin{cases} \overline{\sigma_x} = \frac{AJ_n(D)T_2}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\sigma_0\left[\varepsilon T_2\cos\left(n\left(\varphi+\pi/2\right)\right)-\sin\left(n\left(\varphi+\pi/2\right)\right)\right] \\ \overline{\sigma_y} = -\frac{AJ_n(D)T_2}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\sigma_0\left[\cos\left(n\left(\varphi+\pi/2\right)\right)+\varepsilon T_2\sin\left(n\left(\varphi+\pi/2\right)\right)\right] \\ f_{-1} = \frac{1}{2i}e^{-i(\varphi+\pi/2)}\left(e^{in(\varphi+\pi/2)}J_{n-1}(D)-e^{-in(\varphi+\pi/2)}J_{n+1}(D)\right) \\ g_{-1} = \frac{1}{2}e^{-i(\varphi+\pi/2)}\left(e^{in(\varphi+\pi/2)}J_{n-1}(D)+e^{-in(\varphi+\pi/2)}J_{n+1}(D)\right) \end{cases} \tag{34}$$

Итак,

$$\overline{\sigma_z e^{i\omega t}} = \frac{e^{-i(\varphi+\pi/2)}A^2T_2J_n(D)\sigma_0}{2\omega\left(1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2\right)}\left[\varepsilon T_2\left(J_{n-1}(D)-J_{n+1}(D)\right)-i\left(J_{n-1}(D)+J_{n+1}(D)\right)\right] \tag{35}$$

Используя соотношения на функции Бесселя $J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}J_n(z)$ и $J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=2J_n'(z)$, а также определение угла $\varphi : a=|a|\exp\left(i(\pi/2-\varphi)\right)$, получим:

$$\overline{\sigma_z e^{i\omega t}} = \frac{ia}{\omega|a|}\frac{A^2T_2J_n(D)\sigma_0}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\left[\frac{n}{D}J_n(D)+i\varepsilon T_2J_n'(D)\right] \tag{36}$$

Теперь можно записать уравнение на $\dot{a}$:

$$\dot{a} = i\left(\omega-\omega_0\right)a-iF^*+\frac{a}{\omega|a|}\frac{g\sigma_0A^2T_2J_n(D)}{1+(\varepsilon T_2)^2+(AJ_n(D))^2T_1T_2}\left[\frac{n}{D}J_n(D)+i\varepsilon T_2J_n'(D)\right] \tag{37}$$

Ввиду того, что мы ищем поправку лишь в главном приближении по A, пренебрежем соответствующим слагаемым в знаменателе:

$$\dot{a} = i\left(\omega-\omega_0\right)a-iF^*+\frac{a}{\omega|a|}\frac{g\sigma_0A^2T_2J_n(D)}{1+(\varepsilon T_2)^2}\left[\frac{n}{D}J_n(D)+i\varepsilon T_2J_n'(D)\right] \tag{38}$$

5.2 Решение уравнений движения во вращающейся системе отсчета

В системе отсчета, повернутой на $\theta(t)$ относительно исходной гамильтониан имеет вид:

$$H = \left(\omega_0-\omega\right)a^+a+\left[a^+F^*+aF\right]+\frac{\varepsilon}{2}\sigma_z+\frac{A}{2}\left(\sigma_x\cos\theta-\sigma_y\sin\theta\right) \tag{39}$$

Усредним гамильтониан на временах $\tau \gg \frac{1}{\omega}$, тогда от $\sin\theta$ и $\cos\theta$ останутся только их нулевые гармоники:

$$H = \left(\omega_0-\omega\right)a^+a+\left[a^+F^*+aF\right]+\frac{\varepsilon}{2}\sigma_z+\frac{AJ_n(D)}{2}\left(\sigma_x\cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right)-\sigma_y\sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right)\right) \tag{40}$$

Как нетрудно убедиться, решение уравнений на стационарное значение спина совпадает с тем, что было получено ранее (с точностью до подкрутки к этому базису). Поэтому интерес представляет только уравнение на $\dot{a}$. Его можно получить исходя из общей формулы для коммутатора в квазиклассическом приближении:

$$[\cdot, a] = \frac{\partial}{\partial a^+}\cdot \tag{41}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a^+}\cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right) = i\frac{na}{2|a|^2}\sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial a^+}\sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right) = -i\frac{na}{2|a|^2}\cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial a^+}J_n(D) = \frac{2ga}{\omega|a|}J_n'(D) \end{array} \tag{42}$$

С помощью этих производных получим поправку к $\dot{a}$:

$$\begin{array}{l} \delta\dot{a} = \frac{iA}{2}\left(\frac{2ga}{\omega|a|}J_n'(D)\left(\sigma_x\cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right) - \sigma_y\sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right)\right)\right. \\ \left. +\frac{ina}{2|a|^2}J_n(D)\left(\sigma_y\cos\left(n(\varphi+\pi/2)\right) + \sigma_x\sin\left(n(\varphi+\pi/2)\right)\right)\right) \end{array} \tag{43}$$

вспоминая, что выражения в скобках из σ и тригонометрических функций по сути являются стационарными решениями в базисе 25, получим:

$$\dot{a} = i\left(\omega-\omega_0\right)a - iF^* + \frac{a}{\omega|a|}\frac{g\sigma_0A^2T_2J_n(D)}{1+\left(\varepsilon T_2\right)^2+\left(AJ_n(D)\right)^2T_1T_2}\left[\frac{n}{D}J_n(D) + i\varepsilon T_2J_n'(D)\right], \tag{44}$$

что в точности совпадает с 37.

6 Анализ полученного решения

Добавим член отвечающий за затухание в LC-контуре, тогда уравнение движения для a (введем обозначение для отстройки частоты $\Omega = \omega - \omega_0$):

$$\dot{a} = i\Omega a - iF^* + \frac{a}{\omega|a|}\frac{g\sigma_0A^2T_2J_n(D)}{1+\left(\varepsilon T_2\right)^2}\left[\frac{n}{D}J_n(D) + i\varepsilon T_2J_n'(D)\right] - \varkappa a \tag{45}$$

Ограничимся изучением эффектов в точных n-фотонных резонансах, т.е. положим $\varepsilon = 0$:

$$\dot{a} = i\Omega a - iF^* + \frac{a}{\omega|a|}\frac{g\sigma_0A^2T_2}{1+\left(\varepsilon T_2\right)^2}\frac{nJ_n^2(D)}{D} - \varkappa a \tag{46}$$

У нелинейной системы, вообще говоря, может быть много стационарных решений. Далее исследуем эти решения более подробно, рассмотрим вопрос об их устойчивости.

7 Исследование стационарных точек на устойчивость

В окрестности n-фотонных резонансов уравнение движения на осцилляторную переменную имеет вид:

$$\dot{a} = i\Omega a - \varkappa a - iF^* + \frac{na}{4|a|^2}\frac{\sigma_0 A^2 T_2 J_n^2(D)}{1+(\varepsilon T_2)^2} \tag{47}$$

Теперь учтем тот факт, что F - ток на осцилляторе, который получается из входящего и отраженного сигнала, причем внешним параметром является именно входящий ток. Итак, пусть J - сила тока, подаваемого на LC-контур внешними источниками, тогда

$$F = J(1-\Gamma), \tag{48}$$

где $\Gamma = \frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}$ - коэффициент отражения. Импеданс LC-контура вблизи резонанса:

$$Z = \frac{a^*}{2iCF} \tag{49}$$

Откуда можно получить соотношение:

$$F = 2J - \frac{a^*}{2iCZ_0}, \qquad \frac{1}{Z} = \frac{2iC}{a^*}\left(2J - \frac{a^*}{2iCZ_0}\right) = \frac{4iCJ}{a^*} - \frac{1}{Z_0} \tag{50}$$

$$\dot{a} = a\left(i\Omega - \varkappa - \frac{1}{2CZ_0} + \frac{n}{4|a|^2}\frac{\sigma_0 A^2 T_2 J_n^2(D)}{1+(\varepsilon T_2)^2}\right) - 2iJ^* \tag{51}$$

Для исследования на устойчивость стационарные решения, перейдем к переменным D, θ.

$$a = \frac{\omega}{4g} D e^{i\theta} \tag{52}$$

Тогда в новых переменных:

$$\dot{D} = \frac{4g}{\omega}\frac{d}{dt}\sqrt{aa^*} = \frac{D}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a^*}}{a^*}\right) = D\left(-\varkappa - \frac{1}{2CZ_0} + n\beta\frac{J_n^2(D)}{D^2}\right) + iD\left(\frac{J}{a^*} - \frac{J^*}{a}\right), \tag{53}$$

где $\beta = \frac{4g^2\sigma_0 A^2 T_2}{\omega^2}\frac{1}{1+(\varepsilon T_2)^2}$.
Выберем $J \in \mathbb{R}$ и введем обозначения $\frac{4g}{\omega}J = G$ и $\varkappa_0 = \frac{1}{2CZ_0}$, тогда:

$$\dot{D} = D\left(-\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n^2(D)}{D^2}\right) - 2G\sin\theta \tag{54}$$

Уравнение для фазы:

$$\dot{\theta} = -ie^{-i\theta}\frac{d}{dt}\sqrt{a/a^*} = \frac{e^{-i\theta}}{2i}\frac{a}{|a|}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a^*}}{a^*}\right) = \Omega - J\left(1/a + 1/a^*\right) \tag{55}$$

Итак,

$$\dot{D} = D\left(-\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\tfrac{J_n^2(D)}{D^2}\right) - 2G\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = \Omega - \tfrac{2G}{D}\cos\theta$$

Вычислим матрицу Якоби, чтобы исследовать на устойчивость стационарные решения.

$$Jakobian = \begin{pmatrix} -\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n}{D}\left(2J_n' - \frac{J_n}{D}\right) & -2G\cos\theta \\ \frac{2G}{D^2}\cos\theta & \frac{2G}{D}\sin\theta \end{pmatrix} \tag{56}$$

Нас интересуют след и детерминант этой матрицы:

$$tr = -\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n}{D}\left(2J_n' - \frac{J_n}{D}\right) + \frac{2G}{D}\sin\theta \tag{57}$$

$$det = \left(-\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n}{D}\left(2J_n' - \frac{J_n}{D}\right)\right)\frac{2G}{D}\sin\theta + \frac{4G^2}{D^2}\cos^2\theta \tag{58}$$

Учитывая то, что в стационарной точке $\dot{D} = \dot{\theta} = 0$, приведем их к виду:

$$tr = 2\left(-\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n}{D}\left(J_n' - \frac{J_n}{D}\right)\right) \tag{59}$$

$$det = \frac{4G^2}{D^2} + 2n\beta\frac{J_n}{D}\left(J_n' - \frac{J_n}{D}\right)\left(-\varkappa - \varkappa_0 + n\beta\frac{J_n^2(D)}{D^2}\right) \tag{60}$$

Если теперь рассмотреть стационарную точку как пересечение кривых 2:

$$\varkappa + \varkappa_0 - n\beta\frac{J_n^2}{D^2} = \sqrt{(2G/D)^2 - \Omega^2} \tag{61}$$

Производная левой части:

$$der_1 = -2n\beta\frac{J_n}{D}\left(J_n' - \frac{J_n}{D}\right) \tag{62}$$

Производная правой части:

$$der_2 = \frac{-\frac{1}{D}(2G/D)^2}{\varkappa + \varkappa_0 - n\beta\frac{J_n^2}{D^2}} \tag{63}$$

Откуда видно, что детерминант можно выразить через разность производных:

$$det = (der_1 - der_2)\cdot\left(\varkappa + \varkappa_0 - n\beta\frac{J_n^2}{D^2}\right)\cdot D \tag{64}$$

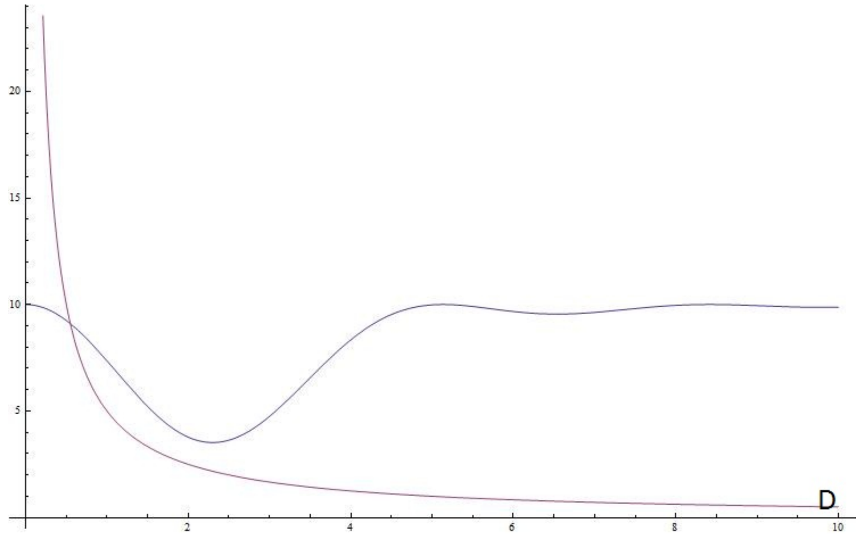

Figure 2: Пример графика этих кривых, как функции D

и знак детерминанта совпадает со знаком разности производных, а след при этом отрицателен.
Итак, можно сформулировать признак устойчивости стационарной точки - если изобразить кривые $\varkappa+\varkappa_0-n\beta\frac{J_n^2(D)}{D^2}$ и $\sqrt{(2G/D)^2-\Omega^2}$ как функции от D, то их пересечения будут стационарными точками. Критерием устойчивости при этом будет разность производных (одна кривая пересекает сверху-вниз или снизу-верх), следовательно устойчивые и неустойчивые стационарные решения будут чередоваться, начиная с устойчивого.

8 Режим слабой накачки осциллятора

Как нетрудно понять из рисунка 2 в режиме слабой накачки гипербола будет очень близка к вертикальной оси и стационарная точка будет единственной. Причем с высокой степенью точности можно полагать, что эта точка не зависит от параметров задачи. Поэтому в этом разделе значение переменной a будем полагать фиксированным и зависящим только от силы накачки осциллятора, а не от состояния кубита. На рисунке 3 изображены кривые $\Delta E = \omega_{\mu w} - n\omega$ для разных значений n. Эти линии соответствуют точным n-фотонным резонансам.

Несложно рассмотреть систему из LC-контура и основного состояния

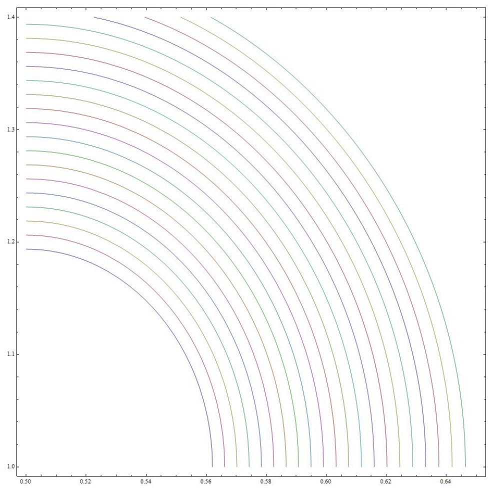

Figure 3: Линии, соответствующие n-фотонным резонансам

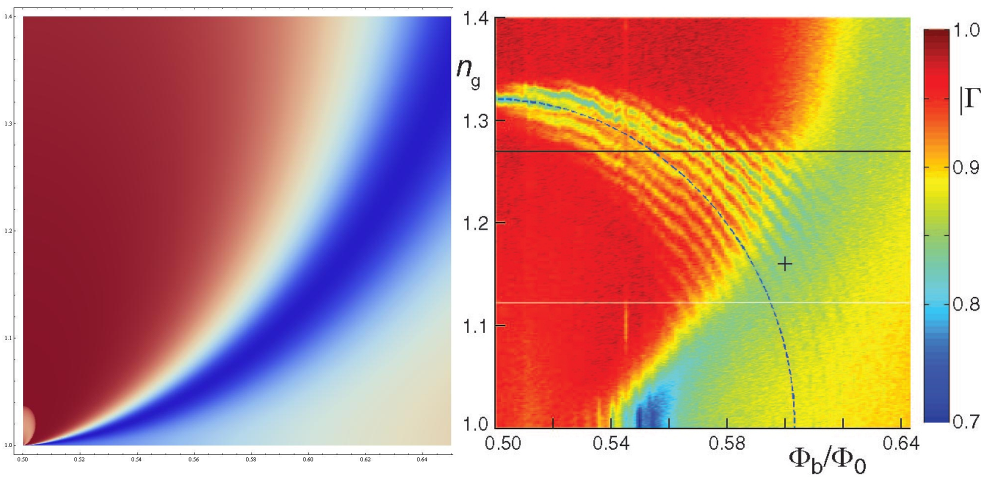

Figure 4: Модуль коэффициента отражения системы из LC-контура и основного состояния кубита

кубита, энергия которой в зависимости от магнитного потока:

$$U(\Phi) = \frac{(\Phi - \Phi_0)^2}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{E_{el}^2 + \left(2E_J \cos\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)^2} \tag{65}$$

Откуда можно найти поправку к индуктивности катушки, а следовательно, и к импедансу колебательного контура. Зная, как импеданс зависит от параметров кубита, можно вычислить коэффициент отражения от

LC-контура по формуле $\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$. На рисунке 4 изображен модуль коэффициента отражения, вычисленный таким образом.

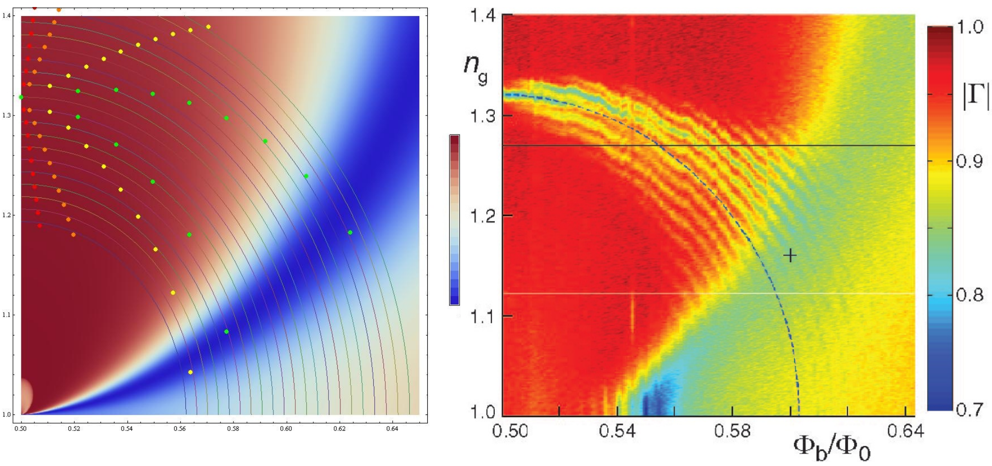

Figure 5: Точки соответствуют максимумам заселенности возбужденного уровня кубита

Для большей наглядности, на рисунке 5 совмещены два предыдущих рисунка и наложены точки, в которых заселенность возбужденного уровня достигает локальных максимумов (несколько серий точек соответствуют разному уровню накачки осциллятора). Хорошо видно, что при увеличении амплитуды накачки LC-контура (увеличение уровня возбуждения осциллятора) угол раствора сектора с нетривиальными эффектами увеличичвается, что также наблюдалось в экспериментах.

Также в этом режиме можно вычислить поправки к частоте осциллятора с кубитом в основном состоянии ω_{Gr} и в возбужденном состоянии ω_{Ex} и усреднить на временах порядка частоты осциллятора, получив частоту осциллятора, связанного с кубитом $\omega = (1 - P_{Ex}) \cdot \omega_{Gr} + P_{Ex} \cdot \omega_{Ex}$. На рисунке 6 изображен модуль коэффициента отражения, вычисленный таким образом.

9 Лазерное поведение системы

Эта модель, вообще говоря, подразумевает возможность усиления отраженного сигнала вплоть до лазерного поведения. Коэффициент

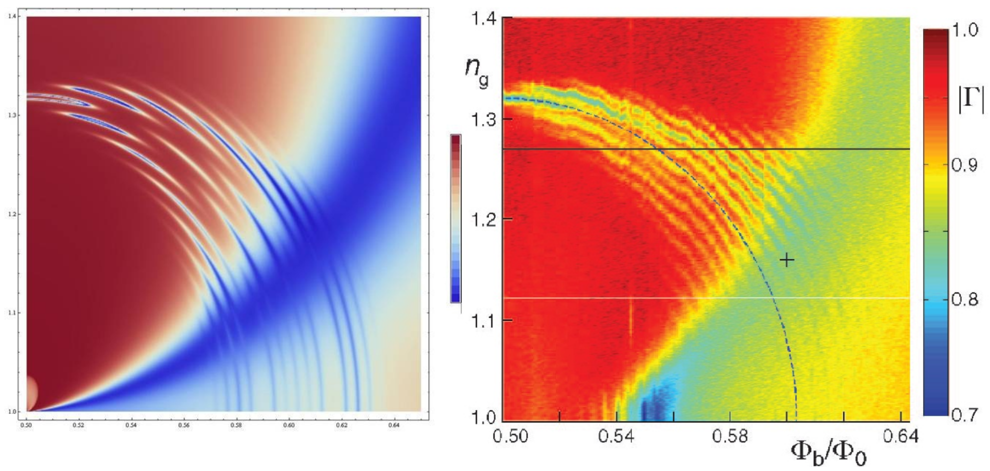

Figure 6: Точки соответствуют максимумам заселенности возбужденного уровня кубита

отражения сигнала:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \tag{66}$$

Из этой формулы видно, что при отрицательном значении действительной части импеданса (импеданс волновода полагается действительным) модуль коэффициента отражения может быть больше единицы.
Если вернуться опять к определению стационарного решения через пересечение кривых $\varkappa + \varkappa_0 - n\beta\frac{J_n^2}{D^2}$ и $\sqrt{(2G/D)^2 - \Omega^2}$ на рисунке 7, то стационарные решения (пересечения кривых), попавшие ниже уровня $\varkappa_0$ будут давать $|\Gamma| > 1$.

Также возможны стационарные решения с $|\Gamma| = \infty$, которые получаются при пересечении кривых на оси абсцисс. В частности, когда внешняя накачка осциллятора отсутствует $G = 0$, а накачка кубита достаточно сильна. Но нельзя забывать, что при $G = 0$ всегда существует стационарное решение $D = 0$, в котором невозмущенный осциллятор ничего не излучает.

Достаточно интересный вопрос о переходах между различными стационарными состояниями в случае, когда их много, на данный момент не решен.

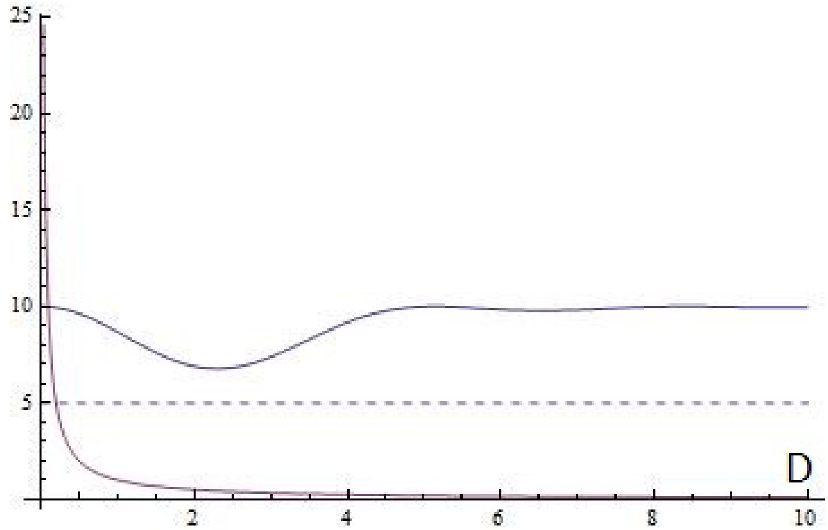

Figure 7: Характерный вид этих кривых

10 Заключение

В данной работе была построена и изучена модель для описания системы из взаимодействующих кубита и осциллятора под воздействием внешней накачки. Из полученных результатов можно понять, как изменение мощности накачки влияет на интерференционную картину. Изменение мощности накачки кубита влияет на глубину провалов модуля коэффициента отражения, а изменение мощности накачки осциллятора главным образом влияет на угол раствора сектора с нетривиальными эффектами - оба этих факта хорошо согласуются с экспериментом. Также показано, что в режиме слабой накачки осциллятора интерференционную картину можно разбить на несколько эффектов и каждый описать по отдельности, что позволяет лучше понять эту задачу.

В качестве дальнейшего развития рассмотренной задачи можно было бы на основе уравнения Фоккера-Планка изучить динамику переходов между различными стационарными состояниями.

В заключение хочу выразить свою благодарность Махлину Юрию Генриховичу за ценные советы и рекомендации при обсуждении дипломной работы.

References

[1] M. Reid, K. McNeil,and D. Walls, "Unified approach to multiphoton lasers and multiphoton bistability", PhysRevA.24.2029.

[2] D. Gunnarsson, J. Tuorila, A. Paila, J. Sarkar, E. Thuneberg, Yu. Makhlin, P. Hakonen, "Vibronic spectroscopy of an artificial molecule", cond-mat/0805.1633.

[3] M. Sillanpaa, T. Lehtinen, A. Paila, Yu. Makhlin, P. Hakonen, "Landau-Zener interferometry with superconducting qubits", cond-mat/0510559.

[4] А. Абрагам, "Ядерный магнетизм", 1963г.