

Московский Физико-Технический Институт  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа  
На степень магистра  
Студента 6 курса  
Мозгунова Е.В.

## Спектр возбуждений двумерной суперсимметричной бозе-жидкости с дальнодействием

Аннотация.

Исследуется модельная задача о бозе-жидкости в двух измерениях, взаимодействующей с калибровочным полем. Калибровочное поле разделяется на мгновенное кулоновское поле и фотоны - переносчики взаимодействия между токами. В пренебрежении фотонами задача с кулоновским потенциалом в сильной связи точно не решается. Если продеформировать закон взаимодействия – задача сводится к суперсимметричной (в духе возникающих в стохастической механике) и допускает аналитическое и эффективное численное исследование. Получена полная численная характеристика системы, обнаружен единственный фазовый переход кристаллизации. Также исследованы эффекты, связанные с включением запаздывания взаимодействия между частицами.

Научный руководитель  
проф. д.ф.-м.н. Фейгельман М. В.

Москва, 2011

## Contents

История вопроса	2
Формулировка задачи	3
Эквивалентность KKLZ и классической модели	4
Испытание метода на модели CSM	4
Результаты про статический потенциал KKLZ	5
Странности токового коррелятора	9
Введение фотонов	11
Добавление фотонов в модель KKLZ.	14
Вклад в поправку к сверхтекучей плотности	15
Уравнение на спектр в безразмерном виде	16
Возможное зануление групповой скорости фотонов. Построение на плоскости $(\sigma, \Delta)$ фазовой диаграммы	17
Интерпретация спектра фотонов	19
Список литературы	20
Приложения.	20
1. Эквивалентность квантовой механики и классической стохастической эволюции	20
2. Детали анализа данных.	22
3. Используемые факты из квантовой теории поля.	23

## История вопроса

**Возможности существования Bose metal.** Обычно система бозе-частиц при нуле температур находится в одном из двух возможных состояний: сверхтекучем или кристаллическом. Более необычные возможности были предложены достаточно давно [2], в частности "supersolid" (недавно снова поднят этот вопрос [3]) - особое основное состояние обладающее *одновременно сверхтекучим и кристаллическими* параметрами порядка. Другое направление исследования возможных основных состояний - поиск Бозе-металла, бозонного аналога ферми-жидкости [4, 5]. В таком состоянии *ни сверхтекучести ни кристаллического порядка* не должно наблюдаться.

Одна из моделей, где могло бы наблюдаться такое странное квантовое состояние, была предложена [6] 20 лет назад для объяснения классической термодинамики вихрей в объемных высокотемпературных сверхпроводниках. Дальше идея развивалась [7], и две различные модели сильно взаимодействующей бозе-жидкости были детально рассмотрены. Заметим, что статьи [6, 7] имеют дело с бозонами в непрерывном пространстве, в то время как [4, 5] рассматривают решеточные модели. Без решетки вопрос о сверхтекучести (точнее ее отсутствии) связан с нарушением галилеевой инвариантности при нетронутой трансляционной, что может содержать более богатую физику. В [7] были приведены соображения в пользу существования в этих моделях основного состояния являющегося *жидкостью*, но не *сверхтекучей*. Первая модель содержит 2D бозоны, взаимодействующие с 2D калибровочным полем группы  $U(1)$ , снабженным динамикой, характеризуемой постоянной тонкой структуры  $\sim 1$ . Вторая, называемая KKLZ [8] - чисто статическая, а потенциал подобран таким образом, что точное основное состояние представляется в виде произведения по всевозможным парам частиц - т.н. форма Ястроу.

Далее в [9] было показано что модель KKLZ обладает еще одним сильным свойством - нерелятивистской суперсимметрией, что позволило получить ряд результатов аналитически. Модель KKLZ характеризуется единственным безразмерным параметром - константой связи  $\alpha$ . В области  $\alpha \leq 3$  система находится в сверхтекучем

состоянии со щелью, а при больших  $\alpha \geq 35$  формируется кристаллическое состояние, подобное описанному Березинским. Это значит, что корреляционная функция позиционного упорядочения спадает степенным образом [10]. Был поднят вопрос [9] о возможности существования промежуточного основного состояния, являющегося нормальной жидкостью, где-то в широком диапазоне  $3 \leq \alpha \leq 35$

**Этот вопрос и является темой моей работы.**

**История применения конкретного численного метода:** Суперсимметрия модели KKLZ позволяет численно получать корреляционные функции (зависящие от времени и координат) через более простую для моделирования классическую ланжевеновскую (безинерционную) динамику. Связь между этой динамикой и суперсимметрией обсуждалась, в частности, в [11]. Аналогичный подход был предложен С. Henley [12] для решеточных квантовых моделей и эффективно применен в [13, 14] для исследования спектра возбуждений модели квантовых димеров на треугольной и квадратной решетке. Причем метод применим только при особом сочетании параметров гамильтониана, в так называемой точке Rokhsar-Kivelson [15]. Недавно те же идеи получили свое применение для особой модели спинов на решетке [16].

**Основной результат моего исследования** Далее будут представлены результаты полного численного исследования динамической корреляционной функции плотности в модели KKLZ в широком диапазоне констант связи  $2 < \alpha < 40$ . Наличие подобной ротонной ветви в спектре будет продемонстрировано. Отношение ротонной щели  $\Delta$  к плазменной частоте  $\omega_0$ , являющейся естественным энергетическим масштабом в задаче, сильно падает с увеличением  $\alpha$ . Прямо перед переходом кристаллизации на  $\alpha = \alpha_c \approx 37$  это отношение становится меньше чем  $3 \cdot 10^{-3}$ ; тем не менее мы не обнаружили никакого конечного интервала в  $\alpha < \alpha_c$ , где бы это отношение строго равнялось нулю без формирования кристалла Березинского. Эффективная масса ротона, определенная через ожидаемую форму спектра  $\omega(p) = \Delta + (p - p_0)^2/2m^*$  рядом с ротонным минимумом, оказалась слабо меняющейся при переходе. Фурье преобразование динамической корреляционной функции плотности — спектральный вес  $S(p, \omega)$  — хорошо приближается единственным квазичастичным пиком в полосе  $\omega < 2\Delta$ , а выше спектр квазичастиц неопределен в связи с сильным затуханием соответствующих возбуждений. Изложенные результаты подтверждают существование единственного сверхтекучего основного состояния во всей области до кристаллизации. Проведено вычисление температурного поведения модели: ожидается разрушение сверхтекучести на температурах порядка  $\Delta(\alpha)$ , то есть становящихся чрезвычайно малыми при приближении  $\alpha$  к  $\alpha_c$ .

**Связь с другими работами:** Аналитическое исследование модели KKLZ (и начала численного) было проведено в более ранней статье [9]. А фотоны и их вклад в пертурбативной области был изучен в статье [7]. Диаграммы в моей работе взяты непосредственно из этой статьи, но вычисления и интерпретация результатов другие. Кроме того получено несколько новых, пусть и для узкой задачи, результатов. Часть данной работы также изложена в статье [1].

## Формулировка задачи

Модель KKLZ содержит 2D взаимодействующие бозоны, и точная волновая функция основного состояния (в первичном квантовании) имеет форму Ястроу

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \text{const} \cdot \prod_{j>k} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^{2\alpha} e^{-\pi\alpha n \sum_i r_i^2}. \quad (1)$$

Здесь  $n$  — плотность частиц, а  $\alpha$  — безразмерный параметр. Многочастичная плотность вероятности  $P_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = |\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2$  может также рассматриваться как гиббсовский вес для некоторой термодинамической системы — классической двухмерной жидкости (плазмы, газа — название произвольно) с потенциальной энергией

$$V\{\mathbf{r}_i\} = -4\alpha\mathcal{T} \sum_{j>k} \ln |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| + 2\pi\alpha\mathcal{T}n \sum_i r_i^2 \quad (2)$$

и температурой  $\mathcal{T}$ . Теперь строго определим две центральные модели моей работы: квантовую и классическую. Квантовая модель KKLZ определяется гамильтонианом (специально выбранным из многих, имеющих такое основное состояние)

$$\hat{H} = \sum_j \sum_{\mu=x,y} \hat{q}_{j,\mu}^\dagger \hat{q}_{j,\mu}; \quad \hat{q}_{j,\mu} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{j,\mu}} + \frac{i}{2} \frac{\partial V}{\partial r_{j,\mu}} \quad (3)$$

где мы положили  $\mathcal{T} = \hbar$  и  $2m = 1$ . Определение классической модели плазмы сделаем через уравнения движения. К вышеуказанному распределению Гиббса  $P_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  приводит следующая система ланжевеновских уравнений

$$\frac{dr_{j,\mu}}{dt} = -\frac{\partial V\{\mathbf{r}_i\}}{\partial r_{j,\mu}} + \xi_{j,\mu}(t) \quad (4)$$

где  $\overline{\xi_{j,\mu}(t)\xi_{k,\nu}(t')} = 2\mathcal{T}\delta_{jk}\delta_{\mu\nu}\delta(t-t')$ .

## Эквивалентность KKLZ и классической модели

Исследование модели KKLZ производится с помощью коррелятора плотностей в разные моменты времени  $S(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}}\langle n_{\mathbf{k}}(t)n_{-\mathbf{k}}(0) \rangle$  ( $\mathcal{V}$  площадь системы), в основном состоянии гамильтониана (3). В терминах разложения по собственным функциям этого гамильтониана такой коррелятор дается

$$S(\mathbf{k}, t) = \sum_i |\langle \Psi_0 | n_{\mathbf{k}} | \mathbf{k}, i \rangle|^2 e^{-i\omega_{\mathbf{k},i}t} \quad (5)$$

где  $i$  включает в себя все квантовые числа кроме импульса  $\mathbf{k}$ . Для моделей, таких как (3), доказана общая эквивалентность [9, 11, 12, 16] квантовой и классической динамики. Применение этой эквивалентности позволяет использовать классическую симуляцию ланжевеновской динамики (4) для вычисления  $S(\mathbf{k}, t)$ . В результате симуляции можно получить эту же функцию в мнимом времени  $S(\mathbf{k}, -i\tau) = \mathcal{S}(\mathbf{k}, \tau)$ , причем правая часть измерена по классической динамике:

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}, \tau) = \int \prod_j d\mathbf{r}_j(0) d\mathbf{r}_j(\tau) P\{\mathbf{r}_j(0), 0, \mathbf{r}_j(\tau), \tau\} \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i,j} e^{ikr_i(\tau)} e^{-ikr_j(0)} \quad (6)$$

где  $P\{\mathbf{r}_j(0), 0, \mathbf{r}_j(\tau), \tau\}$  это двухвременная  $N$ -частичная функция распределения для стохастической диффузии определенной в (4). Вывод уравнения (6) можно найти в Приложении 1.

Особый интерес представляет возможность определения нижней грани для энергии возбуждений  $\omega_{\mathbf{k},i}$  на импульсе  $\mathbf{k}$  из формулы (5) - это позволяет уловить момент закрытия щели. В численном моделировании нижняя грань определялась так или иначе взятием предела  $E_{\min}(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} d \ln S(k, t) / dt$ , что возможно только экстраполяцией. Правомерность такой экстраполяции должна быть проверена, что и было сделано на точно решаемой модели Calogero-Sutherland (CSM, см. далее).

Параллельно измерялась более простая спектральная характеристика, усредняющая вклад в спектральную плотность от всех состояний на данном импульсе  $\omega_{fm}(k) = \int_0^\infty \omega S(\omega, k) d\omega = d \ln S(k, t) / dt|_{t \rightarrow 0}$ . Это первый момент, отсюда название - одномоментное приближение.

## Испытание метода на модели CSM

Сделаем отступление и рассмотрим как аналогичная цепочка рассуждений приводит к правильным результатам для более простого случая. Модель CSM [17] определим на окружности длины  $L$ . Основное состояние известно:

$$\psi_0 = \prod_{i < j} \sin^\lambda(\pi x_{ij} / L), \quad (7)$$

где  $x_{ij}$  - длина дуги между частицами, отсчитываемая против часовой стрелки, а  $\lambda > 1/2$  - безразмерный параметр. По такой волновой функции выпишем потенциальную энергию для классической задачи:

$$V_{CSM} = -\lambda \sum_{i < j} \ln \sin^2 \pi x_{ij} / L \quad (8)$$

сама CSM — квантовая модель, и определяется гамильтонианом:

$$H = - \sum_i \partial_{x_i}^2 + 2\lambda(\lambda - 1) \sum_{i < j} \frac{(\pi/L)^2}{\sin^2(\pi x_{ij}/L)} - E_0 \quad (9)$$

Где  $2m = 1$ , и после вычислений находим  $E_0 = \frac{N(N^2-1)\pi^2\lambda^2}{3L^2}$ . При этом энергия основного состояния ноль.

Проведена симуляция ланжевеновской динамики  $N = 200$  частиц с потенциалом (8), эквивалентной CSM. В результате получен ее динамический структурный фактор  $\mathcal{S}(k, \tau)$ , для которого имеется и точный результат [18]. Согласно статье [18], спектральная плотность CSM, определенная как:

$$S(k, \omega) = \sum_i |\langle \psi_0 | A_k | k, i \rangle|^2 \delta(\omega_i - \omega) \quad (10)$$

отлична от нуля в области особой формы на  $(\omega, k)$  плоскости. Эта область задается  $\omega \in [E_-(k), E_+(k)]$ , где  $E_- = v_s \left(k - \frac{k^2}{k_0}\right)$ ,  $E_+ = v_s \left(k + \frac{k^2}{\lambda k_0}\right)$ , и длинноволновые возбуждения имеют скорость звука  $v_s = 2\pi\lambda n$ . Причем функция  $E_-(k)$  периодична с периодом  $k_0 = 2\pi n$ .

На рисунке (1) произведено сравнение характеристик спектра, полученных симуляцией с  $\lambda = 2$ , с теоретическим предсказанием для  $E_-(k)$ . Численно найдена нижняя грань спектра  $E_{\min}(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} d \ln \mathcal{S}(k, t) / dt$ ; а также первый момент  $\omega_{fm}(k) = \int_0^\infty \omega S(\omega, k) d\omega = d \ln \mathcal{S}(k, t) / dt|_{t \rightarrow 0}$ .

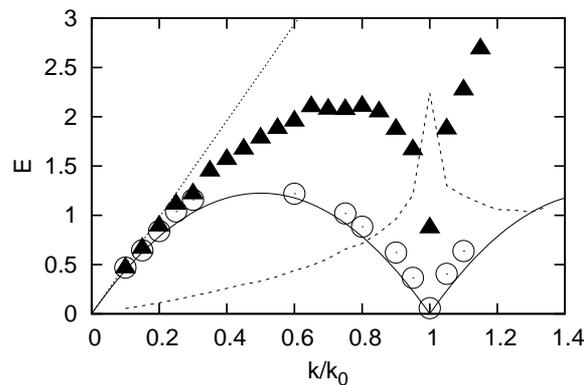


Рис. 1: Вычисленная нижняя грань спектра  $E_{\min}(k)$  для  $\lambda = 2$  CSM показана окружностями, результаты простого усреднения  $\omega_{fm}(k)$  изображены треугольниками, а точная теоретическая граница спектральной плотности  $E_-(k)$  проведена непрерывной линией. Пунктир изображает статический структурный фактор  $S(k)$ , а линия точек - скорость звука.

Совпадение численной  $E_{\min}(k)$  и теоретической  $E_-(K)$  получено. Что и доказало применимость экстраполяции  $E_{\min}(k)$  к обнаружению мягких мод на больших волновых векторах, которые не видны в одномоментном приближении -  $\omega_{fm}$  остается конечной. Заметим, что на малых волновых векторах измеренные  $E_{\min}(k)$  и  $\omega_{fm}(k)$  совпадают, как и должно быть, если спектральный вес имеют только одночастичные возбуждения.

## Результаты про статический потенциал KKLZ

Перейдем к центральной теме диплома: поиску низкоэнергетических возбуждений, аналогичных ротонам, в модели KKLZ заданной гамильтонианом (3). Приведу пример - спектр возбуждений в области сильной связи, а именно  $\alpha = 20$ , показан на Рис. 2. Здесь и далее число частиц  $N = 256$ . Построена численно измеренная зависимость  $E_{\min}(k)$  в области волновых векторов  $k$  близких к  $k_0 = 2\pi\sqrt{n}$ , на котором статический структурный фактор  $\mathcal{S}(k, t = 0)$  имеет пик.

**По врезке: результаты самого наивного метода оценить  $E_{\min}(k)$**

Врезка на рисунке 2 показывает оценку для энергии возбуждения  $E_{\min}(k)$  в широком диапазоне  $k$  через черз наивное предположение что  $\mathcal{S}(k, \tau)$  имеет форму  $Ae^{-E_1\tau}$ . Находилась функция такого вида, которая лучше всего приближает  $\mathcal{S}(k, \tau)$ , и ее  $E_1$  построен. Такой метод медленно сходится к истинной нижней грани, и имеет

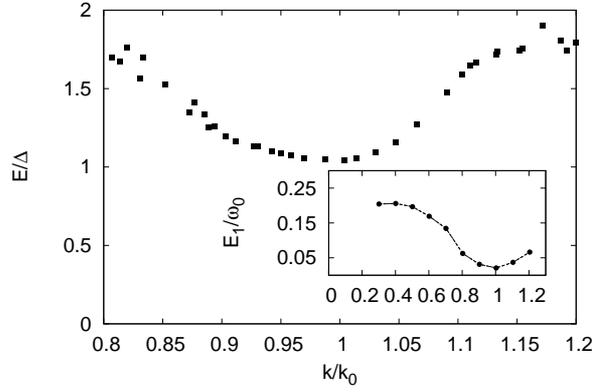


Рис. 2: Энергия квазичастиц возле ротонного минимума на  $\alpha = 20$  получена по зависимости  $\mathcal{S}(k, \tau)$ ; во врезке грубая оценка для спектра  $E(k)$  во всем диапазоне  $k$  – она не дает такого глубокого минимума  $\Delta = 0.01\omega_{pl}$

погрешности которые трудно оценить. Тем не менее с него нужно было начать, чтобы получить первичные представления о поведении системы на разных масштабах  $k$ . Заметим что длинноволновые колебания плазмы распадны, и их энергия может принимать значения много меньше, чем точно известный для них первый момент спектрального веса  $\omega_{fm}(k \rightarrow 0) = \omega_{pl} = 4\pi\alpha\frac{n}{m}$ . То есть плазменная частота не имеет первоначального смысла в данной системе - частоты однородных флуктуаций плотности (детали см. в [9]), но все равно остается естественной единицей энергии.

**Более точные результаты, полученные другим, эффективным методом. Объяснение формы спектра.**

Главная часть рисунка 2 показывает нижнюю грань спектральной плотности  $E_{\min}(k)$  в узкой области вблизи  $k_0$ , полученную более аккуратным методом (см. Дополнение 2). Здесь надо добавить, что состояния лежащие на нижней грани можно рассматривать как элементарные возбуждения в системе, несущие данный импульс. А точная  $E_{\min}(k)$  является по сути спектром квазичастиц.

Ротонный минимум явно виден в зависимости  $E_{\min}(k)$  и расположен на  $k = k_0$ ; далее ротонная щель будет обозначаться как  $\Delta = E_{\min}(k_0)$ . Для выбранной  $\alpha = 20$  величина ротонной щели оказывается очень малой, около 1% от плазменной частоты системы  $\omega_{pl} = 4\pi\alpha\frac{n}{m}$ . Таким образом, мы можем сделать первое утверждение про область сильной связи - спектр имеет очень глубокий ротонный провал. Используя результаты[19] о точках окончания спектра, мы поймем что хорошо определенная линия спектра может отсутствовать в области  $k$  где законы сохранения разрешают распад квазичастицы. А именно, для ротонного спектра такого типа в 2D распад запрещен только для квазичастиц с энергией  $E < 2\Delta$ . На более высоких энергиях превращение в два ротона возможно и происходит с высокой частотой. Утверждение о высокой частоте следует из того, что вообще невозможно определить квазичастицы (а значит ширина уровня порядка самого уровня) нигде кроме области  $p_- < k < p_+$  вокруг точки минимума  $k_0$ . Согласно [19], энергия возбуждения должна иметь особые точки в  $p_{\pm}$ , и приближаться к ним с нулевой производной:

$$E(k \rightarrow p_{\pm}) = 2\Delta - ae^{-b/|k-p_{\pm}|} \quad (11)$$

где  $p_{\pm}$  называют точками окончания спектра, а  $a$  и  $b$  некоторые положительные постоянные - значения регулярных в  $p_{\pm}$  функций. Уравнение (11) является результатом точного суммирования лидирующих вкладов в бесконечной последовательности диаграмм на импульсе  $k \approx p_{\pm}$ . Точки на графике 2(главная часть) находятся в хорошем соответствии с этим теоретическим предсказанием - мы видим две точки перегиба, которые обязательны для функции выходящей на нулевой наклон слева и справа. Точки окончания спектра ожидаются примерно на  $(p_-, p_+) \approx (0.8, 1.2) \cdot k_0$ . К сожалению, высокоточное вычисление  $E_{\min}(k)$  вблизи к этим точкам наталкивается на некоторые трудности и дает результаты с необычно сильным разбросом.

**Теперь становится возможным накопление данных и обсуждение  $\alpha$ -зависимости**

Проведя подобный анализ затухания корреляций плотности для всех значений константы связи  $\alpha$ , имеем зависимость величины щели  $\Delta$  от  $\alpha$ , представленную на Рис. 3 в логарифмическом масштабе.

Рост  $\alpha$  вызывает очень резкое, почти экспоненциальное в  $10 < \alpha < 35$ , уменьшение щели  $\Delta$ . Те же самые данные в обычном масштабе показывают диапазон больших  $\alpha \geq 20$  на рисунке 4. Все эти результаты хорошо описываются предположением что щель закрывается по линейному с  $\alpha$  закону в точке  $\alpha \approx 37 \div 38$ , чуть

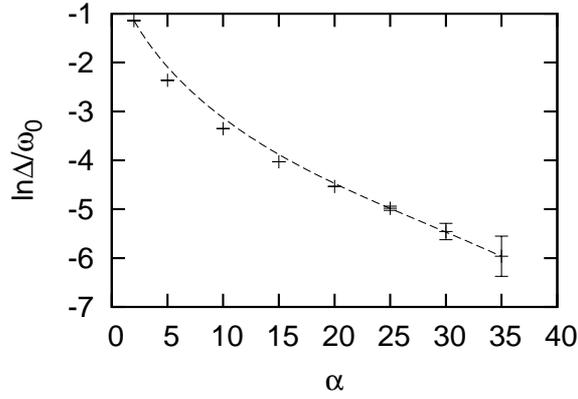


Рис. 3: Ротонная щель  $\Delta$  как функция  $\alpha$ , логарифмический масштаб

выше чем старый результат для кристаллизации классического 2D газа  $\alpha_{old} = 35$  полученный численно в [10]. Потенциалы газов совпадают с точностью до гранусловий (в их случае периодические), а параметр перехода в их обозначениях  $\Lambda = 4\alpha \approx 140$ .

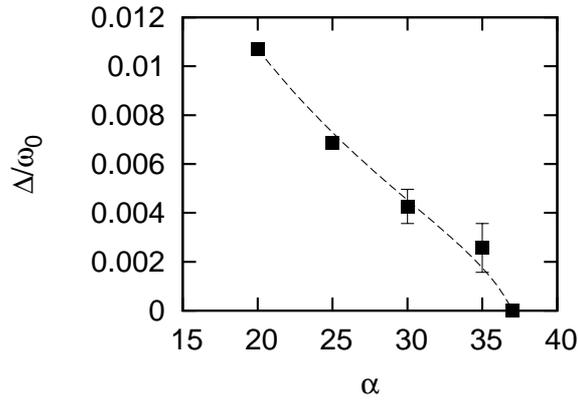


Рис. 4: Отношение ротонной щели к плазменной частоте на больших  $\alpha$ .

### Обнаружение перехода

Однако при приближении к переходу погрешность определения  $\Delta$  сравнивается с самой  $\Delta$ , что мешает делать какие-то утверждения об ее исчезновении. Чтобы иметь второй, надежный способ обнаружения перехода, мы сравниваем асимптотики динамического структурного фактора  $\mathcal{S}(k_0, \tau)$  на больших временах в жидкости и кристаллической фазе. Кристаллическая фаза, появляющаяся в модели KKLZ, довольно необычна. Это плотноупакованная треугольная квантовая решетка, но в отличие от других решеток такого типа, в ней нет обычных поперечных фононов с  $\omega \sim q$ . Вместо этого в ней имеются возбуждения фононного типа с параболической дисперсией  $\omega(q) \sim q^2$ . Это является следствием исчезновения модуля сдвига этой решетки на малых импульсах  $\mu(q) \propto q^2$ , что объяснено в [9]. В этих формулах волновой вектор следует понимать как  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{G}_i$  где  $\mathbf{G}_i$  один из шести векторов обратной решетки, лежащих на круге. Линейные комбинации  $\mathbf{G}_i$  не обладают такими модами, поскольку зона Бриллюена плохо определена в данной задаче. Итак, наличие мягких мод, дающих вклад в коррелятор плотностей, приводит к длинному степенному хвосту по  $\tau$  в затухании этого коррелятора, усредненного углам:  $\mathcal{S}(k_0, \tau) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \mathcal{S}(k_0 \cos \varphi, k_0 \sin \varphi, \tau)$ . Подставим ожидаемую форму угловой зависимости спектра:

$$\mathcal{S}(\vec{q}, \omega) = A\delta\left(\omega - \frac{q^2}{2m^*}\right); \quad q = k_0\varphi; \quad \mathcal{S}(k_0 \cos \varphi, k_0 \sin \varphi, \tau) = Ae^{-\frac{k_0^2 \varphi^2}{2m^*} \tau}. \quad (12)$$

В итоге получим, что в Ланжевеновской динамике будет наблюдаться следующее поведение логарифмической производной  $\mathcal{S}(\tau)$ :

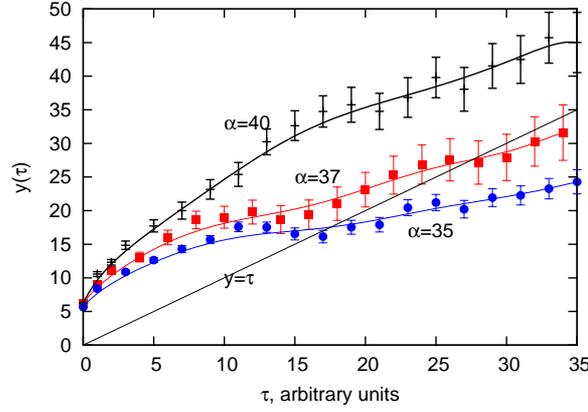


Рис. 5: Обратная логарифмическая производная  $\mathcal{S}(k_0, \tau)$  построена для  $\alpha = 35$  (синие круги), 37 (красные квадраты) и 40 (черные кресты) по прямым измерениям в симуляции

$$-\frac{d\ln\mathcal{S}(k_0, \tau)}{d\tau} = \frac{1}{2\tau} - f(\tau), \quad \tau \gg \frac{m^*}{k_0^2} \quad (13)$$

где  $f(\tau) > 0$  и содержит следующие члены разложения по  $\frac{m^*}{k_0^2\tau}$ :

$$f(\tau) = O(\tau^{-3/2}), \quad (14)$$

а  $m^*$  является эффективной массой для этих мягких мод (в дальнейшем будет численно получена оценка на эту массу). Введем функцию  $y(\tau) = -(2d\ln\mathcal{S}(k_0, \tau)/d\tau)^{-1}$  и заметим что в соответствии с (13) эта функция никогда не пересечет линию  $y = \tau$ . С другой стороны перехода, в жидкой фазе со щелью  $\Delta$ , функция  $y(\tau)$  выходит на константу  $1/2\Delta$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , таким образом точно пересекая разделяющую прямую  $y = \tau$ . На рисунке 5 представлены функции  $y(\tau)$ , полученные симуляцией системы на  $\alpha = 35, 37$  и 40. Следуя приведенным выше рассуждениям, заключаем что критическое значение  $\alpha_c$  расположено между  $37 < \alpha_c < 38$ . Данные на рисунках 4 и 5 являются аргументами в пользу единственного фазового перехода из жидкости с малой ротонной щелью  $\Delta$  в кристаллическое состояние, где  $\Delta$  исчезает.

#### Температура перехода в сверхтекучее состояние

Возвращаясь к обсуждению жидкой фазы со щелью, занимающей область  $\alpha < \alpha_c$ , будем характеризовать низколежащие возбуждения с  $k \approx k_0$  двумя параметрами: щелью  $\Delta$  и эффективной массой  $m^* = (d^2E(k)/dk^2|_{k_0})^{-1}$ . По  $\mathcal{S}(k, \tau)$  измерим нижнюю грань спектрального веса в непосредственной близости от  $k_0$  и определим  $m^*$ . График зависимости  $\mu = m^*/m$  (где  $m = 1/2$ ) от константы связи  $\alpha$  во всей жидкой фазе показан на Рис. 6.

На графиках 4 и 6 построены параметры  $\Delta$  и  $m^*$ , определяющие спектр низкоэнергетических возбуждений  $\varepsilon(k) = \Delta + \frac{(k-k_0)^2}{2m^*}$ . Этих параметров достаточно, чтобы определить температуру перехода  $T_c(\alpha)$  из сверхтекучего в нормальное состояние.

До этого модель KKLZ обсуждалась при  $T = 0$ , теперь мы хотим сделать набросок фазовой диаграммы в плоскости  $(T, \alpha)$ .  $T_c$  определяется как температура, при которой исчезает сверхтекучая плотность  $n_s = n - n_n$ . Определим нормальную плотность как:

$$m\vec{v}n_n = \int \vec{k} f_B(\varepsilon_k - \vec{k}\vec{v}, T) \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \quad (15)$$

где  $f_B(\varepsilon, T)$  - бозонная функция распределения. Конечно, такой анализ возможен по доступной нам информации о модели KKLZ только если пренебречь взаимодействием квазичастиц. Его учет потребовал бы исследования в симуляции многоточечных корреляционных функций, что в принципе возможно, но трудноосуществимо. Итак, в приближении среднего поля уравнение на критическую температуру  $T_c$  запишется как:

$$n_n = n \quad \rightarrow \quad n = -\frac{1}{2m} \int \frac{\partial f_B(\varepsilon, T_c)}{\partial \varepsilon} k^2 \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \quad (16)$$

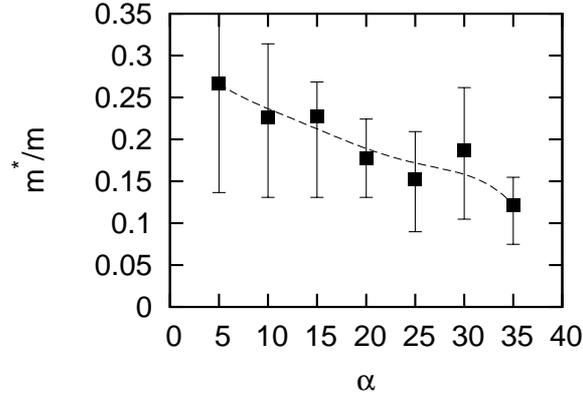


Рис. 6: Масса квазичастиц  $m^*$  слабо зависит от  $\alpha$  даже в точке перехода.

и  $2m = 1$ . Вычисление интеграла (16) приводит к трансцендентному уравнению

$$1 = \frac{2\pi k_0 \sqrt{\pi\mu}}{\sqrt{T_c}} e^{-\frac{\Delta}{T_c}} \quad (17)$$

Его решение слабо зависит от  $\alpha$ , сверхтекучий переход происходит на  $T_c(\alpha) \approx 0.3\Delta(\alpha)$ . Это соотношение хорошо выполняется в области  $10 \leq \alpha < \alpha_c$ . Заметим, что в уравнение (16) должны были входить также поправки от распаривания вихрей. По механизму БКТ сверхтекучий переход происходит при конечной сверхтекучей плотности скачком:

$$n_s(T_c) = n - n_n(T_c) = \frac{T_c}{\pi}. \quad (18)$$

Напомним что  $2m = 1$ . Подставим выражение для нормальной плотности (16):

$$1 = \frac{2\pi k_0 \sqrt{\pi\mu}}{\sqrt{T_c}} e^{-\frac{\Delta}{T_c}} + \frac{T_c}{\pi n} \quad (19)$$

Но возникшее в правой части слагаемое порядка отношения щели  $\Delta$  к плазменной частоте  $\omega_{pl}$ , поэтому вблизи перехода его можно не учитывать. Численно оказывается, что уравнение (17) достаточно точно уже на  $\alpha \geq 5$

Итак, температура сверхтекучего перехода  $T_c(\alpha) \approx 0.3\Delta(\alpha)$  становится сколь угодно мала вблизи перехода кристаллизации.

## Странности токового коррелятора

Коррелятор токов определяется как  $\langle j_\alpha(k)j_\beta(-k) \rangle$ , где

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left( i \frac{\partial}{\partial r_{i\alpha}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{\partial}{\partial r_{i\alpha}} \right) \quad (20)$$

В любой 2D системе поле токов, как и другие векторные поля, имеет продольную и поперечную компоненты. Токовый коррелятор распадается на продольную и поперечную часть, каждая из которых характеризуется скалярной функцией от импульсов:

$$\langle j_\alpha(k)j_\beta(-k) \rangle = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \Pi_{\parallel} + \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \Pi_{\perp} \quad (21)$$

Токовый коррелятор можно измерить по ланжевеновской динамике, так же как был измерен коррелятор плотностей. Единственная хитрость заключается в том что все дифференциальные операторы должны быть

переписаны через операторы умножения на функцию от координат. Это делается при помощи "суперсимметричного" свойства основного состояния модели KKLZ:

$$q_{j,\alpha}\Psi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r_{j,\mu}}\Psi_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial r_{j,\mu}}\Psi_0 \quad (22)$$

Исследуем сначала  $\Pi_{\perp}$  на наличие мягких сдвиговых мод вблизи перехода. Тем же способом, что и для  $\mathcal{S}(k, \tau)$ , найдем первый момент спектрального веса  $\omega_{fm}$ , а также нижнюю грань спектра  $E_{\min}$ . Результаты представлены на Рис. 7.

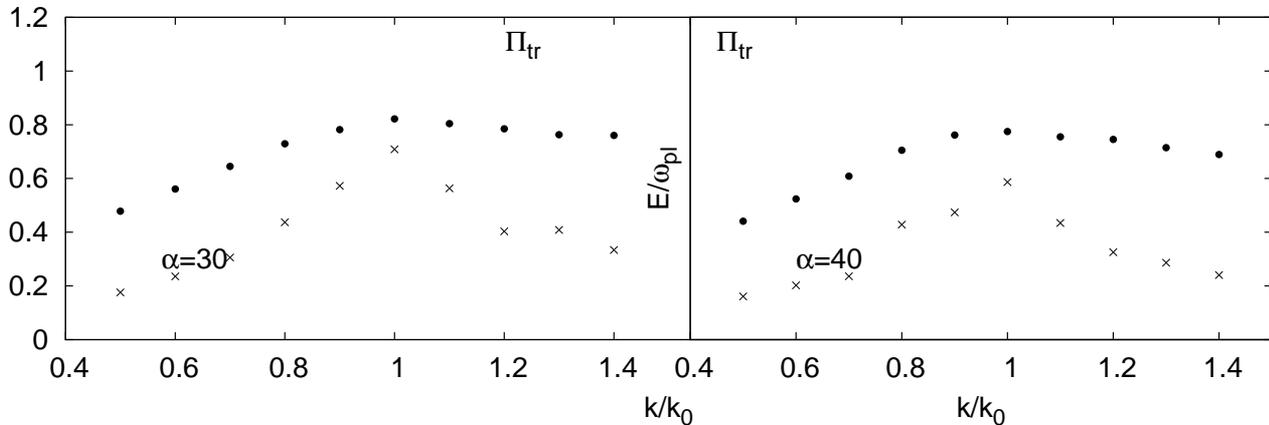


Рис. 7: Характеристики спектрального веса Поперечного токового коррелятора до и после перехода: черные точки - одномоментное приближение, крестики - нижняя грань энергий

Мы получили довольно неожиданный результат: оператор поперечного тока, который без сомнения создает сдвиговые колебания в системе, не имеет матричного элемента между теми низкоэнергетическими состояниями, которые мы уже нашли в динамике структурного фактора, и основным состоянием:

$$\text{жидкость: } \langle 0 | j_k^{\perp} | \Delta + \frac{(k - k_0)^2}{2m^*} \rangle = 0 \quad \text{крист. состояние: } \langle 0 | j_k^{\perp} | \frac{q^2}{2m^*} \rangle = 0 \quad (23)$$

Также не происходит рождения нескольких таких "ротон" одним токовым оператором. **Отсутствует всякое объяснение того факта, что мягкие моды продольны, а сдвиговых среди них не наблюдается.**

Чтобы убедиться, что этот результат получен корректно, проверим **продольный токовый коррелятор**.  $\Pi_{\parallel}$  связан со структурным фактором *соотношением непрерывности*

$$\omega^2 S(k, \omega) = k^2 \Pi_{\parallel}(k, \omega), \quad (24)$$

поэтому все моды, которые присутствуют в одном, есть и в другом. Действительно, обнаруживаем в динамике  $\Pi_{\parallel}$  ротонный провал (Рис. 8), совпадающий в пределах ошибки с измеренным выше (Рис. 2). Сравнение производилось на  $\alpha = 20$ . Первый момент энергии при этом остается  $\geq 0.5\omega_{pl}$  во всем диапазоне  $k$ . Отличие  $\Pi_{\parallel}$  от структурного фактора в необычайно явном проявлении двух масштабов энергии - плазменного и мягкого (ротонный минимум), как видно на врезке 8.

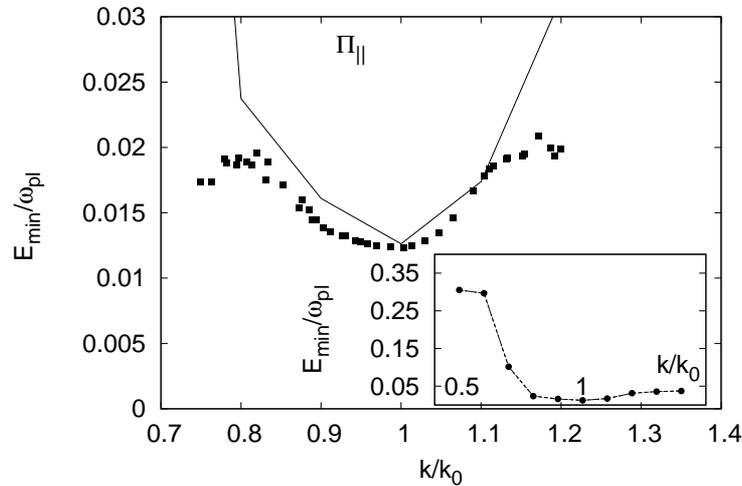


Рис. 8: Сплошной линией показана нижняя грань спектрального веса Продольного токового коррелятора, а квадратами изображен спектр, найденный в структурном факторе на  $\alpha = 20$ . Во врезке - нижняя грань  $\Pi_{\parallel}$  во всем диапазоне  $k$

## Введение фотонов

### Действие для бозонной модели с кулоновским взаимодействием.

Вернемся к определениям. Модель KKLZ является своего рода надстройкой над обычной моделью бозонов с кулоновским взаимодействием.

Рассмотрим же эти бозоны, но не в гамильтоновом, а в лагранжевом формализме. Перейдем к эквивалентной теории поля, в которой удобно ввести калибровочное поле  $a_{\mu}$  - переносчик взаимодействия. А лагранжиан этого поля напишем общий, с динамикой. Кулоновское дальноедействие является предельным случаем этой общей теории поля при скорости света  $\rightarrow \infty$ .

Итак, имеются бозоны: нерелятивистские, с зарядом  $g$ . Пока не думаем о конденсате. Фиксирована их плотность (в отличие от фононов, например)

Все происходит в 2D,  $T=0$ .

Действие:

$$S = \int d^2x dt \psi^* \left( (\partial_t - i\mu) + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right) \psi \quad (25)$$

Конечная плотность достигается постоянным химпотенциалом (думаем о системе как о коробке размера  $L$  или параболической удерживающей яме) и отталкиванием между частицами (которое появится далее). Добавим калибровочное поле:

$$S = \int d^2x dt \psi^* \left( (\partial_t - ia_0 - i\mu) + \frac{1}{2m} (\nabla_\alpha - ia_\alpha)^2 \right) \psi \quad \alpha = 1, 2 \quad (26)$$

Действие для самого этого поля будет содержать заряд теории:

$$S_{em} = \int d^2x dt \frac{1}{2g^2} [f_{0\alpha}^2 - c^2 f_{12}^2] + \text{калибровка} \quad (27)$$

Заметим, что в действии скорость света перед  $a_\alpha$  стоит, а вот в вершине взаимодействия с бозонами (26) ее нет. Это не случайно. Пусть такая запись нарушает Лоренц инвариантность, ведь действие для бозонов ее изначально не содержало. Этим способом мы ввели в модель еще один параметр - безразмерную постоянную, зависящую от  $c$ . Сейчас  $c$  нельзя убрать заменой координат. А добавь мы  $c$  и перед кин. энергией - и скорость можно было бы убрать, и в модели *всегда* характерная скорость бозонов была бы порядка скорости света (напомню что плотность фиксирована). А мы как раз хотим сделать разложение теории возмущений по малости отношения скорости бозонов к скорости света. Введем безразмерный параметр, характеризующий эту малость:  $\sigma = g^2/8\pi^2 mc^2$

#### диаграммная техника

Для такой теории бозонный пропагатор будет

$$G_0 = \frac{1}{\omega + \mu - \varepsilon_k + i\delta} \quad (28)$$

Вершин будет три:

из  $\psi^*(-ia_0)\psi$  просто = 1 и присоединяющийся фотон несет индекс 0.

$\psi^*\{-ia_\alpha, \nabla_\alpha\}\psi$  даст зависимость от импульса  $p_\alpha + p'_\alpha$  - соответственно импульсы входящего и уходящего бозона

а вершина  $\psi^*(-\vec{a}^2)\psi$  - самая важная для нас.

Пропагатор фотона берется в специальной калибровке, в которой  $D_{00} = g^2/k^2$  - статический кулон,  $D_{0\alpha} = 0$ , а  $D_{\alpha\beta}$  поперечен по пространственным индексам:

$$D_{\alpha\beta} = g^2 \frac{\delta_{\alpha,\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \quad (29)$$

#### Нуль-температурные вычисления для бозонов с конденсатом + Фотон.

Пусть кулоновское взаимодействие  $\alpha = (g/4\pi)^2 m/n$  слабо, тогда оно почти не повлияет на то, что системе бозонов при конечной плотности и  $T = 0$  образуется конденсат. Добавим классическое среднее операторам  $\psi$  и  $\psi^*$ . В действии получается множество вершин, связанных с его появлением  $\langle \psi_{p=0} \rangle = \sqrt{n}$ . Сразу поправляются кулоном нормальная и аномальная функция гринна:

$$F = \frac{-gn^2/p^2}{\omega^2 - \varepsilon_p^2 - 2\varepsilon_p gn^2/p^2 + i\delta}; \quad G = \frac{\omega + \varepsilon_p + gn^2/p^2}{\omega^2 - \varepsilon_p^2 - 2\varepsilon_p gn^2/p^2 + i\delta}; \quad (30)$$

Взаимодействием с этими функциями экранируется кулон:

$$D_{00}(p, \omega) = \frac{1}{p^2} \quad \rightarrow \quad D_{00}(p, \omega = 0) = \frac{p^2}{p^4 + 4ng^2m} \quad (31)$$

(на  $\omega \neq 0$  выражение будет сложнее)

Фотон приобретает плазменную частоту  $\omega_{pl} = g^2 n/m$

$$D_{\alpha\beta} = g^2 \frac{\delta_{\alpha,\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2}{\omega^2 - \omega_{pl}^2 - c^2 k^2} \quad (32)$$

Каждый такой фотон несет малость по  $\sigma$ .

В статье [7] это вычисление по теории возмущений продолжено, и найдены первые порядки по  $\sigma$  поправок к собственно-энергетической части бозонов  $\Sigma$  и поляризованному оператору фотонов  $\Pi$ . Изобразим все диаграммки первого порядка для  $\Pi$  на рисунке (11).

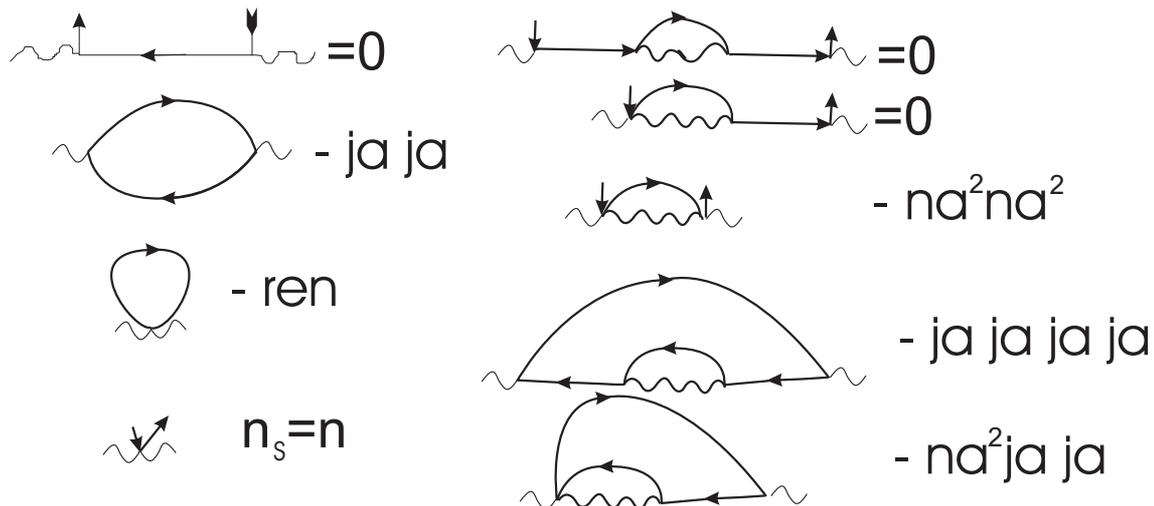


Рис. 9: Слева поправки, не содержащие  $\sigma$ , бозонная петля ноль, а вот самая нижняя дает фотону плазменную частоту  $\omega_{pl}$ . Второй порядок справа, только третья диаграмма учтена в [7]. Волнистые линии - фотоны, линии со стрелками - бозоны. По разрешенным сочетаниям стрелок производится суммирование.

Обсудим поправки к поляризованному оператору фотонов, даваемые этой диаграммной техникой. Поправка к сверхтекучей плотности, которую мы хотим получить, даётся:

$$g^2 \frac{\delta n_s}{m} = -g^2 \Pi(k \rightarrow 0, E = 0) \quad (33)$$

Положим нулем внешний импульс и энергию во всех диаграммах на Рис. 9. Обнаружим что три древесные диаграммы сразу обнуляются из-за наличия в них вершин  $(p + p')$ , где импульс конденсатного бозона 0 по определению, а импульс бегущего бозона равен внешнему и 0 по условию. Из древесных важна только диаграмма взаимодействия с плотностью конденсата (**нижняя слева**), которая как раз и обеспечивает сверхтекучую плотность  $n_s = n$ .

Рассмотрим две петлевые диаграммы в этом порядке. Первая из них (обозначена **ren**) - плотность надконденсатных бозонов - содержит в себе расходимость. При аккуратном вычислении отличие этой расходимости от присутствовавшей у свободного бозонного поля(28) пропорционально  $n$ . Остальные поправки будут конечными.

Вторая - токовый коррелятор (обозначена **ja ja**). Когда две бозонные линии образуют петлю, необходимо учесть существование аномальных функций Грина. Таким образом, за одной диаграммой на Рис. 9 скрываются два способа расстановки стрелок. При первом петля равна  $G^2$ , при втором  $F^2$ . После аккуратного интегрирования  $F^2 + G^2$  по полюсам энергии в петле получим выражение, точно равное нулю. Причем этот результат не зависит от точной формы собственно энергетической части бозонов  $\Sigma$ .

Итак, этот порядок теории возмущений обеспечивает физическую сверхтекучую плотность  $n_s = n$  при константе связи с поперечным полем  $\sigma \rightarrow 0$ . Все поправки к сверхтекучей плотности появляются в следующем порядке по  $\sigma$ .

Заметим, что в двух нижних диаграммах первого порядка по  $\sigma$  на Рис. 9 можно выделить ту же структуру, что и в токовом корреляторе. Отличием же будет то, что в диаграмме обозначенной **ja ja ja ja** в одну из бозонных линий включена простейшая бозонная собственно-энергетическая часть, имеющая 1ый порядок по  $\sigma$ . А диаграмму **na^2 ja ja** можно представить как токовый коррелятор, в котором одна из токовых вершин поправлена в 1ом порядке по  $\sigma$ . Считаем, что эти диаграммы равны нулю, точно так же как и коррелятор ток-ток, не содержащий поправок по  $\sigma$ .

Тогда остается только одна диаграмма, обозначенная **na^2 na^2**. Она дает  $(P_{\alpha\beta}$  поперечный проектор)

$$\delta n_s = -nP^{\alpha\beta} \int D^{\alpha\beta} (G + F) d^2 k d\varepsilon \quad (34)$$

и вычислена в статье [7]. Поправка к сверхтекучей плотности становится порядка самой плотности на  $\sigma \sim 1$ , то есть вне пределов применимости теории возмущений. Важный результат, полученный в [7]: чем больше кулоновское взаимодействие  $\alpha_{coulomb}$ , тем сильнее и появляющаяся от взаимодействия с поперечным полем поправка  $\delta n_s$ . Таким образом, естественно было задаться вопросом, как ведет себя эта поправка в области сильной связи по  $\alpha_{coulomb}$ , но малых  $\sigma$ . Приближимся к ответу на этот вопрос, используя наши знания про KKLZ.

### Добавление фотонов в модель KKLZ.

Заметим, что электромагнитное взаимодействие в вышеописанной бозе-жидкости эффективно разделялось - в нулевом порядке по постоянной  $\sigma$  только  $D_{00}$  оставалось от фотонного пропагатора, и модель при  $\sigma \rightarrow 0$  содержала дальное действие. Бозоны взаимодействовали по кулоновскому закону. Идея заключается в том, чтобы деформировать этот закон, превратив модель в KKLZ. А затем построить аналогичную теорию возмущений по  $\sigma$

Подробнее, в специальной калибровке лагранжиан  $L_c$  для нулевой компоненты вектор-потенциала  $a_0$  отделяется от лагранжиана  $L_a$  для пространственных компонент  $\vec{a}$ . В этой калибровке функциональный интеграл для заряженных бозонов выглядит так:

$$\int Dn D\varphi D a_0 D \vec{a} \exp i \int [L_B(n, \varphi) + L_c(a_0) + L_a(\vec{a}) + n a_0 + L_{int}(\vec{a}, n, \varphi)] d^2 r dt \quad (35)$$

Выделим в скобках часть, соответствующую бозонам со статическим взаимодействием (не содержащую  $\vec{a}$ ):

$$\int D \vec{a} \left( \int D n D \varphi D a_0 \exp i \int [L_B(n, \varphi) + L_c(a_0) + n a_0] d^2 r dt \right) \exp i \int [L_a(\vec{a}) + L_{int}(\vec{a}, n, \varphi)] d^2 r dt \quad (36)$$

Заменим выражение в скобках на функциональный интеграл для KKLZ

$$\int D \vec{a} \left( \int D n D \varphi \exp i \int L_{KKLZ}(n, \varphi) d^2 r dt \right) \exp i \int [L_a(\vec{a}) + L_{int}(\vec{a}, n, \varphi)] d^2 r dt \quad (37)$$

Для данного действия можно написать диаграммную технику (теперь не будет конденсата и двух типов гриновских функций, зато есть корреляторы из KKLZ произвольного порядка) Параметр разложения  $\sigma$  содержится в пропагаторе фотона

$$D_{\alpha\beta} = g^2 / \omega_{pl}^2 \frac{\delta_{\alpha,\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2}{(\omega / \omega_{pl})^2 - 1 - k^2 / \sigma}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (38)$$

Здесь уже поправлен фотон за счет конечной плотности частиц.

Появление этой поправки, а также всех последующих в разложении по  $\sigma$ , можно получить исследованием **поляризационного оператора**. Его получение см. Дополнение 3.

Считаем изменение спектра поперечных фотонов за счет их малого (как  $\sigma$ ) взаимодействия с Бозе-жидкостью. Последняя характеризуется единственным безразмерным параметром  $\Delta$  ( $\sim [37 - \alpha_{coulomb}]$ ).

Спектр фотонов  $\Omega_k$  определяется по их пропагатору

$$g^2 D^{-1} = \Omega^2 - c^2 k^2 + g^2 [\Pi_{a^2} + \Pi_j + \Pi_{a^2 a^2} + ..] \quad (39)$$

где поправки первого порядка по  $\sigma$  (напомню что  $\sigma \sim g^2$ )

$$g^2 \Pi_{a^2} = -\omega_{pl}^2; \quad g^2 \Pi_j = \frac{g^2}{2} \langle T j_\alpha^\perp j_\beta^\perp \rangle = \omega_{pl}^2 \frac{\alpha_{coulomb}}{2\pi^2} P(k, \Omega) \quad (40)$$

где коррелятор поперечных токов в Бозе жидкости выражается через безразмерную функцию

$$P(k, \Omega) = \int \frac{\omega \Pi_{sim}^\perp(k, \omega) d\omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (41)$$

в которой энергия считается нормированной на  $\omega_{pl}$ , а спектральная плотность  $\Pi_{sim}^\perp$  безразмерна также как в статье [9].

## Вклад в поправку к сверхтекучей плотности

Вторая по  $\sigma$  поправка представлена диаграммой:

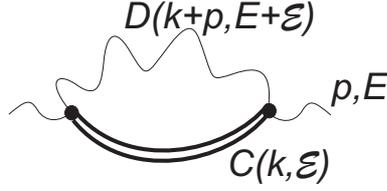


Рис. 10: Диаграмма, дающая поправку к сверхтекучей плотности. Волнистые линии — фотоны, двойная — коррелятор плотностей.

$$g^2 \Pi_{a^2 a^2}(k, E) = 2g^2 P_{\alpha\beta} \int D_{\alpha\beta}(k+p, E+\varepsilon) C(p, \varepsilon) d^2 p d\varepsilon \quad (42)$$

где  $P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2$  поперечный проектор, а  $C(p, t) = \langle T n_p(t) n_{-p}(0) \rangle$  коррелятор плотностей в KKLZ. Он получается из динамического структурного фактора  $S(k, \omega)$ , найденного в симуляции, с помощью соотношения

$$C(p, \varepsilon) = \int \frac{2\omega S(p, \omega) d\omega}{\omega^2 - \varepsilon^2} \quad (43)$$

Используя также формулу для фотонного пропагатора (38), выпишем поправку  $\Pi_{a^2 a^2}$  в явном виде:

$$\Pi_{a^2 a^2}(k, E) = 2g^2 \int_0^\infty d\omega \int \frac{d\varepsilon d^2 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(E+\varepsilon)^2 - \Omega_{k+p}^2} \frac{2\omega S(p, \omega)}{\varepsilon^2 - \omega^2} \quad (44)$$

где  $\Omega_k = \omega_p l^2 + c^2 k^2 - g^2[\Pi_j + \Pi_{a^2 a^2} + \dots]$  точный фотонный спектр. После интегрирования по полюсам  $\varepsilon$  получим:

$$g^2 \Pi_{a^2 a^2}(k, E) = \frac{\omega_{pl}^4}{n^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\omega \frac{(\Omega_{k+p} + \omega) S(\vec{p}, \omega)}{\Omega_{k+p} [(\omega + \Omega_{k+p})^2 - E^2]} \rightarrow \frac{\omega_{pl}^4}{n^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{S(\vec{p}, 0)}{\Omega_{k+p}^2 - E^2} \quad (45)$$

Произошло пренебрежение  $\omega$ , поскольку нас интересует влияние обнаруженной в структурном факторе мягкой моды. Ее вклад в остальные моменты частоты мал по отношению щели к плазменной частоте.

Поправка к сверхтекучей плотности дается:

$$g^2 \frac{\delta n_s}{m} = g^2 \Pi(k \rightarrow 0, E = 0) \quad (46)$$

Используя уравнение (45), получим

$$\frac{\delta n_s}{n} = \omega_{pl}^2 \int \frac{d^2 p}{n(2\pi)^2} \frac{n^{-1} S(\vec{p}, 0)}{\Omega_p^2} \quad (47)$$

Так как структурный фактор имеет пик на  $k_0$ , необходимо выяснить как ведет себя спектр фотонов на таких импульсах. Если использовать форму спектра в нулевом по  $\sigma$  порядке  $\Omega_p^2 = \omega_{pl}^2 (1 + p^2 / \sigma k_0^2)$ , то для поправки к сверхтекучей плотности получим:

$$\frac{\delta n_s}{n} = 2\pi\sigma \int r dr \frac{n^{-1} S(k_0 r, 0)}{r^2 + \sigma} \quad (48)$$

где при переходе к безразмерному импульсу  $r = p/k_0$  использовано что  $n(2\pi)^2 = k_0^2$ . Пик структурного фактора хорошо приближается формулой

$$n^{-1}S(r) = \frac{\mu}{\Delta + (r-1)^2}, \quad (49)$$

в которой использовано представление о мягких квазичастицах на  $k_0$  как о фононах. Здесь и далее щель  $\Delta = \frac{\alpha\varepsilon(k_0)}{\omega_{pl}}$  безразмерна, а  $\mu \approx 0.2$  - эффективная масса. Сингулярным по близости к переходу кристаллизации будет вклад от пика:

$$\frac{\delta n_s}{n} \approx 2\pi\sigma\mu \int \frac{dr}{\Delta + (r-1)^2} = 2\pi^2\sigma \frac{\mu}{\sqrt{\Delta}} \quad (50)$$

Проверим законность этого результата, исследовав уравнение на спектр целиком.

### Уравнение на спектр в безразмерном виде

Для получения уравнения на спектр необходимо все выражение (39) приравнять нулю, а самосогласование достигается подстановкой искомого спектра  $E(k)$  в знаменатель поправок  $\Pi(k, E(k))$ :

$$\frac{\Omega_{k_0x_0}^2}{\omega_{pl}^2} = 1 + \frac{x_0^2}{\sigma} - \frac{\alpha_{coulomb}}{2\pi^2} P(k_0x_0, \Omega_{k_0x_0}) - \omega_{pl}^2 \int d^2r \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{\Omega_{k_0(\vec{r}+\vec{x}_0)}^2 - \Omega_{k_0\vec{x}_0}^2} \quad (51)$$

где  $r, x_0 = \frac{p}{k_0}, \frac{k}{k_0}$  - безразмерные импульсы. *Шаг первый* - считаем что первая поправка слабо перенормирует  $\sigma \rightarrow \sigma'(x_0)$ , причем зависимость ее от координаты медленная и ей (зависимостью) можно пренебречь.

$$\frac{\Omega_{k_0x_0}^2}{\omega_{pl}^2} = 1 + \frac{x_0^2}{\sigma'} - \omega_{pl}^2 \int d^2r \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{\Omega_{k_0(\vec{r}+\vec{x}_0)}^2 - \Omega_{k_0\vec{x}_0}^2} \quad (52)$$

Кстати, уже давно использовано предположение что в спектре одна ветвь (во взятии интеграла по полюсам). Исследуя формулу (52), мы найдем как минимум две. Но пока не будем думать о вкладе еще одной, отложим ее обсуждение до пункта "Сингулярность П". Тогда методом решения интегрального уравнения (52) будет метод последовательных приближений (по  $\sigma'$ ). *Шаг второй* - подставляем в знаменатель интегрального выражения  $\frac{\Omega_{k_0x_0}^2}{\omega_{pl}^2} = 1 + \frac{x_0^2}{\sigma'}$

$$\frac{E^2(x_0)}{\omega_{pl}^2} = 1 + \frac{x_0^2}{\sigma'} - \sigma' \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{(\vec{r} + \vec{x}_0)^2 - x_0^2} \quad (53)$$

Теперь можно исследовать интеграл:

$$\Pi_2(x_0) = \sigma' \int d\varphi dr \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{r + 2x_0 \cos \varphi} \quad (54)$$

Интеграл по углу можно взять сразу. На любом  $x_0 \neq 0$  у интеграла есть мнимая часть  $r < 2x_0$  и действительная. Считаем, что в знаменателе  $+i\varepsilon$

$$\Pi_2(x_0) = \sigma' \int d\varphi dr \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{r + 2x_0 \cos \varphi + i\varepsilon} = \quad (55)$$

$$= 2\pi\sigma' \left[ i\text{sgn}\varepsilon \int_0^{2x_0} dr \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{\sqrt{(2x_0-r)(r+2x_0)}} + \int_{2x_0}^{\infty} dr \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{\sqrt{(r-2x_0)(r+2x_0)}} \right] \quad (56)$$

Для структурного фактора воспользуемся

$$n^{-1}S(r) = \frac{\mu}{\Delta + (r-1)^2} \quad (57)$$

Эта формула точна при  $r$  между  $1 \pm \sqrt{\Delta}$ . Вне этого диапазона вклад континуума обуславливает отклонение от этой формулы. Слева от пика структурный фактор меньше чем по оценке, а справа больше, и вообще выходит на константу (а интеграл обрезается на нек. большой частоте).

Дальше в области  $r-1 \gg \sqrt{\Delta}$  уже неважно, взять  $S(r) = 1$  или  $S(r) = \frac{\mu}{\Delta + (r-1)^2}$  - все равно вклад от этой области никаких особенностей не содержит, монотонен и неинтересен. Меня интересует вещественная часть интеграла, когда пик попадает в нее (при  $2x_0 < 1$ ). Отсюда простая идея пользоваться 57 во всем интервале  $r \in [0, \infty]$ .

$$\text{Re}\Pi_2(x_0) = 2\pi\sigma'\mu \int_{2x_0}^{\infty} \frac{dr}{(\Delta + (r-1)^2)\sqrt{(r-2x_0)(r+2x_0)}} \quad (58)$$

Исходим из того, что  $\Delta$  мала, тогда интеграл набирается вблизи  $r = 1$

$$\text{Re}\Pi_2(x_0) = 2\pi\sigma'\mu \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}} \int_{2x_0}^{\infty} \frac{dr}{(\Delta + (r-1)^2)\sqrt{r-2x_0}} \quad (59)$$

Этим выражением и описывается вещественная поправка к спектру фотонов. На графике 10 построена  $x_0$ -зависимая часть выражения (59):

$$A = \frac{\text{Re}\Pi_2(x_0)}{2\pi\sigma'\mu} \quad (60)$$

для  $\Delta = 0.01$ .

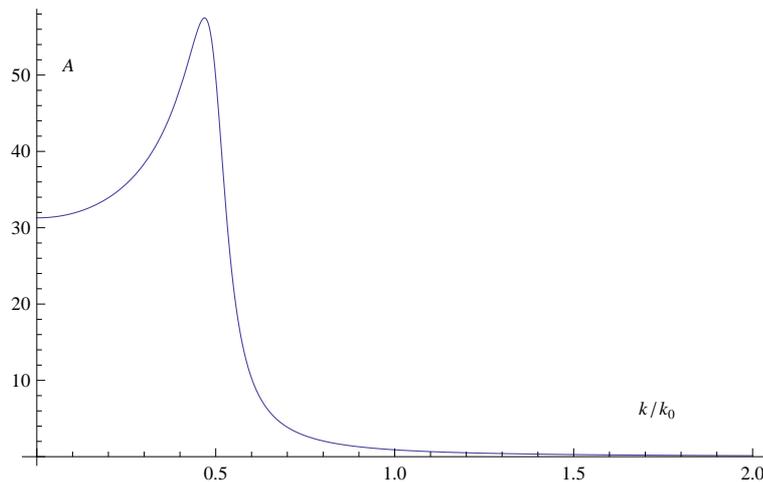


Рис. 11: Модуль уменьшения энергии фотона  $\Omega_k^2$  в связи с взаимодействием с флуктуациями плотности

Заметим что на  $x_0 \gtrsim 1/2$  её сингулярная по близости к переходу кристаллизации часть пропадает, что обосновывает вычисление (50). Исследуем окрестность  $x_0 = 1/2$  подробнее.

### Возможное зануление групповой скорости фотонов. Построение на плоскости $(\sigma, \Delta)$ фазовой диаграммы

Поправка к групповой скорости экстремальна, когда производная выражения (59) по  $x_0$  имеет максимум. Оказывается это происходит на  $x_e = 1/2 - 0.6\sqrt{\Delta}$ . Требуем зануления групповой скорости в этой точке:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left[ 1 + \frac{x_0^2}{\sigma'} - \text{Re}\Pi_2(x_0) \right] = \frac{2x_0}{\sigma'} - \text{Re}\Pi_2'(x_0) = 0 \quad (61)$$

$$\frac{2}{\sigma'} = \text{MaxRe}\Pi_2'(x_0) \quad (62)$$

Это уравнение дает линию  $\sqrt{\Delta} = 0.8\sigma'^{4/5}$  на  $(\sigma, \Delta)$ -диаграмме. Воспользуемся результатом (50) и сформулируем условие на **зануление сверхтекучей плотности**, в которое войдут фотоны на  $x_0 \approx 1$

$$1 = \frac{\delta n_s}{n} = 2\pi^2 \sigma \frac{\mu}{\sqrt{\Delta}} \quad (63)$$

Отсюда получим вторую линию на  $(\sigma, \Delta)$ -диаграмме:

$$\sqrt{\Delta} = 2\pi^2 \mu \sigma = 4.0\sigma \quad (64)$$

Вывод: на совсем малых  $\sigma$  и совсем вблизи перехода функция  $0.8\sigma'^{4/5}$  больше (64), и групповая скорость обнуляется первой. А на чуть больших  $\sigma$  уже просто сверхтекучесть пропадает при приближении к переходу.

Возможность по теории возмущений отрицательной групповой скорости, пусть и в ничтожно малой области на  $(\sigma, \Delta)$ -диаграмме, сигнализирует о непертурбативных явлениях, поиск которых и последует.

**Сингулярность  $\Pi$  вблизи  $E = 1$ . Самосогласование.**

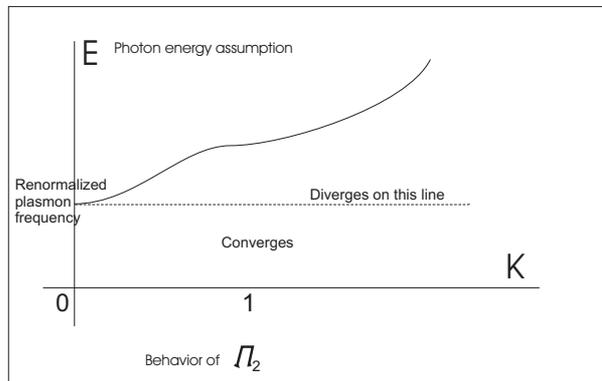


Рис. 12: Позиция сингулярности в поляризационном операторе  $\Pi_2$ , полученном пертурбативным вычислением

Причина сингулярности очень простая: спектр фотона имеет вид  $\frac{\Omega_{k_0 x_0}^2}{\omega_{pl}^2} = 1 + \frac{x_0^2}{\sigma'}$ , поэтому когда энергия, на которой вычисляется  $\Pi(E, k_0 x_0)$ , точно равна  $E = \omega_{pl}$ , в знаменателе формулы для токового коррелятора

$$g^2 \Pi_{a^2 a^2}(\omega_{pl}, k) = \frac{\omega_{pl}^4}{n^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{S(\vec{p} - \vec{k}, 0)}{\Omega_p^2 - \omega_{pl}^2} \quad (65)$$

образуется сингулярность

$$\frac{g^2 \Pi_{a^2 a^2}(1, x_0)}{\omega_{pl}^2} = \sigma' \int d^2 r \frac{n^{-1} S((\vec{r} - \vec{x}_0) k_0, 0)}{r^2} \quad (66)$$

Так как  $S(x_0) \neq 0$ , сингулярность логарифмическая. У уравнения на спектр (52) из-за этой сингулярности появляется дополнительное решение вблизи  $\frac{E}{\omega_{pl}} = 1$ . Заметим что при другой форме спектра при  $x_0 \rightarrow 0$ , например неаналитическом поведении  $\frac{\Omega_{k_0 x_0}^2}{\omega_{pl}^2} = 1 + A|x_0| + \frac{x_0^2}{\sigma'}$  от сингулярности ничего не останется.

Найдем точную поправку к спектру вблизи нуля, пока без самосогласования:

$$\Pi_2(x_0) = 2\pi\sigma' \int_{2x_0}^{\infty} dr \frac{n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0)}{\sqrt{(r-2x_0)(r+2x_0)}} \quad (67)$$

Такой интеграл может дать малую неаналитичную по  $x_0$  часть, которая уберет расходимость. Например, если  $n^{-1}S(k_0\vec{r}, 0) \sim r^2$ , то в поправке при  $x_0 \rightarrow 0$  лидирует вклад  $\Pi_2 \sim x_0^2 e^{1/2x_0}$ . Тогда бывшая сингулярность в самосогласованном вычислении примет вид

$$\frac{g^2 \Pi_{a^2 a^2}(1, x_0)}{\omega_p l^2} = \sigma' \int d^2 r \frac{n^{-1}S((\vec{r} - \vec{x}_0)k_0, 0)}{r^2} e^{-\frac{1}{2r}} \quad (68)$$

и уже не расходится. Значит, обнаруженная мода — фиктивная и учитывать ее не следует.

### Другие диаграммы и численное доказательство их малости.

Раскрывая многоточие в формуле (39), рассмотрим еще две поправки к поляризаационному оператору:

$$g^2 D^{-1} = \Omega^2 - c^2 k^2 + g^2 [\Pi_{a^2} + \Pi_j + \Pi_{a^2 a^2} + \underline{\Pi_{jja^2}} + \underline{\Pi_{jjjj}}] \quad (69)$$

В дополнении 3 получен их явный вид:

$$\Pi_{jja^2} = \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \int \Gamma_{\alpha\gamma} D_{\gamma\beta} d^2 k \quad (70)$$

$$\Pi_{jjjj} = P_{\alpha\beta} \int V_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} d^2 k \quad (71)$$

где  $P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2$  поперечный проектор, а корреляционные функции  $\Gamma_{\alpha\gamma} = \langle T j_\alpha(t_1) j_\gamma(t_2) n(0) \rangle$ , а  $V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle T j_\alpha(t_1) j_\gamma(t_2) j_\beta(t_3) j_\delta(0) \rangle$ .

Нас интересует, может ли вклад этих диаграмм существенно изменить результаты, полученные выше и сингулярные по близости к переходу жидкость-кристаллическое состояние. В жидкости точно выполняется  $\langle n_k \rangle = 0$  в связи с отсутствием выделенного направления. По аналогичным причинам средние вида  $\Gamma_{p,k} = \langle j_p j_{-p-k} n_k \rangle$  равны нулю — они не имеют определенного знака. Конечно, такое рассуждение не может считаться доказательством, поэтому я использовал возможности симуляции и измерил средние такого типа для полей  $j$  и  $n$  как в один момент времени, так и в разные. Случайный разброс результатов очень велик из-за того что  $\langle |j_p j_{-p-k} n_k|^2 \rangle$  имеет пик на  $k = k_0$ , но среднее значение  $\Gamma = 0$  точно.

Про поведение четырехтоковой вершины  $V$  известно меньше, так как для полного ее описания необходимо исследовать функцию 8 независимых переменных  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, t_1, t_2, t_3$  — входящих импульсов и времен, соответственно. Однако напомним, что в предыдущем порядке учета  $\langle T j_k j_{-k} \rangle$  в поляризаационном операторе привел лишь к слабой регулярной вблизи перехода перенормировке  $\sigma$ . Единственный способ, которым вершина  $V$  может получить такую сингулярную зависимость — вклад от процессов, происходящих через обмен флуктуациями плотности, в корреляторе которых и содержится сингулярность. Косвенным указанием на участие таких процессов было бы наличие неприводимой части корреляторов типа  $\langle T(n_k n_{-k})(j_{k_1} j_{k_2} j_{k_3} j_{-k_1-k_2-k_3}) \rangle$ . Было проверено, что для одного из таких корреляторов — уже упоминавшегося  $\langle |j_p j_{-p-k} n_k|^2 \rangle$ , неприводимая часть точно равна нулю. То есть он распадается на произведение двухточечных корреляционных функций:

$$\langle |j_p j_{-p-k} n_k|^2 \rangle = \langle n_k n_{-k} \rangle \langle j_p j_{-p} \rangle \langle j_{p+k} j_{-p-k} \rangle \quad (72)$$

и в статике, и в динамике. Перечисленные факты, а также результат из слабой связи, где  $\langle njj \rangle$  и  $\langle jjjj \rangle$  также не влияли на ответ для поляризаационного оператора, я считаю достаточно убедительными аргументами за пренебрежение этими диаграммами.

### Интерпретация спектра фотонов

Выкладки, приводящие к эффекту зануления групповой скорости, полностью обоснованы в вышеизложенных рассуждениях. Групповая скорость, вычисленная во втором порядке теории возмущений, может иметь отрицательное значение при некоторой комбинации параметров. Причем теория возмущений строится по параметру  $\sigma$ ,

и при сколь угодно малом его значении можно выбрать такое малое  $\Delta$ , что формулы приведут к отрицательной групповой скорости на  $\approx k_0/2$ . Мы склонны считать это сигналом, что теория возмущений плохо описывает происходящее в системе.

Более адекватным описанием нам видится то, что фотоны образуют связанное состояние с флуктуацией плотности, которое и становится элементарным возбуждением в системе. Конкретнее, вспомним что в диаграмму (58) дают наибольший вклад процессы рассеяния фотона назад на характерной флуктуации плотности. Фотон,двигающийся вперед, и фотон, рассеянный назад, в сумме дают стоячую волну. Ожидается, что эта стоячая волна и образует связанное состояние с флуктуацией плотности. Групповую скорость надо вычислять для таких состояний, которые и являются истинными возбуждениями в системе.

Чтобы доказать, что произошла непертурбативная перестройка такого рода, надо для начала решить классические уравнения движения (см. Дополнение 3). Однако явное вычисление по этой схеме еще не проведено.

Проиллюстрируем примером, как малое возмущение может приводить к сильному эффекту с групповой скоростью. Рассмотрим фотон,двигающийся в периодическом потенциале  $V(x, y) = A \cos k_0 x$ . Это взаимодействие смешивает фотоны на импульсах  $\pm \frac{k_0}{2}$ , причем в области импульсов  $\sim [\frac{k_0}{2} - \frac{A}{c}, \frac{k_0}{2} + \frac{A}{c}]$  обычная теория возмущений по  $A$  неприменима, надо применять теорию возмущений для вырожденных уровней. Создается зона Бриллюэна  $[-\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{2}]$ . Собственные состояния гамильтониана системы "фотон в потенциале" на импульсе фотона  $\pm \frac{k_0}{2}$  - стоячие волны  $\psi = \sin \frac{k_0}{2} x$  и  $\psi = \cos \frac{k_0}{2} x$ . Групповая скорость  $\partial \varepsilon / \partial k$  этих двух состояний, лежащих на границе зоны Бриллюэна, точно равна 0. Я предполагаю, что аналогичный механизм имеет место для фотонов, взаимодействующих с бозе жидкостью в моей системе.

- 
- [1] E. V. Mozgunov and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. B **83**, 104515 (2011)
  - [2] A. F. Andreev and I. M. Lifshits, Sov. Phys. JETP **29**, 1107 (1969)
  - [3] E. Kim and M. H. W. Chan, Nature **427**, 225 (2004); N. Prokofiev and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **94**, 155302 (2005).
  - [4] D. Das and S. Doniach, Phys. Rev. B **64**, 134511 (2001)
  - [5] A. Paramekanti, L. Balents, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **66**, 054526 (2002)
  - [6] M. V. Feigel'man, Physica A **168**, 319 (1990); M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein and V. M. Vinokur Pis'ma ZhETF **52**, 1141 (1990) [JETP Letters, **52**, 546 (1990)].
  - [7] M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, L. B. Ioffe and A. I. Larkin, Phys.Rev. B **48**, 16641 (1993).
  - [8] C. L. Kane, S. Kivelson, D. H. Lee and S. C. Zhang, Phys.Rev. B **43**, 3255 (1991).
  - [9] M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, Nucl. Phys. B **506** [FS], 665 (1997)
  - [10] Ph. Choquard and J. Clerouin. Phys.Rev.Lett. **50**, 2086 (1983).
  - [11] M. V. Feigel'man and A. M. Tsvelik, ZhETF **83**, 1430 (1982) [Sov.Phys.JETP **56**, 823 (1982)].
  - [12] C. L. Henley, J. Phys.: Condens. Matter **16**, S891 (2004).
  - [13] D. A. Ivanov, Phys. Rev. B **70**, 094430 (2004)
  - [14] A. M. Lauchli, S. Capponi, F. F. Assaad, J. Stat. Mech. P01010 (2008).
  - [15] D. S. Rokhsar and S. A. Kivelson Phys. Rev. Lett. **61**, 2376 (1988)
  - [16] C. Castelnovo, C. Chamon, and D. Sherrington Phys. Rev. B **81**, 184303 (2010)
  - [17] F. Calogero, J. Math.Phys. **10**, 2191 (1969); B. Sutherland, J. Math.Phys.**12**, 246 (1971); Phys. Rev. A **4**, 2019 (1971).
  - [18] M. Pustilnik, Phys. Rev. Lett. **97**, 036404 (2006)
  - [19] L. P. Pitaevsky, ZhETF **36**, 1168 (1959) [Sov.Phys.-JETP **39**, 830 (1959)]

## Приложения.

### 1.Эквивалентность квантовой механики и классической стохастической эволюции

Стандартное уравнение Фоккера-Планка, описывающее Ланжевеновскую динамику (4):

$$\dot{P}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} \left( T \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_j} \right) P(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \hat{W} P \quad (73)$$

Равновесное решение (73) дается  $P_0 = e^{-V/T}$ . Чтобы доказать единственность такого решения необходимо применить теорему Перрона-Фробениуса (дискретизовав систему и считая что матрица в уравнении (73) неприводима).

Можно удостовериться что после замены переменных  $P = \Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  уравнение (73) принимает

форму уравнения Шредингера в мнимом времени  $\dot{\Psi} = \hat{H}\Psi$ , а гамильтониан строится по потенциалу  $V$  также как в уравнении (3).

Для удобства обозначим точку в пространстве состояний системы  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv \varphi$  и не будем далее использовать конкретную форму  $\hat{H}$ . Соответствие между классическими и квантовыми корреляционными функциями которое мы докажем верно для любого симметричного гамильтониана  $H = H^T$  основное состояние которого  $\Psi_0(\varphi)$  можно написать явно. Условие симметричности  $H = H^T$  для гамильтониана эквивалентно  $H^* = H$ , а это последнее позволяет выбрать действительные волновые функции, в результате после замены  $P(\varphi, t)$  всегда действительное, как и должно быть.

Для доказательства понадобится тот факт, что квантовые состояния формируют полную ортогональную систему функций:

$$H \rightarrow \{\Psi_\lambda(\varphi), \lambda\} \quad (74)$$

$$\hat{1} = \sum_\lambda \Psi_\lambda(\varphi)\Psi_\lambda(\varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \quad (75)$$

Рассмотрим корреляционную функцию в квантовом случае:

$$C_q(t) = \langle \Psi_0 | A e^{-iHt} B | \Psi_0 \rangle \quad (76)$$

Подставим в правую часть уравнения (76) разложение единицы (75):

$$C_q(t) = \sum_\lambda \langle \Psi_0 | A | \lambda \rangle e^{-i\lambda t} \langle \lambda | B | \Psi_0 \rangle = \int d\varphi d\varphi' \sum_\lambda \Psi_0(\varphi)\Psi_\lambda(\varphi) A(\varphi)\Psi_0(\varphi')\Psi_\lambda(\varphi') B(\varphi') e^{-i\lambda t} \quad (77)$$

где  $A$  и  $B$  считаются диагональными операторами (то есть функциями только координат  $\varphi$ , без производных). Связь между квантовой и классической динамикой осуществляется с помощью замены переменных  $P(\varphi, t) = \Psi_0(\varphi')\Psi(\varphi', t)$ . Оператор  $W = -\Psi_0(\varphi)\hat{H}\frac{1}{\Psi_0(\varphi)}$  задает классическую стохастическую эволюцию. Видим что собственные функции этого оператора получаются домножением  $P_\lambda(\varphi) = \Psi_0(\varphi')\Psi_\lambda(\varphi')$ . Однако эта система функций не является ортогональной и ненормирована, так как оператор  $W$  неэрмитов. Используя тождество  $H = H^T$  и определение  $W$ , получим соотношение  $P_0 W^T = W P_0$ , являющееся по сути свойством детального равновесия.

Перепишем выражение для корреляционной функции (77) в классических обозначениях

$$C_q(t) = \int d\varphi d\varphi' \sum_\lambda P_\lambda(\varphi) A(\varphi) P_\lambda(\varphi') B(\varphi') e^{-i\lambda t} \quad (78)$$

Теперь перейдем к вычислению классической корреляционной функции. Мы имеем уравнение на плотность вероятности  $P(\varphi)$

$$\dot{P} = W P, \quad (79)$$

и система находится в равновесии  $P(t) = P_0$ . Временная корреляционная функция  $C(\tau)$  (та самая, которая входит в правую часть (6)) определяется через вероятность  $P(\varphi, 0, \varphi', \tau)$  что стохастический процесс примет значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  в моменты времени разделенные  $\tau$ .

$$C(\tau) = \int d\varphi d\varphi' P(\varphi, 0, \varphi', \tau) A(\varphi) B(\varphi') \quad (80)$$

здесь эта вероятность  $P(\varphi, 0, \varphi', \tau) = P(\varphi) p_{\varphi \rightarrow \varphi'}^\tau$ , причем условная вероятность  $p_{\varphi \rightarrow \varphi'}^\tau$  это по определению вероятность системы оказаться в конфигурации  $\varphi'$  в момент времени  $\tau$ , если ее положение  $\varphi$  было фиксировано в  $\tau = 0$ . Подставим такую форму  $P(\varphi, 0, \varphi', \tau)$  в (80):

$$C(\tau) = \int d\varphi d\varphi' P_0(\varphi) A(\varphi) p_{\varphi \rightarrow \varphi'}^\tau B(\varphi') \quad (81)$$

А условную вероятность можно найти зная закон эволюции системы  $p_{\varphi \rightarrow \varphi'}^\tau = (e^{W\tau})_{\varphi'} \delta(\varphi' - \varphi)$ . Чтобы использовать эту формулу, надо знать разложение  $\delta$ -функции по собственным функциям. Удобно использовать "квантовый" базис (так как оператор  $W$  неэрмитов):

$$\delta(\varphi' - \varphi) = \sum_{\lambda} \Psi_{\lambda}(\varphi) \Psi_{\lambda}(\varphi') = \frac{\sum_{\lambda} P_{\lambda}(\varphi) P_{\lambda}(\varphi')}{P_0(\varphi)} \quad (82)$$

Теперь подействуем на  $\delta$ -функцию оператором эволюции  $e^{W\tau}$  (помня что его собственные значения  $-\lambda$  отличаются знаком от квантовых )

$$p_{\varphi \rightarrow \varphi'}^\tau = (e^{W\tau})_{\varphi'} \delta(\varphi' - \varphi) = \frac{\sum_{\lambda} P_{\lambda}(\varphi) P_{\lambda}(\varphi') e^{-\lambda\tau}}{P_0(\varphi)} \quad (83)$$

Тогда классическая корреляционная функция представится в виде:

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \int d\varphi d\varphi' P_0(\varphi) A(\varphi) \frac{\sum_{\lambda} P_{\lambda}(\varphi) P_{\lambda}(\varphi') e^{-\lambda\tau}}{P_0(\varphi)} B(\varphi') = \\ &= \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\varphi) A(\varphi) P_{\lambda}(\varphi') B(\varphi') e^{-\lambda\tau} \end{aligned} \quad (84)$$

Сравнивая уравнения (84) и (78) получаем искомое соотношение:

$$C_q(t) = C(it) \quad (85)$$

## 2. Детали анализа данных.

Ротонный спектр со щелью  $\Delta$  приводит к возникновению квазичастичного континуума начинающегося с энергий  $\omega > 2\Delta$ . Чтобы увидеть это, рассмотрим 2 ротона с точно минимальной энергией ( $k_{1,2} = k_0$ ) при произвольном выборе угла между  $k_1$  и  $k_2$ . Полная энергия  $2\Delta$ , а их суммарный импульс может принимать любые значения в области  $K < 2k_0$ . Единственные обнаруженные под континуумом возбуждения - это ротонны, которые его и создают. Составим спектральный вес:

$$S(\omega, k) = A\delta(\omega - E(k)) + S_{con}(\omega, k), \quad (86)$$

$$\text{где } S_{con}(\omega < 2\Delta) = 0, \quad (87)$$

$$E(k) \approx \Delta + \frac{(k - k_0)^2}{2m^*} \text{ at } k \rightarrow k_0 \quad (88)$$

Если  $k \in [p_-, p_+]$  мы предполагаем что главный вклад в (86) приходит от квазичастицы, т.е. выполняется

$$A \gg \int S_{con}(\omega, k) d\omega, \quad (89)$$

Благодаря этому точная форма  $S_{con}(\omega)$  не играет большой роли. Для исследования данных симуляции использовалось предположение, что спектральный вес имеет прямоугольный вид  $S_{con}(\omega) = B$ ,  $2\Delta < \omega < \omega_{max}$ . В общей сложности в таком предположении 4 независимых параметра:  $A, E(k), B, \omega_{max}$ , которые необходимо подобрать для каждого волнового вектора  $k$ , а также величина щели  $\Delta = E(k_0)$ , которая одна для всех  $k$ . Параметры подбирались так, чтобы средний квадрат отклонения  $\sum_i (S_{fit}(t_i) - S_{sim}(t_i))^2$  затухающей зависимости  $S_{sim}(\tau)$  от полученной по модельному спектральному весу  $S_{fit}(\tau)$  был минимален. Так получен спектр  $E(k)$ , представленный на рисунке (2). Остальные параметры также были получены, чтобы проверить условие (89). Оказалось, что в непосредственной близости от точек окончания спектра оно нарушается, что приводит к росту статистической ошибки определения  $E(k)$  на этих  $k \approx p_-, p_+$ .

Для построения зависимости (3) подходить близко к точкам окончания не требуется, так что неравенство (89) остается в силе. Оно обеспечивает хорошую работу такой простой оценки для  $E(k)$  как  $d \ln S / dt|_{t=t_0}$ , где  $t_0$  - время, достаточное для полного экспоненциального подавления континуума. Заметим, что разброс величины

$\ln S$  (и ее производной) растет экспоненциально с  $t_o$ , так как  $1/S \sim e^{E(k)t_o}$ . Таким образом выбор оптимального значения  $t_o$  зависит от машинного времени которым мы располагаем.

Вычисление производной  $d\ln S/dt$  возможно двумя способами: до усреднения по перебранным (в смысле Монте-Карло) реализациям стохастического процесса  $\mathbf{r}(\tau)$ , и после него, проводя линию через точки на графике  $\ln S(t_i)$ ,  $t_i \in [t_o - \delta T/2, t_o + \delta T/2]$ . Эти два подхода приводят к одинаковым результатам, но последний дает дополнительную информацию если аккуратно проследить за погрешностью  $\sigma E(k)$  определения спектра  $E(k)$ . Эта ошибка складывается из стандартной  $N$ -точечной погрешности измерения наклона прямой  $\sigma_N E = \sqrt{\frac{12}{N} \frac{\sigma \ln S}{\delta T}}$  и систематической ошибки. Дело в том, что график  $\ln S(t_i)$  имеет кривизну из-за вклада континуума, что систематически приводит к завышенным значениям  $E(k)$ . Предположим что производная  $d\ln S/dt$  изменяется на  $\delta E$  за интервал времени  $\delta T$ . Тогда оценка для систематической ошибки будет  $\sigma_c E = \delta E e^{-(2\Delta - E)\delta T/2} / (1 - e^{-(2\Delta - E)\delta T})$ . Знаменатель этого выражения расходится при приближении  $k$  к точкам окончания спектра, что напоминает нам о границе применимости использованного упрощенного метода. Удивительным фактом является то, что даже без учета систематического сдвига  $\sigma_c E$   $N$ -точечное измерение  $d\ln S/dt$  можно применять и за пределами его предполагаемой области применимости, во всем диапазоне  $k \in (p_-, p_+)$ . Этот метод улавливает как выход на неаналитические точки окончания спектра, так и закрытые щели  $\Delta$  при переходе  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ . В точке перехода погрешность  $\sigma_N \Delta$  превышает среднее значение  $\Delta$ .

### 3. Используемые факты из квантовой теории поля.

Вернемся к формуле (37) для модели KKLZ + фотоны

$$\int D\vec{a} \left( \int Dn D\varphi \exp i \int L_{KKLZ}(n, \varphi) d^2 r dt \right) \exp i \int [L_a(\vec{a}) + L_{int}(\vec{a}, n, \varphi)] d^2 r dt \quad (90)$$

Вершины в явном виде удобно записать так:

$$L_{int}(\vec{a}, n, \varphi) = \vec{j}\vec{a} + \frac{\rho}{2m}\vec{a}^2 + \frac{n}{2m}\vec{a}^2 \quad (91)$$

где разбито  $n \rightarrow n + \rho$  и теперь  $n$  средняя плотность системы, та же что входила в формулы KKLZ. Положим  $2m = 1$  для удобства.

Последнее слагаемое сразу входит в пропагатор фотонов (пространственной части вектор-потенциала), добавляя им плазменную частоту.

Полный лагранжиан теперь таков:

$$L(x) = L_{KKLZ}(\rho, \varphi) + \vec{j}(\rho, \varphi)\vec{a} + \rho\vec{a}^2 + \int a_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a_\beta(y) d^3 y \quad (92)$$

где  $y = (r, t)$ .

Далее следует некая формальная процедура (метод внешнего поля, см. Вайнберг т.2), которая соответствует применению диаграммной техники для этой теории поля для поиска перенормировки фотонного пропагатора. Разделим поле  $a$  на две части  $a \rightarrow a' + a$ , и интегрирование оставим по  $a'$ . А поле  $a$  может нетривиально зависеть от координаты. Тогда в результате функционального интегрирования с учетом только **неприводимых** диаграмм получится эффективное действие для поля  $a$  (проинтегрировали по  $a'$  и бозонному полю в KKLZ). Начнем:

$$L(x) = L_{KKLZ}(\rho, \varphi) + \vec{j}(\vec{a} + \vec{a}') + \rho(\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{a}' + \vec{a}'^2) + \int a_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a_\beta(y) d^3 y + \int a'_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a'_\beta(y) d^3 y \quad (93)$$

Заметим что поля  $a$  и  $a'$  считаются медленным и быстрым, поэтому в пропагаторе нет перекрестного члена. Член с пропагатором поля  $\vec{a}$  выносится из всех интегрирований. По сути, нам нужно усреднить с действием

$$\int L_{KKLZ}(\rho, \varphi) d^3 x + \int a'_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a'_\beta(y) d^3 x d^3 y \quad (94)$$

экспоненту с вершинами взаимодействия:

$$\langle e^{\int \vec{j}(\vec{a}+\vec{a}')+\rho(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{a}'+\vec{a}'^2)d^3x} \rangle \quad (95)$$

не забывая выкидывать приводимые слагаемые, возникающие из экспоненты. Из всех диаграмм, получающихся разложением экспоненты по Тейлору, оставим только содержащие  $\vec{a}^2$ . В первом порядке таких нет, во втором:

$$\frac{1}{2} \int (\vec{j}\vec{a})_x (\vec{j}\vec{a})_y d^3x d^3y + \int (a^2\rho)_x (a^2\rho)_y d^3x d^3y + 2 \int (\vec{a}\vec{a}')_x (\vec{a}\vec{a}')_y \quad (96)$$

Вторая диаграмма приводима, а первая и третья дают поправки к фотонному пропагатору соответственно 1го и 2го порядка по  $\sigma$ .

$$a_\alpha \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} a_\beta = \frac{1}{2} a_\alpha P_{\alpha\beta}^\perp a_\beta \quad (97)$$

$$a_\alpha \Pi_{\alpha\beta}^{(2)a^2 a^2} a_\beta = 2a_\alpha \int D_{\alpha\beta} C d^2k d\varepsilon a_\beta \quad (98)$$

Здесь  $P_{\alpha\beta}^\perp = \langle T j_k^{\perp\alpha}(t) j_{-k}^{\perp\beta}(0) \rangle$  поперечный токовый коррелятор, а  $C_k(t) = \langle T n_k(t) n_{-k}(0) \rangle$  коррелятор плотностей в KKLZ. Еще две поправки второго порядка по  $\sigma$  придут соответственно из третьего

$$\frac{2}{3} \int (\vec{j}\vec{a})_x (\vec{j}\vec{a}')_y (\vec{a}\vec{a}')_z d^3x d^3y d^3z \quad (99)$$

и четвертого порядка экспоненты

$$\int (\vec{j}\vec{a})_x (\vec{j}\vec{a}')_y (\vec{j}\vec{a})_z (\vec{j}\vec{a}')_h d^3x d^3y d^3z d^3h \quad (100)$$

Запишутся они так:

$$a_\alpha \Pi_{\alpha\beta}^{(2)jj a^2} a_\beta = \frac{2}{3} a_\alpha \int \Gamma_{\alpha\gamma} D_{\gamma\beta} d^2k d\varepsilon a_\beta \quad (101)$$

$$a_\alpha \Pi_{\alpha\beta}^{(2)jjjj} a_\beta = a_\alpha \int V_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} d^2k d\varepsilon a_\beta \quad (102)$$

где  $\Gamma_{\alpha\gamma} = \langle T j_\alpha(t_1) j_\gamma(t_2) n(0) \rangle$ , а  $V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle T j_\alpha(t_1) j_\gamma(t_2) j_\beta(t_3) j_\delta(0) \rangle$ .

### Решения уравнений движения

Пертурбативное вычисление  $\Pi^{(2)a^2 a^2}$  указало, что взаимодействие фотонов с корреляциями плотности такого типа должно приводить к перестройке основного состояния начиная с некоторого, все еще довольно малого критического значения  $\sigma$ . Но пертурбативные методы такого типа не могут дать подсказки о том в какое состояние перейдет система. Классический способ решения этого вопроса состоит в исследовании уравнений движения этой теории поля. Нас не интересует движение свободной теории, мы хотим включить ключевую вершину  $\rho\vec{a}^2$  в "невозмущенный лагранжиан":

$$L_1(x) = L_{KKLZ}(\rho, \varphi) + \rho\vec{a}^2 + \int a_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a_\beta(y) d^2y \quad (103)$$

Предположим, что только динамика плотности играет роль:

$$L_1(x) = \int \rho(x) C^{-1}(x-y) \rho(y) d^2y + \rho\vec{a}^2 + \int a'_\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{-1}(x-y) a'_\beta(y) d^2y \quad (104)$$

Таким образом, мы получили некоторую теорию поля, не являющуюся KKLZ, но, видимо, содержащую некие подсказки о том, какое же состояние может сформироваться в KKLZ взаимодействующей с фотонами при достаточно сильном  $\sigma$ . Выпишем уравнения движения:

$$\rho(x) = \int C(x-y) \vec{a}^2(y) d^2y \quad (105)$$

$$D_{\alpha\beta}^{-1} a_\beta = \rho a_\alpha \quad (106)$$

Первое уравнение является по сути классическим откликом поля плотности на появление ненулевого вектор-потенциала. Второе же - есть волновое уравнение для движения фотонов в потенциале, создаваемом флуктуациями плотности:

$$[\partial_t^2 - \sigma^{-1}(\partial_x^2 + \partial_y^2)]\psi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) \quad (107)$$

Ожидается, что это уравнение будет применено для интерпретации найденных поправок к спектру фотонов.