

Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
На степень магистра
Студента 6 курса
Белана С.А.

**Распространение связанных плазмонных мод
в гибридном нановолноводе**

Научный руководитель
Лебедев В. В.

Москва, 2013

Содержание

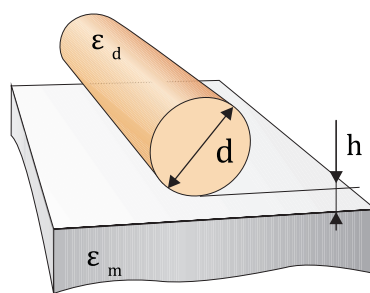
1	Введение	2
2	Плоский трехслойный волновод	4
3	Полуаналитический метод. Анализ результатов	9
4	Заключение	13
A	Приложение: построение фундаментальной собственной моды	14

1 Введение

Создание волноводов способных обеспечить субволновую локализацию передачи электромагнитного сигнала оптического и телекоммуникационного частотных диапазонов представляет собой огромный практический интерес. Подобные устройства открывают большие возможности для реализации наномасштабных оптических микросхем, квантовых вычислений, наноразмерных лазеров, биосенсоров. В настоящее время одной из основных причин, препятствующих процессу наращивания производительности современных вычислительных систем, является недостаточно высокая эффективность применяющихся линий передачи сигнала. Общепринятые медные проводники перестают справляться с растущей нагрузкой и имеют проблемы с выделением тепла. Эти затруднения могут быть преодолены с помощью замены электронного сигнала (как носителя информации) на оптический, что позволит повысить пропускную способность внутрочиповых соединений при одновременном снижении энергозатрат. Успешная реализация замены медных внутрочиповых проводников соединениями на основе оптических линий приведет к созданию нового поколения быстродействующих чипов и существенно ускорит работу современных процессоров. Стремление одновременно с повышением быстродействия добиться все большей степени миниатюризации ведет при этом к требованию уменьшения физических размеров оптических волноводов до наномасштабов, то есть до субволнового масштаба оптического диапазона. При этом однако неизбежно возникает проблема дифракционного предела света в диэлектрической среде, который не позволяет локализовать электромагнитную энергию на масштабе много меньше соответствующей длины волны [1]. Традиционные диэлектрические волноводы, широко используемые в телекоммуникациях, содержат только неметаллические компоненты и поэтому имеют слабое затухание сигнала, однако не способны решить задачу субволновой локализации в силу ограничений, накладываемых дифракцией. Это ведет к невозможности достижения желаемой миниатюризации схем на оптических сигналах при использовании только диэлектрических составляющих. Наиболее перспективный способ преодоления этой проблемы заключается во внедрении материалов с отрицательным показателем диэлектрической проницаемости. Таким свойством обладают например металлы на частоте меньшей плазменной. Металлические структуры поддерживают распространение поверхностных плазмонов-поляритонов SPP (surface plasmon-polaritons), электромагнитных волн связанных с коллективными колебаниями электронного газа в металле. Плазмонные моды, существующие на границах раздела металл-диэлектрик, могут быть локализованы на масштабе существенно меньшем длины волны [2]. Основанные на этом принципе плазмонные волноводы способны локализовать передачу электромагнитной энергии на субволновом масштабе, но при этом обладают большими омическими потерями, обусловленными наличием диссипации в металле. В итоге, обеспечивая желаемую степень миниатюризации, плазмонные волноводы имеют недопустимо малую длину распространения сигнала, непригодную для их практического использования в качестве элементов телекоммуникационных схем.

Попытки найти компромисс в этой проблеме привели к концепции интеграции диэлектрического волновода с плазмонным. Гибридный плазмонный волновод (hybrid plasmonic waveguide) состоит из диэлектрического оптоволокна, отделенного от поверхности металла нанопрослойкой прозрачного диэлектрика [3]. Идея заключается в том, чтобы за счет большого контраста диэлектрических проницаемостей используемых материалов достичь существенного усиления поля и при определенном соотношении геометрических параметров добиться локализации распространяемой моды главным образом в пределах зазора. Тогда указанная гибридная схема будет сочетать в себе одновременно черты фотонного и плазмонного волноводов - наличие металла обеспечит распространение сильно локализованной плазмонной моды, которая при этом не будет испытывать больших оптических потерь, поскольку основная доля передаваемой энергии сосредоточена в неметаллической области зазора. Результаты численного моделирования фундаментальной гибридной моды указывают на то, что при достаточно малом рассто-

янии между цилиндром и металлом электромагнитное поле действительно оказывается сконцентрированным в зазоре [3]. Длина распространения плазмонной моды при этом сравнима с соответствующим значением для плоского плазмона-поляритона на границе металл-диэлектрик и может быть доведена за счет подбора параметров системы до интересных с практической точки зрения величин. Также имеется попытка дать теоретическое обоснование выдвинутым качественным соображениям и подтвердившей их численной симуляции в рамках метода связанных мод [3, 10]. Электромагнитное поле фундаментальной моды гибридного волновода предлагается в нулевом приближении описывать как суперпозицию фундаментальных мод двух составляющих его волноводов - отдельного цилиндра и плоской границы металл-диэлектрик. Однако такой подход является пертурбативным и явно предполагает малое взаимное влияние отдельных мод, составляющих суперпозицию, что может быть обеспечено только в случае достаточно большого расстояния, отделяющего цилиндр от поверхности металлической плоскости. В то же время исходные предпосылки и результаты численного счета указывают на то, что ожидаемый эффект сильной локализации имеет место при малых зазорах между материалами, делая указанное пертурбативное описание неприменимым.



Возможность распространения узко локализованных слабо затухающих оптических и телекоммуникационных сигналов в волноводе с гибридной геометрией была экспериментально продемонстрирована в течении последних трех лет [4]. Таким образом, можно сказать, что на сегодняшний день преимущества использования гибридных структур нашли свое подтверждение экспериментально и в рамках численных симуляций. Однако вопрос об оптимальном соотношении параметров системы, обеспечивающим работу волновода в желаемом режиме сильной локализации и достаточно низких потерь, до сих пор является открытым. В этой связи является востребованным отсутствующее на настоящий момент аналитическое понимание зависимости параметров моды от поперечной геометрии гибридного волновода и оптических свойств составляющих его материалов. Целью данной работы является теоретическое рассмотрение физических принципов работы гибридного волновода, поиск дисперсионных соотношений его собственных мод и распределения электромагнитного поля в них. Отметим, что результатом любого теоретического рассмотрения, претендующего на роль достаточно полного описания работы гибридного волновода, должна являться способность предсказывать характер режима распространения сигнала при различных соотношениях между управляющими параметрами системы. И как наиболее ценный результат - давать оценки для оптимального набора параметров в желаемом частотном диапазоне.

В данной работе показано, что локализация гибридной плазмонной моды НРР (hybrid plasmon polariton) может быть существенно повышена за счет специфического выбора материалов, когда диэлектрическая проницаемость оптоволокна больше абсолютного значения проницаемости металла. Основным преимуществом такого выбора является обратно пропорциональная зависимость эффективного индекса гибридной моды от толщины зазора. Данная особенность позволяет достичь произвольного субволнового размера моды на произвольной частоте за счет настройки расстояния между оптоволоконным и металлической плоскостью. Для обоснования этой идеи мы провели теоретическое и численное исследование распространения НРР-моды. Прежде всего мы провели анализ, основанный на рассмотрении плоской волноводной структуры металл-вакуум-

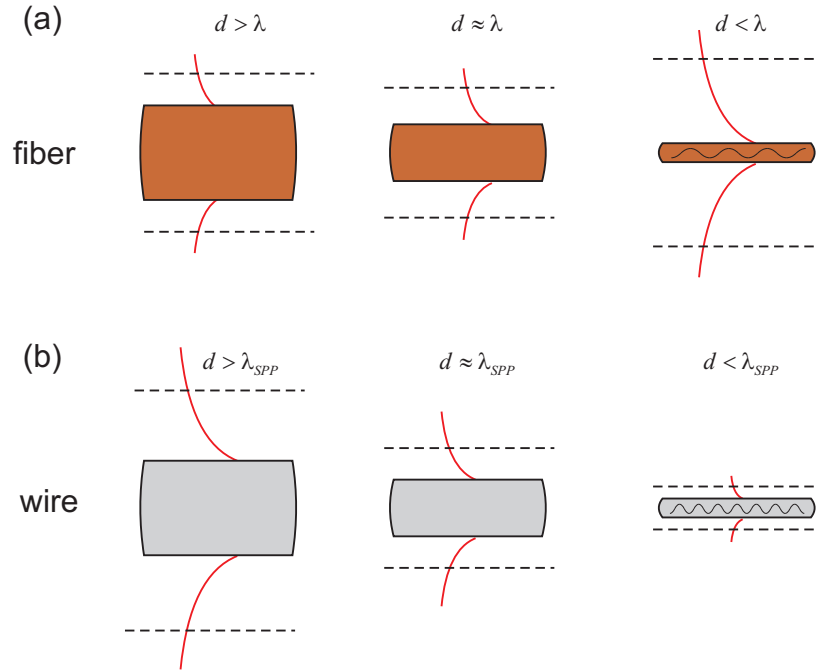


Рис. 1: Сравнение зависимостей размера фундаментальных мод диэлектрического оптоволокна (a) и металлической проволоки (b) от диаметра.

диэлектрик CGD (conductor-gap-dielectric) [5]. Нами получено точное аналитическое выражение для эффективного индекса фундаментальной CGD-моды и выведен критерий, при выполнении которого свойства НРР-моды аналогичны свойствам моды в плоской трехслойной системе. Далее мы разработали полуаналитический метод решения задачи распространения гибридных мод. Подобный метод был ранее использован в проблеме рассеяния плоской электромагнитной волны на цилиндре вблизи плоской оптической неоднородности [8, 9]. Схема основана на разложении электромагнитного поля гибридной моды по цилиндрическим гармоникам и плоским затухающим волнам, с последующей постановкой граничных условий на поверхностях раздела различных материалов. Численные результаты, полученные на основе полуаналитического метода, подтверждают преимущества предлагаемого нами выбора материалов.

2 Плоский трехслойный волновод

Преимущества плазмоники в вопросах локализации электромагнитных сигналов удобно проиллюстрировать с помощью сравнения свойств мод в диэлектрическом и металлическом цилиндрах (рисунок 1). Обе структуры поддерживают распространение связанной моды, которая существует при любом значении диаметра. Эту моду мы будем называть фундаментальной. Пока диаметр оптоволокна значительно превышает длину плоской волны той же частоты в вакууме ($d > \lambda$) фундаментальная мода сконцентрирована главным образом в пределах цилиндра и ее размер уменьшается с уменьшением диаметра. Однако это перестает работать когда диаметр оптоволокна становится порядка длины волны $d \sim \lambda$. Дальнейшее уменьшение диаметра оповолокна ведет к экспоненциально большому выпадению моды в окружающее пространство при $d < \lambda$. Таким образом уменьшение поперечных размеров диэлектрического волновода не приводит к субволновой локализации сигнала. Для металлической проволоки ситуация принципиально иная. При уменьшении диаметра проволоки одновременно масштабируется и размер ее фундаментальной моды. В итоге, взяв проволоку диаметром меньше чем

длина волны поверхностного плазмона-поляритона на плоской границе металл-вакуум ($d < \lambda_{SPP}$), можно получить моду, которая сконцентрирована на субволновом масштабе.

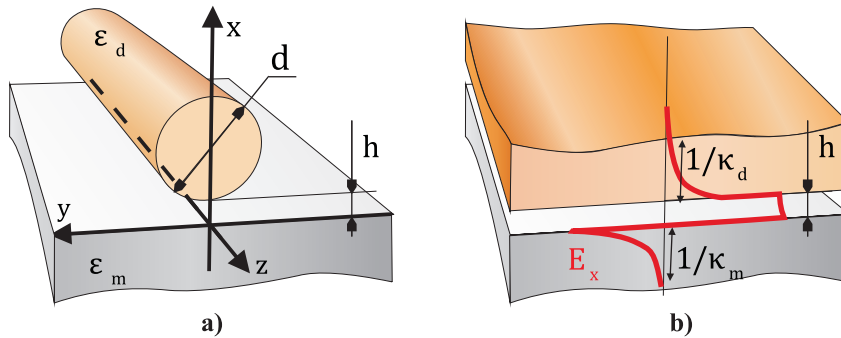


Рис. 2: а) Гибридный волновод; б) Плоский волновод с такой же шириной зазора.

Металлическая проволока это только один возможный пример структуры, подходящей для преодоления дифракционного предела. Существует большое число реализаций плазмонных волноводов. Такие как тонкие металлические пленки, цилиндрические полости в металле, цепочки металлических гранул. Общей для всех плазмонных волноводов проблемой являются большие потери, за счет диссипации энергии в металле. Причем чем сильнее локализация сигнала, тем эти потери выше. В конечном счете хотелось бы добиться некоторого компромисса, то есть создать волновод (достаточно простой с точки зрения производства), в котором сигналы сильно локализованы на субволновом масштабе и не испытывают при этом слишком большого затухания. Попытки решения этой проблемы обратили внимание исследований на распространение плазмонных мод в структурах вида conductor-gap-dielectric. Простейший пример представляет собой систему из двух плоских слоев, диэлектрического с большой проницаемостью и металлического, разделенных нанослоем прозрачного диэлектрика. Теоретический анализ этих систем достаточно прост и полученные результаты указывают на наличие связанной плазмонной ТМ моды, которая локализована в одном измерении в направлении перпендикулярном поверхностям раздела [5]- [7]. При этом электрическое поле, будучи нормальным направлению распространения сигнала, усилено в области зазора вследствие большого контраста диэлектрических проницаемостей выбранных материалов. С точки зрения практического применения наибольший интерес представляет собой локализация передачи волноводного сигнала на субволновом масштабе в двух измерениях. Поэтому логично рассмотреть возможность достижения указанного эффекта в структурах conductor-gap-dielectric двумерного типа, поперечный размер зазора в которых имеет конечное значение также и в направлении параллельном границам материалов. При этом возможны различные конкретные геометрические конфигурации, общей отличительной чертой которых является идея локализации плазмонной моды в пределах прозрачного нанозазора между металлом и диэлектриком с высокой диэлектрической проницаемостью. Указанный зазор при этом не бесконечный, как в случае плоских систем, а обладает определенными конечными наномасштабными размерами в двух измерениях. Примером является структура, состоящая из диэлектрического волновода, помещенного вблизи поверхности полубесконечного металла. Конкретная форма диэлектрического волновода при этом неважна и может быть выбрана из соображений удобства практической реализации. Наиболее естественным однако представляется случай диэлектрического волокна или прямоугольного волновода. Описанная структура получила название гибридный плазмонный волновод, поскольку представляет собой гибрид плазмонного волновода (плоская граница металл -диэлектрик) и диэлектрического (файбер). Наличие металла обеспечивает распространение сильно локализованной плазмонной моды, которая при этом не будет испытывать больших оптических

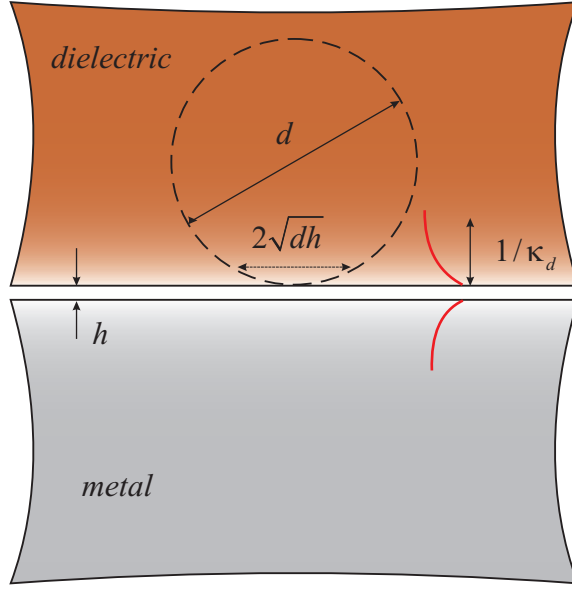


Рис. 3: В случае $h \ll d$ ширина плоской части зазора между цилиндром и металлом может быть оценена как $2\sqrt{dh}$. Если эта ширина значительно больше глубины проникновения $1/k\sqrt{n_{\text{eff}}^2 - \varepsilon_d}$ электромагнитного поля связанной моды в диэлектрический слой плоского волновода с тем же значением h , то поле гибридной моды экспоненциально убывает вглубь цилиндра.

потерь поскольку основная доля передаваемой энергии сосредоточена в немаetalлической области зазора.

Результаты численного моделирования, выполненного в работе [3], показали, что чем меньше ширина зазора тем сильнее локализация гибридной моды. В случае когда диаметр цилиндра много больше ширины зазора, мода оказывается локализованной главным образом в области где форма зазора может считаться приближенно плоской, как для трехслойной системы, изображенной на рис. 2(b). Предел плоской волноводной структуры металл-вакуум-диэлектрик рассмотрен в работе [5], где исследованы свойства фундаментальной связанной CGD-моды. Одних из важнейших преимуществ связанной CGD-моды является тот факт, что ее эффективный индекс превосходит показатель преломления диэлектрика $\sqrt{\varepsilon_d}$, $n_{\text{CGD}} > \sqrt{\varepsilon_d}$. Это означает, что электромагнитное поле экспоненциально затухает вглубь верхнего диэлектрического полупространства. Здесь однако стоит отметить, что анализ, выполненный для плоской модели в работе [5], не применим для гибридного волновода с оптимальными параметрами, найденными в [3]. Причина этого состоит в том, что НРР-мода может приближенно рассматриваться как CGD-мода только если диаметр цилиндра достаточно велик. В противном случае гибридная мода является результатом гибридизации мод оптоволоконна и поверхностных плазмонов-поляритонов плоской границы раздела металл-вакуум.

Основной целью данной работы является теоретическое описание гибридного волновода и поиск путей усиления локализации электромагнитного сигнала в нем. Сравнительный анализ публикаций [3, 5] позволяет сделать вывод, что в целях достижения максимальной поперечной локализации гибридной моды, CGD-режим распространения (при котором $n_{\text{eff}} > \sqrt{\varepsilon_d}$) должен быть достигнут при диаметре оптоволоконна много меньшем длины волны в вакууме. Наше исследование CGD-волновода показывает, что локализация его фундаментальной моды может быть значительно усилена за счет специального выбора материалов, при котором абсолютное значение диэлектрической проницаемости металла меньше проницаемости диэлектрика, $|\varepsilon_m| < \varepsilon_d$. В этом случае эффективный индекс n_{CGD} обратно пропорционален ширине зазора, $n_{\text{CGD}} \propto 1/kh$, когда

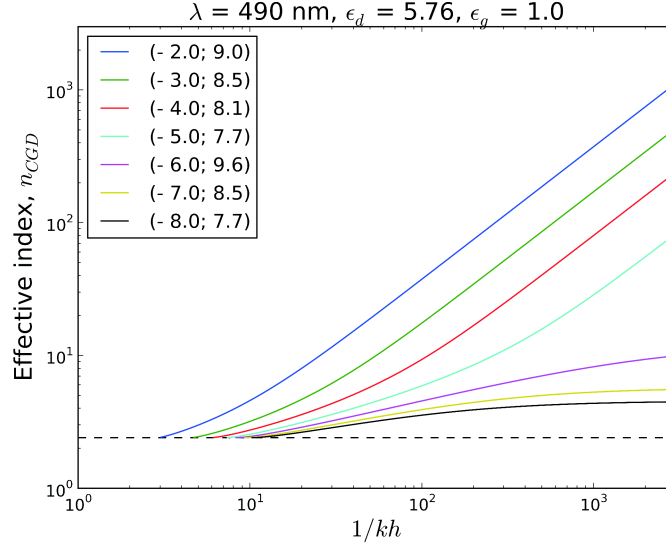


Рис. 4: Эффективный индекс n_{CGD} фундаментальной CGD-моды в зависимости от ширины зазора h для различных значений диэлектрической проницаемости металла и критической ширины $(\epsilon_m; h_c)$. Диэлектрические проницаемости диэлектрика и прослойки равны $\epsilon_d = 5.76$ и $\epsilon_g = 1$ соответственно на длине волны $\lambda = 490\text{nm}$.

h достаточно мало. Чтобы использовать это свойство для гибридного волновода диаметр цилиндра должен превышать некоторое критическое значение d^* , определяемое из условия равенства размера зазора в направлении вдоль металла и глубины проникновения электромагнитного поля в диэлектрик $1/k\sqrt{n_{\text{eff}}^2 - \epsilon_d}$. Размер плоской части зазора может быть оценен как $2\sqrt{hd}$ (рисунок 3) и, таким образом, указанное условие имеет вид $2\sqrt{hd^*} \approx 1/k\sqrt{n_{\text{eff}}^2 - \epsilon_d}$. Когда d достаточно превосходит d^* гибридная мода по структуре аналогична моде трехслойного CGD-волновода.

В целях обоснования объявленных выше результатов остановимся более подробно на свойствах плоского трехслойного волновода. Волновой вектор фундаментальной CGD-моды (которая является ТМ-волной) может быть вычислен из следующего уравнения [5]

$$\exp[2h\kappa_g] = \frac{(\epsilon_d\kappa_g - \epsilon_g\kappa_d)(\epsilon_m\kappa_g - \epsilon_g\kappa_m)}{(\epsilon_d\kappa_g + \epsilon_g\kappa_d)(\epsilon_m\kappa_g + \epsilon_g\kappa_m)}, \quad (1)$$

где $\kappa_i = k\sqrt{n_{\text{CGD}}^2 - \epsilon_i}$ для каждого материала, $i = m, g, d$ и n_{CGD} - эффективный индекс моды. Отметим, что величины $1/\kappa_d$ и $1/\kappa_m$ представляют собой глубины проникновения поля вглубь диэлектрика и металла соответственно. Известно что трехслойный плоский волновод поддерживает распространение связанной собственной моды только если ширина промежуточного прозрачного слоя меньше некоторого критического значения h_c , определяемого диэлектрическими проницаемостями материалов на выбранной частоте.

$$h_c = \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{\epsilon_d - \epsilon_g}} \log \frac{\epsilon_m\sqrt{\epsilon_d - \epsilon_g} - \epsilon_g\sqrt{\epsilon_d - \epsilon_m}}{\epsilon_m\sqrt{\epsilon_d - \epsilon_g} + \epsilon_g\sqrt{\epsilon_d - \epsilon_m}}. \quad (2)$$

Когда толщина прослойки превышает это критическое значение фундаментальная CGD-мода становится излучающей: возникает утечка электромагнитной энергии в область диэлектрического полупространства.

Имеет место существенная разница между зависимостью эффективного индекса n_{CGD} от ширины зазора h в случаях малой и большой проницаемости диэлектрика,

см. рис. 4. Для относительно низкого показателя преломления диэлектрика $\varepsilon_d < |\varepsilon_m|$ существует плазмон-поляритонная мода в отсутствии зазора, $h = 0$. Ее эффективный индекс равен $n_{\text{md}} = \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_d / (\varepsilon_d + \varepsilon_m)}$. При этом эффективный индекс фундаментальной CGD-моды оказывается ограничен, $\sqrt{\varepsilon_d} < n_{\text{CGD}} < n_{\text{md}}$. Именно данный случай исследовался в работах [5] и [3]. В противоположной ситуации относительно большей проницаемости диэлектрика

$$\varepsilon_d > |\varepsilon_m| > \varepsilon_g, \quad (3)$$

эффективный индекс n_{CGD} неограниченно возрастает при уменьшении ширины зазора. В пределе $h \ll \lambda / \sqrt{\varepsilon_d}$ имеем

$$n_{\text{CGD}} \approx \frac{1}{2kh} \ln \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_g)(\varepsilon_m - \varepsilon_g)}{(\varepsilon_d + \varepsilon_g)(\varepsilon_m + \varepsilon_g)}. \quad (4)$$

Это ведет к очень сильной локализации электромагнитного поля CGD-моды в прозрачной прослойке между диэлектриком и металлом. На практике максимальная достижимая степень локализации ограничивается только такими факторами как возрастающие омические потери моды, пространственная дисперсия и атомарная структура вещества. Отметим что схожими свойствами обладают плазмонные моды в структурах типа металл-вакуум-металл [11, 12]. Резонансный характер зависимости эффективного индекса CGD-моды от ширины зазора является ключевой идеей в нашем конструктивном предложении: на практике необходимо выбрать металл с модулем проницаемости меньшим чем проницаемость оптоволокна и поместить последнее на расстоянии $h < h_c$ от металлической плоскости. При таком выборе материалов эффективный индекс гибридной моды может быть значительно больше показателя преломления диэлектрика даже для оптоволокна субволнового диаметра. Заметим также, что для вычисления групповой скорости CGD-моды с помощью формулы (1) необходимо знать частотную зависимость диэлектрических проницаемостей ε_m и ε_d . При этом в пределе узкого зазора $h \ll h_c$ работает закон $v_g/c \propto h/\lambda$. Таким образом, неограниченное увеличение эффективного индекса CGD-моды при уменьшении ширины зазора ведет сильному уменьшению групповой скорости.

Обратной стороной сильной локализации сигнала является его малая длина распространения. Как было показано в работе [3] с усилением степени локализации поля длина распространения гибридной моды неизменно падает. Эта черта является общей для всех волноводов, использующих металл в качестве конструктивной составляющей. В случае $\varepsilon_g \ll |\varepsilon_m|$ можно показать

$$n_{\text{CGD}} \approx \frac{1}{kh|\varepsilon_m|} \left(1 - \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_d} + i \frac{\varepsilon_m''}{|\varepsilon_m|} \right), \quad (5)$$

где ε_m'' - мнимая часть диэлектрической проницаемости металла. Из формулы (5) следует, что масштаб локализации моды имеет порядок $h|\varepsilon_m|$ в пределе $h \ll h_c$. Значит предложенный нами выбор материалов позволяет локализовать моду произвольной частоты на любом субволновом масштабе за счет настройки ширины зазора в соответствии с формулой (4). Таким образом, наш дизайн волновода свободен от недостатка, свойственного многим плазмонным волноводам: непосредственной зависимости степени локализации от частоты. Данный факт может оказаться особенно полезным в проблеме субволновой локализации сигналов терагерцового диапазона [13, 14]. Как видно из формулы (5) длина распространения $\ell \sim h|\varepsilon_m|/|tg|$ падает с уменьшением масштаба локализации. Чтобы поддерживать длину распространения в пределах допустимых с практической точки зрения значений необходимо использовать металлы с низким тангенсом потерь tg . В этой связи необходимо произвести анализ возможных плазмонных материалов, подобный выполненному в работе [15], подходящих для реализации предложенного нами случая (3).

3 Полуаналитический метод. Анализ результатов

В данном разделе мы рассмотрим полуаналитический подход к решению задачи о распространении НРР-мод и представим численные результаты. Рассмотрим круговой диэлектрический цилиндр диаметра d и проницаемости ε_d , помещенный над металлическим экраном проницаемости ε_m . В общем случае цилиндр может быть помещен не в вакуум, а некоторую диэлектрическую среду проницаемости ε_g . Ширина зазора между цилиндром и металлом равна h . Декартову систему координат выберем указанным на рис. 2(a) способом: ось z совпадает с осью цилиндра, а ось x направлена нормально к металлическому экрану. Мы будем рассматривать плазмон-поляритонную моду с частотой ω и постоянной распространения β , распространяющуюся вдоль направления z . В этом случае все компоненты электромагнитного поля зависят от времени и координаты z как $\exp[i\beta z - i\omega t]$. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в диэлектрике:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7)$$

Магнитную проницаемость всех сред будем считать равной единице. Поскольку $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и для монохроматической волны $\partial_t \vec{H} = -i\omega \vec{H}$, $\partial_t \vec{E} = -i\omega \vec{E}$, то

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \quad (8)$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\varepsilon \frac{i\omega}{c} \vec{E}. \quad (9)$$

Компоненты x и y уравнений и дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y &= \frac{i\omega}{c} H_x, \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} + i\beta E_x &= \frac{i\omega}{c} H_y, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y &= -\varepsilon \frac{i\omega}{c} E_x, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} - i\beta H_x &= \varepsilon \frac{i\omega}{c} E_y, \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i\beta}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= \frac{i\beta}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -\varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i\beta}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\beta}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \end{aligned}$$

где $\chi^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$.

То есть все поперечные составляющие электромагнитного поля могут быть выражены через продольные компоненты E_z и H_z , которые удовлетворяют двумерному дифференциальному уравнению Гельмгольца [16].

$$\Delta^\perp \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} - (\beta^2 - \varepsilon k^2) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (10)$$

где $\Delta^\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$ и $k = \omega/c$ - волновой вектор плоской волны той же частоты в вакууме. Необходимо построить решение этих уравнений и поставить граничные условия на

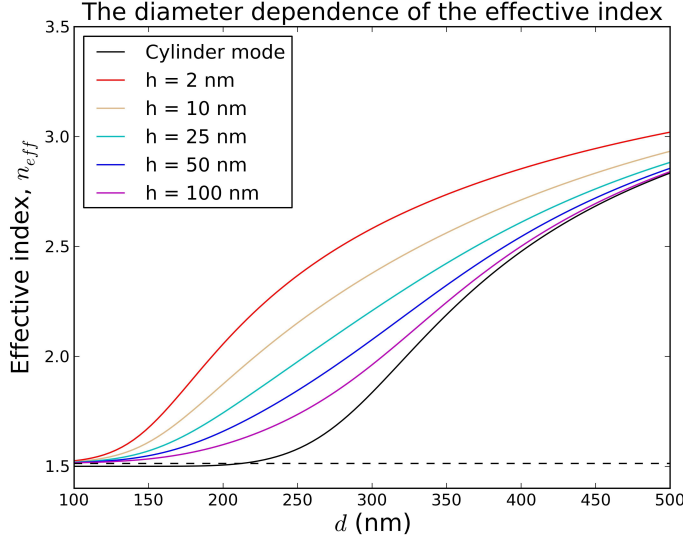


Рис. 5: Эффективный индекс фундаментальной гибридной моды в зависимости от диаметра оптоволокна (цветные линии) в сравнении с эффективными индексами отдельного оптоволокна (черная сплошная линия) и поверхностного плазмона-поляритона (черная пунктирная линия). Диэлектрические проницаемости цилиндра, внешнего диэлектрика и металла равны $\epsilon_d = 12.25$, $\epsilon_g = 2.25$ и $\epsilon_m = -129 + 3.3i$ на длине волны $\lambda = 1.55 \mu m$. Данные параметры выбраны в соответствии с публикацией [3]. Критическая ширина зазора $h_c = 5 nm$. Диаметр HPP-to-CGD перехода равен $d^* \approx 17 \mu m$ для $h = 2 nm$.

поверхностях раздела различных материалов. Однако сложная геометрия гибридного волновода не позволяет получить аналитические выражения для его собственных мод в явном виде.

Заметим что структура гибридного волновода представляет собой комбинацию оптоволокна и плоской границы металл-вакуум. Исходя из этого полезно представить электромагнитное поле HPP-моды как линейную комбинацию связанных мод оптоволокна и плоских затухающих мод металлического экрана. Постановка граничных условий на компоненты электрического и магнитного полей дает систему уравнений на неизвестные амплитуды в этом разложении. Такой подход лежит в основе очень эффективного численного метода решения задач распространения и рассеяния волн в системах со сложной геометрией [17, 18]. Детали вычислений приведены в приложении А.

Чтобы проверить нашу численную схему мы приводим на рисунке 5 зависимость эффективного индекса фундаментальной гибридной моды от диаметра цилиндра d для различных значений ширины зазора h на телекоммуникационной частоте. При этом выполняется $\epsilon_g < \epsilon_d < |\epsilon_m|$. Данные дисперсионные кривые получены в рамках нашего полуаналитического метода и находятся в отличном согласии с результатами моделирования, выполненного в работе [3] с помощью коммерческого пакета программ FEMLab(COMSOL).

Далее в соответствии с общими соображениями, изложенными в предыдущем разделе, мы приводим для сравнения две серии дисперсионных зависимостей для фундаментальной гибридной моды. Рисунок 6(a) соответствует случаю оптоволокна с относительно низким показателем преломления $\epsilon_d < |\epsilon_m|$, в то время как рис. 6(b) относится к противоположной ситуации $\epsilon_d > |\epsilon_m|$. Параметры этих двух графиков отличаются только выбором диэлектрической проницаемости металла ϵ_m .

Представленные результаты показывают, что при уменьшении диаметра цилиндра

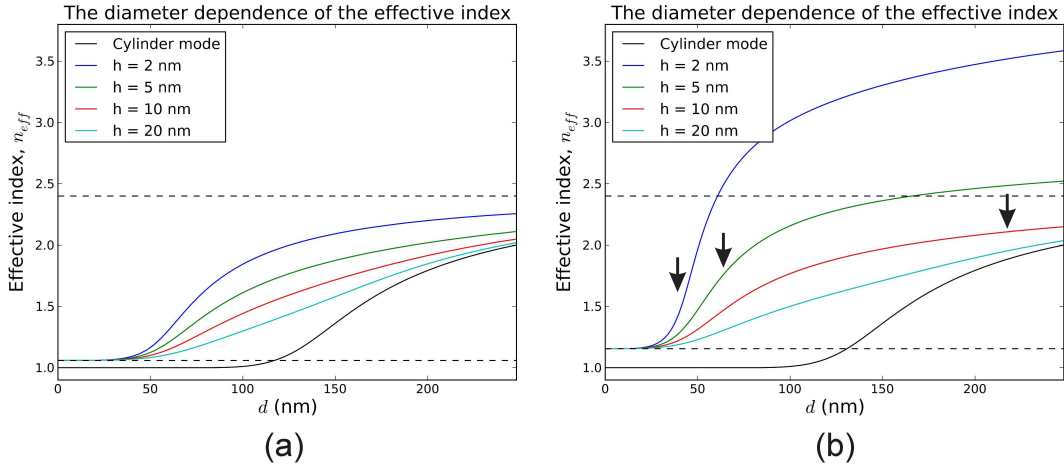


Рис. 6: Эффективный индекс фундаментальной гибридной моды в зависимости от диаметра оптоволокна (цветные линии) в сравнении с эффективными индексами отдельного оптоволокна (черная сплошная линия) и поверхностного плазмона-поляритона (нижняя черная пунктирная линия). Верхняя пунктирная линия соответствует показателю преломления материала оптоволокна. (a) Диэлектрические проницаемости цилиндра, внешнего диэлектрика и металла равны $\epsilon_d = 5.76$, $\epsilon_g = 1$ и $\epsilon_m = -9.2$ на длине волны $\lambda = 0.49 \mu m$. Данные параметры выбраны в соответствии с публикацией [19]. Критическая ширина зазора $h_c = 7 nm$. Диаметры НРР-to-CGD перехода равны $d^* \approx 310 nm$ при $h = 2 nm$, $d^* \approx 875 nm$ при $h = 5 nm$. (b) Диэлектрические проницаемости цилиндра, внешнего диэлектрика и металла равны $\epsilon_d = 5.76$, $\epsilon_g = 1$ и $\epsilon_m = -4$ на длине волны $\lambda = 0.49 \mu m$. Критическая ширина зазора $h_c = 13.4 nm$. Диаметры НРР-to-CGD перехода равны $d^* \approx 40 nm$ при $h = 2 nm$, $d^* \approx 65 nm$ при $h = 5 nm$, $d^* \approx 220 nm$ при $h = 10 nm$.

фундаментальная НРР-мода теряет свою локализацию в направлении вдоль металла и в конечном счете (при $d = 0$) переходит в поверхностный плазмон-поляритон на плоской границе раздела металл-вакуум. При этом эффективный индекс НРР-моды монотонно стремится к соответствующему значению для SPP-моды. Таким образом все дисперсионные кривые имеют одну и ту же асимптотику $n_{eff} \rightarrow n_{mg} = \sqrt{\epsilon_m \epsilon_g / (\epsilon_m + \epsilon_g)}$ в пределе малого диаметра d . Два различных характера поведения дисперсионных кривых возможны в противоположном пределе большого диаметра. При $d \rightarrow \infty$ НРР-мода может асимптотически переходить либо в фундаментальную моду оптоволокна, либо в фундаментальную моду плоской трехслойной системы, в зависимости от ширины зазора h . Если ширина зазора h меньше h_c (уравнение (2)), то НРР-мода стремится к CGD-моду с увеличением диаметра цилиндра. В этом случае переход между small-diameter и large-diameter асимптотиками происходит при характерном значении диаметра d^* (черные стрелки на рис. 6(b)), который можно оценить как

$$d^* \approx \frac{1}{4(n_{CGD}^2 - \epsilon_d) h k^2}. \quad (11)$$

Если $h > h_c$, то связанной CGD-моды просто не существует, и НРР-мода становится фундаментальной модой оптоволокна в пределе больших диаметров. В этом случае критический диаметр d_0 , соответствующий переходу между асимптотиками толстого и тонкого оптоволокна определяется уравнением $n_{SF}(d_0) = n_{mg}$, где $n_{SF}(d)$ - зависимость эффективного индекса фундаментальной моды отдельного оптоволокна от диаметра цилиндра. При условии $\sqrt{\epsilon_d} k d \ll 1$ фундаментальная мода диэлектрического цилиндра локализована экспоненциально слабо, $n_{SF} = \sqrt{\epsilon_g} + \kappa_g^2 / (2\sqrt{\epsilon_g} k^2)$, где

$$\kappa_g^2 / k^2 \approx \frac{16e^{-2\gamma+1}}{(kd)^2} \exp \left\{ -\frac{8(\epsilon_d + \epsilon_g)}{\epsilon_g(\epsilon_d - \epsilon_g)(kd)^2} \right\} \ll 1, \quad (12)$$

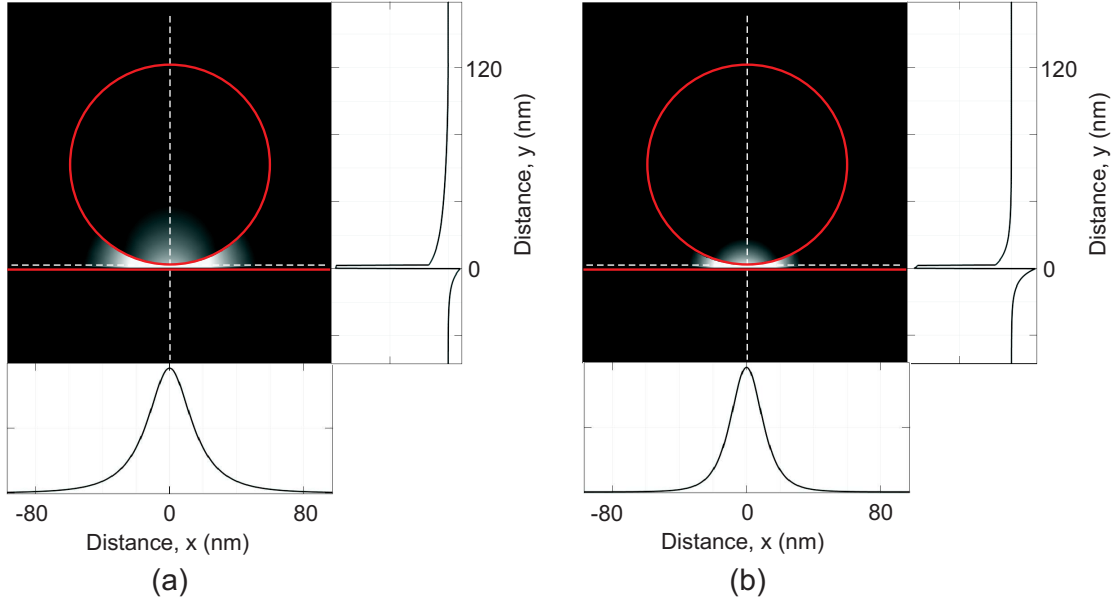


Рис. 7: Пространственное распределение усредненной по времени продольной компоненты вектора Пойнтинга $S_z(x, y)$ фундаментальной гибридной моды. Диаметр цилиндра $d = 120 \text{ nm}$, ширина зазора $h = 2 \text{ nm}$. Диэлектрические проницаемости цилиндра и внешнего диэлектрика равны $\epsilon_d = 5.76$ и $\epsilon_g = 1$ на длине волны $\lambda = 0.49 \mu\text{m}$. Диэлектрическая проницаемость металла (a) $\epsilon_m = -9.2$, (b) $\epsilon_m = -4$.

и $\gamma = 0.5772\dots$ это константа Эйлера.

Предположим теперь, что эффективный индекс n_{CGD} связанной CGD-моды во всем диапазоне ее существования (то есть при $0 < h < h_c$) незначительно превосходит показатель преломления оптоволокна, $\sqrt{\epsilon_d}$. Это справедливо, например, в обычной для плазмоники ситуации когда модуль диэлектрической проницаемости металла значительно больше проницаемости диэлектрика, $|\epsilon_m|/\epsilon_d - 1 \gtrsim 1$. Именно этот случай реализован на рисунках 5 и 6(a). При этом глубина проникновения поля CGD-моды в диэлектрическое полупространство достаточно велика, так же как и характерный диаметр НРР-to-CGD перехода $d^* \gtrsim \lambda$, и поэтому CGD-мода не обеспечивает субволновую локализацию электромагнитной энергии. Следовательно нет никаких преимуществ в CGD-пределе распространения с точки зрения вопроса локализации гибридной моды. При заданной частоте и ширине зазора оптимальный диаметр, обеспечивающий наибольшую локализацию, равен $d = d_0$, что соответствует точке максимальной гибридации в рамках приближенной теории связанных мод [3]. На рисунке 7(a) представлено пространственное распределение усредненного по времени вектора Пойнтинга для оптимального значения диаметра и $h = 2 \text{ nm}$. Отметим, что значительная часть энергии моды распространяется внутри оптоволокна и значит локализация моды достигается во многом благодаря ограниченности диэлектрической части волновода. Если диаметр оптоволокна близок к оптимальному $d = d_0$ и ширина зазора достаточно мала, преимущества гибридной архитектуры используются наиболее полным образом: поперечный размер системы может быть много меньше длины волны, а локализация моды при этом намного выше чем для отдельного оптоволокна или плоской границы металл-вакуум.

Далее предположим, что эффективный индекс CGD-моды значительно больше показателя преломления диэлектрика. Это может быть обеспечено в пределе малой ширины зазора в случае $|\epsilon_m| < \epsilon_d$, которому соответствует рисунок 6(b). Тогда CGD-мода сильно локализована и диаметр НРР-to-CGD перехода $d^* \ll \lambda$ может быть уменьшен до глубокого субволнового масштаба за счет уменьшения ширины зазора. Таким образом CGD-режим распространения гибридной моды достигим при очень малом диаметре

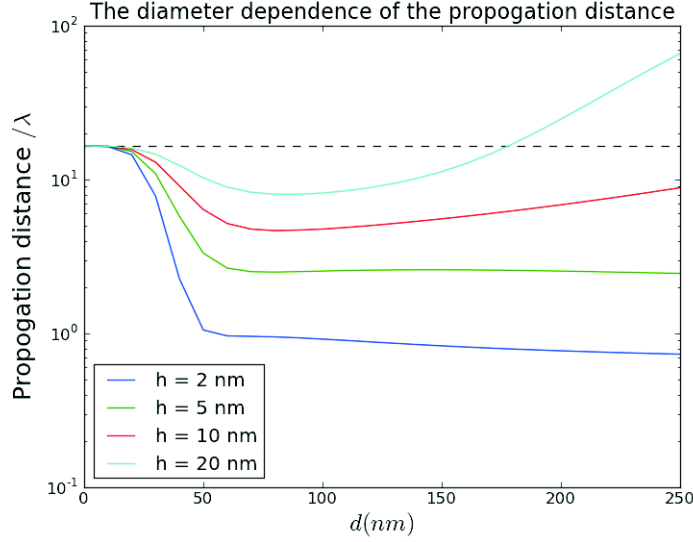


Рис. 8: Длина распространения фундаментальной гибридной моды в зависимости от диаметра цилиндра (цветные кривые) для различных значений ширины зазора в сравнении с длиной распространения поверхностного плазмона-поляритона на плоской границе раздела металл-вакуум (пунктирная линия). Диэлектрические проницаемости цилиндра, внешнего диэлектрика и металла равны $\epsilon_d = 5.76$, $\epsilon_g = 1$ и $\epsilon_m = -4 + 0.1i$ на длине волны $\lambda = 0.49\mu m$.

цилиндра, что обеспечивает желаемую структуру связанной моды с сильной локализацией поля в пределах наноразмерного зазора и экспоненциальным затуханием вглубь оптоволокна. Характер пространственного распределения среднего по времени вектора Пойнтинга моды показан на рисунке 7(b). Отметим, что точная форма верхней части оптоволокна уже не имеет значения для эффекта локализации, поскольку эта область находится от зазора на расстоянии много большем глубины проникновения поля в оптоволокно $1/\kappa_d$.

На рисунке представлены результаты численного счета зависимости длины распространения гибридной моды от диаметра цилиндра, полученные методом конечно-элементного анализа с помощью COMSOL. Как уже было отмечено выше, длина распространения моды сокращается с уменьшением ширины зазора. Объясняется это тем, что увеличивая локализацию моды, мы заставляем все более значительную долю ее энергии распространяться в диссипативной металлической области.

4 Заключение

В данной работе мы предложили и обосновали новую реализацию гибридной архитектуры, обеспечивающую широкие возможности для осуществления контроля над степенью локализации волновой моды. Когда модуль диэлектрической проницаемости металла меньше проницаемости диэлектрика эффективный индекс гибридной моды неограниченно возрастает при уменьшении ширины зазора (уравнение (4)). Большое значение эффективного индекса обеспечивает сильную локализацию электромагнитного поля в двух измерениях в пределах наноразмерной области зазора. Преимущества выбора $|\epsilon_m| < \epsilon_d$ подтверждены качественным анализом в рамках плоской трехслойной модели и численным счетом на основе полуаналитического метода решения задачи распространения гибридных мод в общем случае. Длина распространения гибридной моды падает с увеличением степени локализации, и чтобы достичь достаточно больших значений длины распространения сигнала при заданной субволновой локализации

ции необходимо минимизировать тангенс потерь $tg = |\varepsilon_m''/\varepsilon_m'|$ используемого металла. Необходимо заметить, что на практике одновременное выполнение условий $|\varepsilon_m| < \varepsilon_d$ и $tg \ll 1$ в оптическом и телекоммуникационном частотном диапазонах является трудной задачей. Поэтому может потребоваться применение методов компенсации оптических потерь при использовании гибридного волновода предложенного дизайна в качестве конструктивного элемента наноразмерных оптических систем. Другое важное приложение обсуждаемой реализации гибридной архитектуры находится в области исследований резонансных плазмонов. Условие резонанса поверхностного плазмона-поляритона на границе металл-диэлектрик заключается в тонкой настройке диэлектрических проницаемостей, $-(\varepsilon_m + \varepsilon_d) \ll \varepsilon_d$ [20]. Таким образом для конкретного выбранного металла резонанс имеет место только в узком спектральном диапазоне. В то же время резонансное увеличение эффективного индекса CGD-моды требует выполнения только геометрического условия $h \ll \lambda$. Значит резонанс плазменной моды в трехслойной системе металл-вакуум-диэлектрик и гибридном волноводе может быть достигнут за счет уменьшения ширины зазора на любой частоте пока выполняется неравенство $|\varepsilon_m| < \varepsilon_d$.

Основные результаты работы изложены в следующей публикации

S. Belan, S. Vergeles, and P. Vorobev, "Adjustable subwavelength localization in a hybrid plasmonic waveguide," *Opt. Express* 21, 7427-7438 (2013)

А Приложение: построение фундаментальной собственной моды

Теоретический анализ гибридного волновода затруднителен в силу его сложной геометрии. Для решения задачи распространения гибридных мод в общем случае должна быть выбрана такая система координат, в которой поверхности волновода являются изолиниями, а уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных. Гибридной геометрии соответствуют так называемые биполярные координаты. Однако в них волновое уравнение имеет сложный вид и его решение не может быть найдено в явном виде. Тем не менее неизвестные гибридные функции могут быть выражены в терминах известных точных решений уравнения Гельмгольца в других координатных системах. Оказывается удобным представить полное электромагнитное поле как суперпозицию всех мод отдельного оптоволокна (цилиндрические функции) и всех SPP-мод плоской границы металл-вакуум (плоские затухающие волны) с некоторыми коэффициентами разложения. Последние определяются набором граничных условий.

Выберем Декартову систему координат с осью z , совпадающей с осью цилиндра (рис. 9). Предполагая структуру электрического поля фундаментальной гибридной моды симметричной относительно оси x , мы можем записать

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z^{(d)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^E J_n(\chi_d r) \cos n\varphi \\ E_z^{(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E K_n(\kappa_g r) \cos n\varphi + \\ + \int_0^{\infty} c_q^E \exp(Q\kappa_g(x-D)) \cos q\kappa_g y \, dq \\ E_z^{(m)} = \int_0^{\infty} d_q^E \exp(-Q\kappa_m(x-D)) \cos q\kappa_m y \, dq \end{array} \right. \quad (13)$$

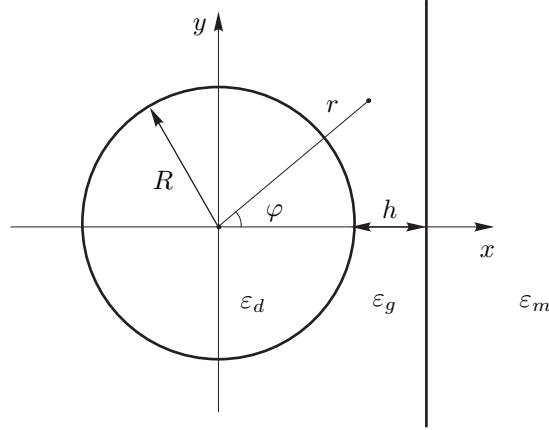


Рис. 9: Система координат.

и для z -компоненты магнитного поля

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z^{(d)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^H J_n(\chi_d r) \sin n\varphi \\ H_z^{(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H K_n(\kappa_g r) \sin n\varphi + \\ + \int_0^{\infty} c_q^H \exp(Q\kappa_g(x - D)) \sin q\kappa_g y \, dq \\ H_z^{(m)} = \int_0^{\infty} d_q^H \exp(-Q\kappa_m(x - D)) \sin q\kappa_m y \, dq \end{array} \right. \quad (14)$$

где $Q = \sqrt{1 + q^2}$ и $D = d/2 + h$.

Далее удобно выразить поле во внешнем диэлектрике в терминах только затухающих плоских волн при постановке граничных условий на границе металла, и в терминах только угловых гармоник при постановке граничных условий на поверхности цилиндра. Это может быть сделано с помощью формул взаимного переразложения модифицированных цилиндрических функций и затухающих плоских волн [21].

$$K_n(\kappa_g r) \cos n\varphi = \int_0^{\infty} F_n^E(q) e^{-Q\kappa_g x} \cos q\kappa_g y \, dq, \quad (15)$$

$$K_n(\kappa_g r) \sin n\varphi = \int_0^{\infty} F_n^H(q) e^{-Q\kappa_g x} \sin q\kappa_g y \, dq, \quad (16)$$

$$e^{Q\kappa_g x} \cos q\kappa_g y = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^E \cos n\varphi, \quad (17)$$

$$e^{Q\kappa_g x} \sin q\kappa_g y = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^H \sin n\varphi, \quad (18)$$

где

$$F_n^E = \frac{(Q + q)^n + (Q - q)^n}{2Q}, \quad (19)$$

$$F_n^H = \frac{(Q + q)^n - (Q - q)^n}{2Q}, \quad (20)$$

$$G_n^E = \frac{2 - \delta_{0n}}{2} ((Q + q)^n + (Q - q)^n) I_n(\kappa_g r), \quad (21)$$

$$G_n^H = ((Q + q)^n - (Q - q)^n) I_n(\kappa_g r). \quad (22)$$

Таким образом, электромагнитное поле во внешнем диэлектрике вблизи цилиндра может быть записано как

$$E_z^{(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E K_n(\kappa_g r) \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} c_q^E G_n^E(r, q) e^{-Q\kappa_g D} dq,$$

$$H_z^{(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H K_n(\kappa_g r) \sin n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\varphi \int_0^{\infty} c_q^H G_n^H(r, q) e^{-Q\kappa_g D} dq.$$

Соответствующие выражения для поля вблизи поверхности металла

$$E_z^{(g)} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q) e^{-Q\kappa_g x} \cos q\kappa_g y dq + \\ + \int_0^{\infty} c_q^E e^{Q\kappa_g(x-D)} \cos q\kappa_g y dq,$$

$$H_z^{(g)} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q) e^{-Q\kappa_g x} \sin q\kappa_g y dq + \\ + \int_0^{\infty} c_q^H e^{Q\kappa_g(x-D)} \sin q\kappa_g y dq.$$

Условия непрерывности компонент E_z , B_z , εE_x и εB_x на границе металла ведет к системе линейных однородных алгебраических уравнений на коэффициенты b_n^E , b_n^H , c_q^E , c_q^H , d_p^E , d_p^H .

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_q^E + \tilde{d}_p^E = e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q), \\ -c_q^H + \tilde{d}_p^H = e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q), \\ -\frac{\beta q}{\kappa_g} \cdot c_q^E - \frac{k\sqrt{1+q^2}}{\kappa_g} \cdot c_q^H + \frac{\beta\kappa_g q}{\kappa_m^2} \cdot \tilde{d}_p^E - \frac{k\sqrt{1+p^2}}{\kappa_m} \cdot \tilde{d}_p^H = \\ = \frac{\beta q}{\kappa_g} e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n(q) - \frac{k\sqrt{1+q^2}}{\kappa_g} e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n(q), \\ \frac{\varepsilon_g k\sqrt{1+q^2}}{\kappa_g} \cdot c_q^E + \frac{\beta q}{\kappa_g} \cdot c_q^H + \frac{\varepsilon_m k\sqrt{1+p^2}}{\kappa_m} \cdot \tilde{d}_p^E - \frac{\beta\kappa_g q}{\kappa_m^2} \cdot \tilde{d}_p^H = \\ = \frac{\varepsilon_g k\sqrt{1+q^2}}{\kappa_g} e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n(q) - \frac{\beta q}{\kappa_g} e^{-\gamma_g} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n(q). \end{array} \right.$$

где $\gamma_g = \sqrt{1+q^2}\kappa_g D$, $\tilde{d}_p = \frac{\kappa_g}{\kappa_m} d_p$ и $p = \frac{\kappa_g}{\kappa_m} q$. Заметим, что эта система может рассматриваться как система неоднородных уравнений на функции $c_q^E, c_q^H, d_p^E, d_p^H$.

Соответствующие условия непрерывности для $E_z, B_z, \varepsilon E_r$ и εB_r на цилиндрической поверхности дают вторую систему линейных однородных уравнений на амплитуды $a_n^E, a_n^H, b_n^E, b_n^H, c_q^E, c_q^H$, причем функции c_q^E и c_q^H входят в нее в интегральном виде.

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n(\chi_d R) \cdot a_n^E - K_n(\kappa_g R) \cdot b_n^E - \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^E G_n^E(R, q) dq = 0, \\ J_n(\chi_d R) \cdot a_n^H - K_n(\kappa_g R) \cdot b_n^H - \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^H G_n^H(R, q) dq = 0, \\ -\frac{n\beta}{\chi_d^2 R} J_n(\chi_d R) \cdot a_n^E - \frac{k}{\chi_d} J_n'(\chi_d R) \cdot a_n^H - \frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} K_n(\kappa_g R) \cdot b_n^E - \frac{k}{\kappa_g} K_n'(\kappa_g R) \cdot b_n^H - \\ -\frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^E G_n^E(R, q) dq - \frac{k}{\kappa_g} \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^H G_n^H(R, q) dq = 0, \\ \frac{\varepsilon_d k}{\chi_d} J_n'(\chi_d R) \cdot a_n^E + \frac{n\beta}{\chi_d^2 R} J_n(\chi_d R) \cdot a_n^H + \frac{\varepsilon_g k}{\kappa_g} K_n'(\kappa_g R) \cdot b_n^E + \frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} K_n(\kappa_g R) \cdot b_n^H + \\ + \frac{\varepsilon_g k}{\kappa_g^2} \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^E G_n^E(R, q) dq + \frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} \int_0^\infty e^{-\gamma_g} c_q^H G_n^H(R, q) dq = 0. \end{array} \right.$$

где $\chi^2 = \varepsilon k^2 - \beta^2$

Чтобы исключить интегрирование неизвестных функций мы выражаем коэффициенты c_q^E, c_q^H через b_n^E, b_n^H из первой системы уравнений

$$\begin{aligned} c_q^E &= \frac{2k\beta q \sqrt{1+q^2} (\varepsilon_g - \varepsilon_m) e^{-\gamma_g}}{-\varepsilon_m \kappa_g^2 - \varepsilon_g \kappa_m^2 - q^2 \kappa_g^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) - \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q) + \\ &+ \frac{(\kappa_g \kappa_m \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2} + \beta^2 + q^2 (\beta^2 + \varepsilon_g k^2)) (\varepsilon_m - \varepsilon_g) e^{-\gamma_g}}{-\varepsilon_m \kappa_g^2 - \varepsilon_g \kappa_m^2 - q^2 \kappa_g^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) - \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q) = \\ &= A^E(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q) + B^E(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_q^H &= \frac{2k\beta q \sqrt{1+q^2} \varepsilon_g (\varepsilon_g - \varepsilon_m) e^{-\gamma_g}}{-\varepsilon_m \kappa_g^2 - \varepsilon_g \kappa_m^2 - q^2 \kappa_g^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) - \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q) + \\ &+ \frac{(\beta^2 + q^2 (\beta^2 + \varepsilon_g k^2) - \kappa_g \kappa_m \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2}) (\varepsilon_m - \varepsilon_g) e^{-\gamma_g}}{-\varepsilon_m \kappa_g^2 - \varepsilon_g \kappa_m^2 - q^2 \kappa_g^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) - \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_m^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q) = \\ &= C^E(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E(q) + D^E(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H(q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_q^E &= \frac{2k\beta q \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2} (\varepsilon_m - \varepsilon_g) e^{-\tilde{\gamma}_g}}{\varepsilon_m \kappa_g^2 + \varepsilon_g \kappa_m^2 + q^2 \kappa_m^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) + \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q\right) + \\ &+ \frac{2\varepsilon_g \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g} (\kappa_g \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2} + \kappa_m (1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2)) e^{-\tilde{\gamma}_g}}{\varepsilon_m \kappa_g^2 + \varepsilon_g \kappa_m^2 + q^2 \kappa_m^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) + \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1+q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q\right) = \\ &= A^H(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q\right) + B^H(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E\left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_q^H &= \frac{2\varepsilon_g k \beta q \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2} (\varepsilon_m - \varepsilon_g) e^{-\tilde{\gamma}_g}}{\varepsilon_m \kappa_g^2 + \varepsilon_g \kappa_m^2 + q^2 \kappa_m^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) + \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1 + q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q \right) + \\
&+ \frac{2 \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} (\varepsilon_m \kappa_g \sqrt{1 + q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2} + \varepsilon_g \kappa_m (1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2)) e^{-\tilde{\gamma}_g}}{\varepsilon_m \kappa_g^2 + \varepsilon_g \kappa_m^2 + q^2 \kappa_m^2 (\varepsilon_g + \varepsilon_m) + \kappa_g \kappa_m (\varepsilon_g + \varepsilon_m) \sqrt{1 + q^2} \sqrt{1 + \frac{\kappa_m^2}{\kappa_g^2} q^2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q \right) = \\
&= C^H(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^E F_n^E \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q \right) + D^H(q) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^H F_n^H \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_g} q \right),
\end{aligned}$$

Далее эти выражения мы подставляем в систему уравнений для граничных условий на поверхности цилиндра. Эта процедура ведет к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений на $a_n^E, a_n^H, b_n^E, b_n^H$.

$$\left\{ \begin{aligned}
&J_n(\chi_d R) \cdot a_n^E - \sum_{m=0}^{\infty} b_m^E \cdot (\delta_{mn} K_n(\kappa_g R) + \\
&+ \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} B(q) F_m^E(q) G_n^E(R, q) dq) - \\
&- \sum_{m=0}^{\infty} b_m^H \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} A(q) F_m^H(q) G_n^E(R, q) dq = 0, \\
&J_n(\chi_d R) \cdot a_n^H - \sum_{m=0}^{\infty} b_m^E \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} C(q) F_m^E(q) G_n^H(R, q) dq - \\
&\sum_{m=0}^{\infty} b_m^H \cdot (\delta_{mn} K_n(\kappa_g R) + \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} D(q) F_m^H(q) G_n^H(R, q) dq) = 0, \\
&-\frac{n\beta}{\chi_d^2 R} J_n(\chi_d R) \cdot a_n^E - \frac{k}{\chi_d} J_n'(\chi_d R) \cdot a_n^H - \\
&-\sum_{m=0}^{\infty} b_m^E \cdot \\
&\cdot \left(\frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} K_n(\kappa_g R) \delta_{mn} + \frac{n\beta}{\kappa_g^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} B(q) G_n^E(R, q) F_m^E(q) dq + \frac{k}{\kappa_g} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} C(q) G_n^H'(R, q) F_m^E(q) dq \right) - \\
&-\sum_{m=0}^{\infty} b_m^H \cdot \\
&\cdot \left(\frac{k}{\kappa_g} K_n'(\kappa_g R) \delta_{mn} + \frac{nk}{\kappa_g^2 R} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} A(q) G_n^E(R, q) F_m^H(q) dq + \frac{k}{\kappa_g} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} D(q) G_n^H'(R, q) F_m^H(q) dq \right) = 0, \\
&\frac{\varepsilon_d k}{\chi_d} J_n'(\chi_d R) \cdot a_n^E + \frac{n\beta}{\chi_d^2 R} J_n(\chi_d R) \cdot a_n^H + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} b_m^E \cdot \\
&\cdot \left(\frac{\varepsilon_g k}{\kappa_g} K_n'(\kappa_g R) \delta_{mn} + \frac{\varepsilon_g k}{\kappa_g^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} B(q) G_n^E'(R, q) F_m^E(q) dq + \frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} C(q) G_n^H(R, q) F_m^E(q) dq \right) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} b_m^H \cdot \\
&\cdot \left(\frac{n\beta}{\kappa_g^2 R} K_n(\kappa_g R) \delta_{mn} + \frac{\varepsilon_g k}{\kappa_g} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} A(q) G_n^E'(R, q) F_m^H(q) dq + \frac{n\beta}{\kappa_g^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_g} D(q) G_n^H(R, q) F_m^H(q) dq \right) = 0.
\end{aligned} \right.$$

Далее полученная бесконечная система должна быть обрезана на некотором числе гармоник, которое определяется из соображений достаточной сходимости последующих численных результатов. Условием существования нетривиального решения системы является равенство нулю детерминанта ее характеристической матрицы. При заданной геометрии, частоте и диэлектрических проницаемостях это дает уравнение на волновой вектор β гибридной моды.

Список литературы

- [1] Born M., Wolf E., *Principles of Optics* (Cambridge Univ. Press, 1999.)
- [2] Gramotnev D. K. and Bozhevolnyi S. I. "Plasmonics beyond the diffraction limit," *Nat. Phot.* **4**, 83–91 (2010)
- [3] Oulton R. F., Sorger V. J., Genov D. A., Pile D. F. P. and Zhang X., "Hybrid plasmonic waveguide for subwavelength confinement and long-range propagation," *Nat. Phot.* **2**, 496 (2008)

- [4] Sorger V.J., Ziliang Y, Oulton R.F., Bartal Y.W.G., Yin X. and Zhang X., “Experimental demonstration of low-loss optical waveguiding at deep sub-wavelength scales,” *Nat. Comm.* **2**, 331 (2011)
- [5] Avrutsky I, Soref R. and Buchwald W., “Sub-wavelength plasmonic modes in a conductor-gap-dielectric system with a nanoscale gap,” *Opt. Express* **18**, 348–363 (2010)
- [6] Xiao-Yang Zhang, Hu A., Wen J.Z., Zhang T., Xiao-Jun Xue, Zhou Y. and Duley W. W., “Numerical analysis of deep sub-wavelength integrated plasmonic devices based on Semiconductor-Insulator-Metal strip waveguides,” *Optics Express* (2010)
- [7] Krasavin A. V. and Zayats A. V., “Silicon-based plasmonic waveguides,” *Optics Express* (2010)
- [8] Borghi R., Gori F., Santarsiero M., Frezza F. and Schettini G., “Plane-wave scattering by a perfectly conducting circular cylinder near a plane surface: cylindrical-wave approach,” *J. Opt. Soc. Am. A.* **13**, (1996)
- [9] Borghi R., Santarsiero M., Frezza F. and Schettini G., “Plane-wave scattering by a dielectric circular cylinder parallel to a general reflecting flat surface,” *J. Opt. Soc. Am. A.* **14**, (1997)
- [10] Sun G., Khurgin J., and Bratkovsky A., “Coupled-mode theory of field enhancement in complex metal nanostructures,” *Phys. Rev. B* **84** 1-10 (2011)
- [11] Takahara J., Yamagishi S., Taki H., Morimoto A. and Kobayashi T., “Guiding of a one-dimensional optical beam with nanometer diameter,” *Opt. Lett.* **82**, 11581160 (1997)
- [12] I. Avrutsky, I. Salakhutdinov, J. Elser, and V. Podolskiy, “Highly confined optical modes in nanoscale metaldielectric multilayers,” *Phys. Rev. B* **75**, 241402 (2007)
- [13] Ishikawa A., Zhang S., Genov D. A., Bartal G. and Zhang X., “Deep Subwavelength Terahertz Waveguides Using Gap Magnetic Plasmon”, *Phys. Rev. Let.* **102**, 043904 (2009)
- [14] Nam S. H., Taylor A. J. and Efimov A., “Subwavelength hybrid terahertz waveguides,” *Opt. Express.* **17**, 22890 (2009)
- [15] West P. R., Ishii S., Naik G. V., Emani N. K., Shalaev V.M. and Boltasseva A., “Searching for better plasmonic materials,” *Laser Photonics Rev.* **4**, (2010)
- [16] Marcuse D., *Light Transmission Optics* (New York: Van Nostrand Reinhold, 1972)
- [17] Bulushev A. G., Dianov E. M. and Okhotnikov O. G., “Propagation of the radiation in two identical coupled waveguides,” *Sov. J. Quantum Electron.* (1988)
- [18] Zakowicz W., “Two coupled dielectric cylindrical waveguides,” *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, (1997)
- [19] Oulton R.F., Sorger V.J., Zentgraf T., Ren-Min Ma, Gladden C., Dai L., Bartal G. and Zhang X., “Plasmon lasers at deep subwavelength scale,” *Nat.* **461**, 629 (2009)
- [20] I. Avrutsky, “Surface plasmons at nanoscale relief gratings between a metal and a dielectric medium with optical gain,” *Phys. Rev. B* **70**, 155416 (2004)
- [21] Borghi R., Frezza F., Santarsiero M. and Schettini G., “Angular spectrum of modified cylindrical wave-functions,” *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **20**, (1999)