Московский Физико-Технический Институт

Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
на соискание степени магистра физико-математических наук
студента 6 курса
Мухаметжанова Б.С.

Корреляционные числа в двумерной минимальной гравитации Лиувилля и их связь со струнным уравнением Дугласа.

Научный руководитель
Белавин А.А.

Москва 2013

Содержание

1 Введение **2**

2 Минимальная Лиувиллевская гравитация **4**
2.1 Минимальные модели конформной теории поля 4
2.2 Взаимодействие с теорией Лиувилля 4
2.3 Корреляционные числа минимальной гравитации 5

3 Матричные модели **6**
3.1 Струнное уравнение Дугласа 6
3.2 Свободная энергия матричной модели 9

4 Одноматричная модель и $(2, 2s + 1)$ минимальная гравитация **11**
4.1 Обезразмеривание 12
4.2 Одноточечные и двухточечные корреляционные числа 13
4.3 Трехточечные корреляционные числа 13
4.4 Четырехточечные корреляционные числа 15

5 Двухматричная модель и $(3, 3s + \alpha)$ минимальная гравитация **16**
5.1 Резонансные соотношения 17
5.2 Решения струнного уравнения 18
5.3 Анализ размерностей 19
5.4 Одноточечные и двухточечные корреляционные числа 21
5.5 Трехточечные корреляционные числа 22
5.5.1 $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s - 1$, k_i – четно 23
5.5.2 $1 \leq k_1, k_2 \leq s - 1$, $s \leq k_3 \leq p - 2$, k_i – четно 24
5.5.3 $1 \leq k_1 \leq s - 1$, $s \leq k_2, k_3 \leq p - 2$, k_i – четно 24
5.5.4 Сравнение с минимальной гравитцией 25
5.6 Четырехточечные корреляционные числа 25
5.6.1 $1 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq s - 1$ 25
5.6.2 $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s - 1, s \leq k_4 \leq p - 2$, k_i – четно 27
5.6.3 $1 \leq k_1, k_2 \leq s - 1, s \leq k_3, k_4 \leq p - 2$, k_i – четно 27
5.6.4 $1 \leq k_1 \leq s - 1, s \leq k_2, k_3, k_4 \leq p - 2$, k_i – четно 28
5.6.5 $s \leq k_1 k_2, k_3, k_4 \leq p - 2$, k_i – четно 29

6 Заключение **29**

A Доказательство рекурсионной формулы для гамильтонианов $H_{k,\alpha}$ **30**

1 Введение

На сегодняшний день существует два различных подхода к двумерной квантовой гравитации. Первый - непрерывный подход. В этом подходе теория определяется функциональным интегралом по римановым метрикам $g_{\mu\nu}$ с соответствующим фиксированием калибровки. Выбор конформной калибровки приводит к теории Лиувилля, взаимодействующей с некоторой материей [1]. Получающаяся теория называется Лиувиллевской гравитацией. В другом подходе – дискретном – флуктуирующие двумерные поверхности приближаются ансамблем планарных графов. При этом исходная непрерывная теория восстанавливается в скейлинговом пределе, когда основной вклад вносят графы большого размера. Такой подход реализуется в матричных моделях (нульмерная теория поля матриц $N \times N$), а скейлинговый предел отвечает критическим точкам в т'Хоофтовском пределе больших N. Подробности дискретного подхода можно найти например в обзорах [2, 3]. Поскольку оба подхода описывают двумерную флуктуирующую геометрию, то естественно ожидать, что они должны давать одни и те же результаты для физических величин.

Примером физических величин, которые можно было бы сравнивать в обоих подходах, являются так называемые "корреляционные числа" - интегралы от корреляционных функций (так же их можно понимать как струнные амплитуды)

$$Z_{k_1\dots k_n} = \langle O_{k_1}\dots O_{k_n}\rangle, \qquad O_k = \int_M \mathcal{O}_k(x) \tag{1.1}$$

где $\mathcal{O}_k$ – некоторые локальные верщинные операторы на мировой поверхности M, состоящие из вершинных операторов материи и метрики. Удобно пользоваться производящей функцией корреляционных чисел

$$Z(\lambda) = \left\langle \exp\left(\sum_k \lambda_k O_k\right)\right\rangle \tag{1.2}$$

которую можно понимать как статистическую сумму исходной теории, возмущенной операторами $\mathcal{O}_k$ с константами взаимодействия λ_k.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда мировая поверхность M обладает топологией сферы.

Тонкость, которая делает сравнение корреляционных чисел, посчитанных в разных подходах, нетривиальным, заключается в следующем. При вычислении корреляционных чисел (1.1) интеграл

$$\int \langle \mathcal{O}_{k_1}(x_1)\dots\mathcal{O}_{k_n}(x_n)\rangle d^2x_1\dots d^2x_n \tag{1.3}$$

берется по всевозможным $x_1,\dots,x_n$, принадлежашим пространству M. В частности имеются вклады от контактных членов дельта функционного вида, возникающих при совпадении двух или более точек x_i. При этом такого вида члены никак не фиксируются конформной теорией поля. Другими словами, из за таких контактных членов n-точечные корреляционные числа могут получать добавки в виде k-точечных корреляционных чисел при $k < n$. Например двухточечные корреляционные числа могут получать добавку от одноточечных корреляционных чисел

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle \to \langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle + \sum_k A_k^{k_1 k_2} \langle O_k \rangle. \tag{1.4}$$

Добавление таких членов эквивалентно замене в (1.2)

$$\lambda_k \to \lambda_k + \sum_{k_1, k_2} A_k^{k_1 k_1} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} + \dots \tag{1.5}$$

Поиск точного вида таких соотношений, позволяющих отождествить дискретный и непрерывный подходы, будет одной из наших главных задач. В минимальной гравитации поля O_k будут выбраны так, что они будут обладать определенной массовой размерностью

$$O_k \sim \mu^{\delta_k}, \qquad \lambda_k \sim \mu^{-\delta_k} \tag{1.6}$$

где $\mu \sim mass^2$ – космологическая постоянная, которая будет введена в дальнейшем. Поэтому на соотношения (1.5) накладывается "условие резонанса", требующее чтобы размерности всех слагаемых в (1.5) были одинаковыми

$$\delta_k = \delta_{k_1} + \dots + \delta_{k_n}. \tag{1.7}$$

В дальнейшем мы будем называть уравнения типа (1.5) резонансными соотношениями.

В случае минимальной Лиувиллевской гравитации, которую мы будем рассматривать, как правило имеется много резонансов (1.7). Поэтому резонансные соотношения должы быть некоторым образом зафиксированы. Впервые на эту проблему было обращено внимание в работе [4]. Там же она была частично разрешена в некоторых простейших случаях моделей (q, p) с малыми q и p для случая одноточечных и двухточечных корреляционных чисел.

До недавнего времени одним из главных препятствий для полного отождествления корреляционных чисел и фиксированию резонансных соотношений являлось отсутствие явных результатов в минимальной Лиувиллевской гравитации. Это связано с тем, что для вычисления n-точечных корреляционных чисел необходимо произвести технически сложное интегрирование по $(n-3)$-мерному пространству модулей сферы с n отмеченными точками. Однако ситуация изменилась несколько лет назад, когда в работе [5] была развита техника вычисления таких интегралов с помощью высших уравнений движения теории Лиувилля [6]. Таким образом в этой же работе [5] было получено выражение для четырехточечных корреляционных чисел в минимальной Лиувиллевской гравитации.

В предлагаемой работе мы используем результаты [5] для сравнения с выражениями, получающимися из матричных моделей и найдем резонансные соотношения, которые позволят отождествить корреляционные числа в двух разных подходах.

2 Минимальная Лиувиллевская гравитация

2.1 Минимальные модели конформной теории поля

Минимальные модели конформной теории поля $\mathcal{M}_{q,p}$ [7] нумеруются двумя взаимно простыми числами (q,p) и состоят из конечного числа примарных полей $\Phi_{m,n}$, где $m = 1,\ldots,q-1, n = 1,\ldots,p-1$.

В конкретных примерах мы будем рассматривать минимальные модели $\mathcal{M}_{2,2s+1}$ и $\mathcal{M}_{3,3s+\alpha}$, где $\alpha = 1,2$. В этих моделях в качестве независимых полей можно выбрать поля из первой строки таблицы Каца - $\Phi_{1,k}$. Введем кроме того обозначение

$$\Phi_k = \Phi_{1,k+1}. \tag{2.1}$$

Операторное разложение для таких полей

$$[\Phi_{k_1}][\Phi_{k_2}] = \sum_{k=|k_1-k_2|}^{f(k_1,k_2)} [\Phi_k] \tag{2.2}$$

где, как обычно, $[\Phi_k]$ означает неприводимое представление алгебры Вирассоро со старшим состоянием Φ_k, а сумма идет с шагом 2. Так же было введено обозначение $f(k_1,k_2) = \min(k_1+k_2, 2p-k_1-k_2-4)$.

Конформная симметрия вместе с операторным разложением (2.2) накладывают жесткие ограничения на вид корреляционных функций. В частности, многие из них оказываются равными нулю.

Например малая конфрмная группа сферы накладывает ограничения на одноточечные и двухточечные корреляторы

$$\langle\Phi_k\rangle = 0, \qquad \text{if} \qquad k \neq 0, \tag{2.3}$$
$$\langle\Phi_{k_1}\Phi_{k_2}\rangle = 0, \qquad \text{if} \qquad k_1 \neq k_2. \tag{2.4}$$

Кроме того, операторное разложение (2.2) накладывает ограничение на n-точечные корреляционные функции ($n \geq 3$). В частности на трехточечные корреляторы

$$\langle\Phi_{k_1}\Phi_{k_2}\Phi_{k_3}\rangle = 0, \qquad \text{if} \qquad k_3 > \min(k_1+k_2, 2p-k_1-k_2-4) \tag{2.5}$$

где мы предположили что $k_3 \geq k_1, k_2$.

2.2 Взаимодействие с теорией Лиувилля

В этом разделе мы рассмотрим взаимодействие минимальной модели $\mathcal{M}_{q,p}$, рассмотренной в предыдущем разделе, с теорией Лиувилля. Минимальная модель в этом случае играет роль материи, а получающаяся теория называется минимальной Лиувиллевской гравитацией $\mathcal{MG}_{q,p}$.

Согласно [1], если мы рассмотрим теорию двумерной флуктуирующей метрики $g_{\mu\nu}$, взаимодействующей с некоторой конформной материей, то функциональный интеграл по метрикам в конформной калибровке $g_{\mu\nu} = e^{2b\phi}\hat{g}_{\mu\nu}$ приводит к действию Лиувилля

$$S_L = \frac{1}{4\pi}\int_M \sqrt{\hat{g}}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + Q\hat{R}\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}\right)d^2x \tag{2.6}$$

где $\hat{g}_{\mu\nu}$ – некоторая фиксированная фоновая метрика, μ – космологическая постоянная, а параметры b, Q связаны с центральным зарядом c_M конформной материи условием сокращения конформной аномалии

$$c_M + c_L = 26, \qquad c_L = 1 + 6Q^2, \qquad Q = b + b^{-1}. \tag{2.7}$$

В случае (q,p) минимальной Лиувиллевской гравитации, то есть когда в качестве конформной материи берется (q,p) минимальная модель конформной теории поля [7], имеем $b = \sqrt{\frac{q}{p}}$.

В роли наблюдаемых (1.1) выступают $O_{m,n} = \int_M \mathcal{O}_{m,n}(x)$, являющиеся когомологиями соответствующего БРСТ оператора и строятся как произведение примарного поля из минимальной модели и вершинного оператора теории Лиувилля

$$\mathcal{O}_{m,n} = \Phi_{m,n}(x)e^{2\delta_{m,n}\phi(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x \tag{2.8}$$

где $\delta_{m,n}$ – так называемые гравитационные размерности [8]

$$\delta_{m,n} = \frac{p+q-|pm-qn|}{2q}. \tag{2.9}$$

Понятно что поля $O_{m,n}$ удовлетворяют тем же правилам отбора что и поля $\Phi_{m,n}$ минимальных моделей.

2.3 Корреляционные числа минимальной гравитации

В работах [5, 9] были посчитаны n-точечные коореляционные числа для $n \leq 4$ в (q,p) минимальной Лиувиллевской гравитации. Величины, независящие от нормировки операторов $O_{m,n}$ и нормировки корреляторов, оказываются равными (предполагаем что правила отбора выполнены)

$$\frac{\langle\langle O_{m_1,n_1}O_{m_2,n_2}O_{m_3,n_3}\rangle\rangle^2}{\prod_{i=1}^3\langle\langle O_{m_i,n_i}^2\rangle\rangle} = \frac{\prod_{i=1}^3|m_ip-n_iq|}{p(p+q)(p-q)} \tag{2.10}$$

$$\frac{\langle\langle O_{m_1,n_1}O_{m_2,n_2}O_{m_3,n_3}O_{m_4,n_4}\rangle\rangle}{\left(\prod_{i=1}^4\langle\langle O_{m_i,n_i}^2\rangle\rangle\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ = \frac{\prod_{i=1}^4|m_ip-n_iq|}{2p(p+q)(p-q)}\left(\sum_{i=2}^4\sum_{r=-(m_1-1)}^{m_1-1}\sum_{s=-(n_1-1)}^{n_1-1}|(m_i-r_i)p-(n_i-s_i)q| - m_1n_1(m_1p+n_1q)\right) \tag{2.11}$$

где $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ означает нормированные корреляторы, то есть $\langle\langle\ldots\rangle\rangle = \frac{\langle\ldots\rangle}{\langle 1\rangle}$. Суммы по r, s идут с шагом 2. Эти результаты пригодятся нам в дальнейшем для сравнения с матричными моделями.

Здесь необходимо сделать важное замечание, касающееся четырехточечных корреляционных чисел. А именно при выводе формулы (2.11) было сделано некоторое предположение, которое в частном случае $m_i = 1$ выглядит следующим образом [5] (предположим так же $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$)

$$n_1 + n_4 < n_2 + n_3. \tag{2.12}$$

3 Матричные модели

3.1 Струнное уравнение Дугласа

Рассмотрим многоматричную модель, отвечающую (q, p) минимальной гравитации. Согласно Дугласу [10] свободная энергия в такой модели описывается следующим образом. Возьмем два оператора P, Q

$$P = \left(Q^{\frac{p}{q}} + \sum_{\alpha=1}^{q-1} \sum_{k=1} t_{k,\alpha} Q^{k+\frac{\alpha}{q}} \right)_+ , \tag{3.1}$$

$$Q = d^q + \sum_{\alpha=1}^{q-1} u^\alpha(x) d^{q-\alpha-1} \tag{3.2}$$

где $d = \frac{d}{dx}$, $Q^{\frac{a}{b}}$ – псевдодифференциальный оператор, который следует понимать как ряд по d, а $(\ldots)_+$ означает что из такого ряда берутся только неотрицательные степени d.

Тогда так называемое "струнное уравнение Дугласа"выглядит как [10]

$$[P, Q] = 1. \tag{3.3}$$

Это уравнение определяет систему дифференциальных уравнений на $u_\alpha(x)$.

Свободная энергия в этом подходе удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = u_*^1 \tag{3.4}$$

где u_*^α – подходящее решение струнного уравнения (3.3).

Первый член в псевдодфференциальном операторе (3.1) описывает p-критическую точку $(q-1)$-матричной модели и отвечает невозмущенной (q, p) минимальной Лиувиллевской гравитации. Остальные члены в (3.1) описывают возмущения около критической точки и отвечают минимальной Лиувиллевской гравитации, возмущенной некоторыми операторами с константами взаимодействия $t_{k,\alpha}$. Ниже мы увидим что можно так выбрать интервал, в котором изменяется индекс k в (3.1), что эти возмущения будут соответствовать возмущениям всевозможными примарными операторами (2.8) в (q,p) минимальной гравитации.

В этой работе мы будем изучать корреляционные числа минимальной гравитации на сфере. С точки зрения матричных моделей это означает что нас интересует т'Хоофтовский предел $N \to \infty$, когда размер матриц становится большим. С другой стороны для струнного уравнения Дугласа это означает что нужно взять квазиклассический предел. В этом пределе оператор "импульса"$\frac{d}{dx}$ заменяется на "классический импульс"p (не путать с p в (q,p) в минимальной гравитации!), а коммутатор в струнном уравнении (3.3) заменяется на скобку Пуассона

$$[P,Q]=1 \to \{P,Q\} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial x} = 1. \tag{3.5}$$

где P,Q теперь просто полиномы от p.

В дальнейшем, однако, нам будет удобнее использовать другое описание струнного уравнения, предложенное в работе [11]. А именно, струнное уравнение Дугласа (3.3) оказывается эквивалентным уравнению на критические точки для действия [1]

$$S = S_{s+1,p_0} + \sum_{\alpha=1}^{q-1}\sum_{k=0} t_{k,\alpha} S_{k,\alpha} \tag{3.6}$$

где $(q,p)=(q,sq+p_0)$, $t_{0,1}=x$ (p_0 - остаток, а s - целая часть от деления p на q), а так же введено обозначение

$$S_{k,\alpha} = Res(Q^{k+\frac{\alpha}{q}}) \tag{3.7}$$

где под вычетом понимается коэффициент (со знаком минус) при d^{-1} в разложении в ряд Лорана псевдодифференциального оператора. Тогда струнное уравнение Дугласа (3.3) эквивалентно следующему [11]

$$\frac{\partial S}{\partial u^\alpha} = 0. \tag{3.8}$$

Можно показать, что по сути уравнение (3.8) является интегралом от струнного уравнения (3.3). При этом времена $t_{0,\alpha}$ в (3.6) (которых не было в (3.1)) могут пониматься как константы интегрирования.

Как было сказано, мы будем вычислять корреляционные числа на сфере, а значит нам нужен квазиклассический предел струнного уравнения Дугласа. В этом пределе оператор Q превращается в полином, так что можно считать в (3.6) - (3.8) что

$$Q = p^q + \sum_{\alpha=1}^{q-1} u^\alpha p^{q-\alpha-1} \tag{3.9}$$

[1]На самом деле времена $t_{k,\alpha}$ в действии отличаются от времен $t_{k,\alpha}$ в (3.1) на множитель, который для нас не существенен, поскольку в дальнейшем мы используем только описание с действием.

а вычет в (3.7) берется при $p=\infty$.

Теперь чтобы понять каким возмущениям в минимальной гравитации отвечают времена $t_{k,\alpha}$, изучим скейлинговые свойства данной конструкции. В частности сопоставим скейлинговые размерности констант связи $t_{k,\alpha}$ с гравитационными размерностями примарных полей минимальной гравитации.

Начнем с того, что попробуем отождествить свободную энергию Z матричной модели со статичстической суммой Z_L минимальной Лиувиллевской гравитации на сфере. Статистическая сумма минимальной гравитации имеет размерность [8]

$$Z_L \sim \mu^{\frac{p}{q}+1} \tag{3.10}$$

где μ –космологическая постоянная.

С другой стороны из уравннения (3.4) находим что

$$Z \sim x^2 u^1 \sim p^{2(p+q)} \tag{3.11}$$

где размерность x определена из уравннеия $\{P, Q\} = 1$, а размерность u^α опеределена из условия того, что все члены в полиноме Q должны быть одного порядка

$$x \sim p^{p+q-1}, \qquad u^\alpha \sim p^{\alpha+1}. \tag{3.12}$$

Таким образом из условия $Z \sim Z_L$ находим

$$p \sim \mu^{\frac{1}{2q}}. \tag{3.13}$$

Учитывая последнее, а так же считая что все члены в (3.6) одного порядка находим

$$t_{k,\alpha} \sim \mu^{\frac{s+1-k}{2}+\frac{p_0-\alpha}{2q}}. \tag{3.14}$$

В частности $t_{s-1,p_0} \sim \mu$.

Теперь отождествим размерности этих времен с гравитиционными размерностями примарных операторов $O_{m,n}$. Имеем в (q,p) минимальной гравитации размерности операторов $O_{m,n}$ $(1 \leq m \leq q-1; 1 \leq n \leq p-1)$

$$\delta_{m,n} = \frac{p+q-|pm-qn|}{2q} \tag{3.15}$$

Вспомним однако, что не все поля таблицы Каца (q,p) минимальной модели независимы. Чтобы учесть каждое поле только один раз возьмем например $n \leq \frac{pm}{q}$. В этом случае

$$\delta_{m,n} = \frac{1+n+s(1-m)}{2} + \frac{p_0(1-m)}{2q}. \tag{3.16}$$

Эта размерность должна совпадать с размерностью времен из матричной модели (3.14)

$$\frac{1+n+s(1-m)}{2}+\frac{p_0(1-m)}{2q}=\frac{s+1-k}{2}+\frac{p_0-\alpha}{2q}. \tag{3.17}$$

Таким образом заключаем что

$$\alpha = p_0 m, \qquad k = sm-n \tag{3.18}$$

где m, n лежат в интервалах

$$1 \le m \le q-1, \qquad 1 \le n \le sm + \left[\frac{p_0 m}{q}\right]. \tag{3.19}$$

Таким образом действие, отвечающее (q,p) минимальной гравитации, приобретает вид

$$S = ResQ^{\frac{p+q}{q}} + \sum_{m=1}^{q-1}\sum_{n=1}^{p-1}\tau_{m,n} ResQ^{\frac{|pm-qn|}{q}} \tag{3.20}$$

где $\tau_{m,n} = t_{sm-n,p_0 m}$, а время $\tau_{m,n}$ отвечает оператору $O_{m,n}$ минимальной гравитации.

3.2 Свободная энергия матричной модели

Свободная энергия Z матричной модели удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = u_*^1 \tag{3.21}$$

где u_*^α - подходящее решение струнного уравнения Дугласа.

Тем не менее для вычисления корреляционных чисел полезно иметь явную формулу для свободной энергии. В этом разделе мы опишем конструкцию, позволяющую написать такое явное интегральное представление. Эта конструкция еще более раскрывает связь струнного уравнения (3.3) с КдФ иерархиями и структурой кирального кольца Диграфа-Верлинде-Верлинде-Виттена [12, 13, 14].

Рассмотрим алгебру полиномов с зависящими от x коэффициентами, по модулю полинома Q', где штрих означает производную по p

$$\mathcal{A} = C[p]/Q' \tag{3.22}$$

Так же определим квадратичную форму на пространстве $\mathcal{A}$

$$(P_1(p), P_2(p)) := Res\left(\frac{P_1(p)P_2(p)}{Q'}\right) \tag{3.23}$$

Пусть Φ_α - некоторый базис в $\mathcal{A}$. Тогда произведение определим как

$$\Phi_\alpha \Phi_\beta = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \Phi_\alpha \mod (Q') \tag{3.24}$$

Квадратичная форма так же определяет метрику $g_{\mu\nu}$ на $\mathcal{A}$

$$g_{\alpha\beta} = Res \frac{\Phi_\alpha \Phi_\beta}{Q'} \tag{3.25}$$

Таким образом находим что

$$Res \frac{\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma}{Q'} = C_{\alpha\beta}^{\delta} \cdot Res \frac{\Phi_\delta \Phi_\gamma}{Q'} = C_{\alpha\beta}^{\delta} g_{\delta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.26}$$

Конечно имеется бесконечное множество разных базисов, но среди них имеется по крайней мере два выделенных. Во-первых можно в качестве базисных векторов Φ_α взять p^α. Во-вторых нам так же будет очень удобен базис

$$\Phi_\alpha = \frac{\partial Q}{\partial v^\alpha}, \qquad v^\alpha = \frac{q}{\alpha} Res Q^{\frac{\alpha}{q}}. \tag{3.27}$$

Последний обладает тем свойством, что в нем метрика $g_{\mu\nu}$ – плоская. В дальнейшем мы будем пользоваться этим базисом.

Теперь у нас все готово для того, чтобы написать явное выражение для свободной энергии. Мы утверждаем что

$$Z = \int_0^{u_*} C_\alpha^{\beta\gamma} \frac{\partial S}{\partial u^\beta} \frac{\partial S}{\partial u^\gamma} du^\alpha \tag{3.28}$$

где $u_* = (u_*^1, \dots, u_*^{q-1})$ – подходящее решение струнного уравнения или, эквивалентно, подходящая критическая точка действия S. Индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$.

Чтобы убедиться что эта формула действительно имеет смысл, проверим два свойства.

Во-первых, интеграл не должен зависеть от контура, по которому идет интегрирование. Эквивалентно, дифференциальная форма $\Omega = C_\alpha^{\beta\gamma} \frac{\partial S}{\partial v^\beta} \frac{\partial S}{\partial v^\gamma} dv^\alpha$ должна быть замкнута. Это можно проверить прямым вычислением дифференциала от Ω. При этом необходимо использовать два свойства – ассоциативность Фробениусовой алгебры и рекурсионное соотношение на гамильтонианы $S_{k,\alpha}$

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} C_{\gamma\delta}^{\phi} = C_{\alpha\gamma}^{\phi} C_{\beta\delta}^{\gamma}, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2 H_{n,\alpha}}{\partial v^{q-\beta} \partial v^{q-\gamma}} = C_{\beta\gamma}^{\delta} \frac{\partial H_{n-1,\alpha}}{\partial v^{q-\delta}} \tag{3.30}$$

где $H_{n,\alpha}$ совпадают с $S_{n,\alpha}$ с точностью до множителя, который определен в приложении. Доказательство этого соотношения так же можно найти в приложении.

Во-вторых, свободная энергия (3.28) должна удовлетворять дифференциальному уравнению (3.4). Это тоже легко проверяется прямым вычислением. При этом следует использовать что $t_{0,1} = x$ и $C_{\alpha 1}^{\beta} = \delta_\alpha^\beta$.

4 Одноматричная модель и $(2,2s+1)$ минимальная гравитация

В этом разделе в качестве разминки мы воспризведем результаты, полученные в [15], таким способом, который позволит нам применить ту же технику в следующем разделе для случая $(3,3s+\alpha)$, а в будущем возможно и для произвольных (q,p).

Для этого случая имеем

$$P(u) = u^{s+1} + t_0 u^{s-1} + \sum_{k=1}^{s-1} t_k u^{s-k-1} \tag{4.1}$$

$$Z = \frac{1}{2}\int_0^{u_*} P^2(u)du \tag{4.2}$$

где u_* - подходящее решение уравнения $P(u)=0$.

В данном случае $P(u) = \frac{\partial S}{\partial u}$.

Чтобы получить производящую функцию корреляционных чисел, введем резонансные соотношения

$$t_k = \lambda_k + \sum C_k^{k_1\ldots k_n}\lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_n}. \tag{4.3}$$

Свободная энергия Z и полином $P(u)$ приобретают вид

$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^{s-1}\lambda_k Z_k + \frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2=1}^{s-1}\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}Z_{k_1k_2} + \ldots \tag{4.4}$$

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{s-1}\lambda_k P_k + \frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2=1}^{s-1}\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}P_{k_1k_2} + \ldots \tag{4.5}$$

где разложение идет по всем λ_k за исключением $\lambda_0=\mu$, а так же

$$P_0(u) = u^{s+1} + A_0\mu u^{s-1} + B_0\mu^2 u^{s-3} + \ldots \tag{4.6}$$

$$P_k(u) = u^{s-k-1} + A_k\mu u^{s-k-3} + B_k\mu^2 u^{s-k-5} + \ldots \tag{4.7}$$

$$P_{k_1k_2} = u^{s-k_1-k_2-3} + A_{k_1k_2}\mu u^{s-k_1-k_2-5} + B_{k_1k_2}\mu^2 u^{s-k_1-k_2-k_3-7} + \ldots \tag{4.8}$$

$$\ldots$$

при этом каждый из полиномов $P_{k_1\ldots k_n}$ имеет определенную четность, так как $\mu\sim u^2$.

Размерности

$$\lambda_k \sim \mu^{\frac{k+2}{2}} \tag{4.9}$$

$$Z \sim \mu^{\frac{2s+3}{2}} \tag{4.10}$$

$$Z_{k_1\ldots k_n} \sim \mu^{\frac{2s+3-\sum(k_i+2)}{2}} \tag{4.11}$$

Как обычно в духе теории критических явлений, мы интересуемся только сингулярной частью свободной энергии и отбрасываем регулярную часть, как неуниверсальную.

Заметим что $Z_{k_1\ldots k_n}$ всегда сингулярна, если $\sum k_i$ - четно. С другой стороны если $\sum k_i$ - нечетно и дополнительно

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leq 2s+3-2n \tag{4.12}$$

то корреляционные числа $Z_{k_1\ldots k_n}$ пропорциональны целым неотрицательным степеням μ и таким образом не сингулярны. Это всегда выполнено для одноточечных и двухточечных корреляционных чисел. Поэтому нам необходимо рассмотреть сектор с нечетным $\sum k_i$ только начиная с трехточечных корреляционных чисел.

4.1 Обезразмеривание

Удобно ввести безразмерные величины

$$s_k = \frac{g_k}{g} u_0^{-(k+2)} \lambda_k \tag{4.13}$$

$$P(u) = g u_0^{s+1} Q(u/u_0) \tag{4.14}$$

$$Z = g^2 u_0^{2s+3} \mathcal{Z} \tag{4.15}$$

где $u_0 = u_*(\lambda = 0) \sim \mu^{\frac{1}{2}}$, $g = \frac{(s+1)!}{(2s+1)!!}, g_k = \frac{(s-k-1)!}{(2s-2k-3)!!}$.

Таким образом

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \int_0^{x_*} Q^2(x) dx \tag{4.16}$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ и $x_* = x_*(s)$ подходящий корень полинома $Q(x)$. Заметим что $x_*(s=0) = 1$.

Аналогично размерным величинам имеем разложение

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + \sum_{k=1}^{s-1} s_k \mathcal{Z}_k + \frac{1}{2} \sum_{k_1,k_2=1}^{s-1} s_{k_1} s_{k_2} \mathcal{Z}_{k_1 k_2} + \ldots \tag{4.17}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{k=1}^{s-1} s_k Q_k + \frac{1}{2} \sum_{k_1,k_2=1}^{s-1} s_{k_1} s_{k_2} Q_{k_1 k_2} + \ldots \tag{4.18}$$

$$Q_0(x) = C_0 x^{s+1} + C_0' x^{s-1} + \ldots \tag{4.19}$$

$$Q_k(x) = C_k x^{s-k-1} + C_k' x^{s-k-3} + \ldots \tag{4.20}$$

$$Q_{k_1 k_2}(x) = C_{k_1 k_2} x^{s-k_1-k_2-3} + C_{k_1 k_2}' x^{s-k_1-k_2-5} + \ldots \tag{4.21}$$

4.2 Одноточечные и двухточечные корреляционные числа

Находим одноточечные и двухточечные корреляционные числа

$$\mathcal{Z}_k = \int_0^1 dx Q_0(x) Q_k(x) \tag{4.22}$$

$$\mathcal{Z}_{k_1 k_2} = \int_0^1 dx (Q_{k_1}(x) Q_{k_2}(x) + Q_0(x) Q_{k_1 k_2}(x)) \tag{4.23}$$

где одноточечные числа сингулярны только при четных k, а двухточечные числа сингулярны только для четных $k_1 + k_2$.

Правила отбора требуют зануления всех одноточечных корреляционных чисел при $k \neq 0$ и двухточечных функций при $k_1 \neq k_2$. Второе слагаемое в двухточечных корреляционных числах равно нулю в силу зануления одноточечных чисел и того, что полиномы $Q_{k_1 k_2}$ можно разложить по полиномам Q_k.

Удобно ввести новые переменные y вместо x

$$\frac{y+1}{2} = x^2, \qquad dx = \frac{dy}{2\sqrt{2}(1+y)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.24}$$

В переменных y полиномы $Q_0, Q_k, \ldots$ будут содержать все степени (в то время как в (4.19) - (4.21) степени были с шагом 2). Сдвиг был сделан для того, чтобы интервал интегрирования в (4.22), (4.23) был $[-1, 1]$ вместо $[0, 1]$.

Правила отбора определяют полиномы Q_0, Q_k в терминах полиномов Якоби $P_n^{(a,b)}$

s-нечетно	$Q_0(y) = P^{(0,-\frac{1}{2})}_{\frac{s+1}{2}}(y) - P^{(0,-\frac{1}{2})}_{\frac{s-1}{2}}(y)$
s-четно	$Q_0(y) = x\left(P^{(0,\frac{1}{2})}_{\frac{s}{2}}(y) - P^{(0,\frac{1}{2})}_{\frac{s-2}{2}}(y)\right)$
(s+k)-нечетно	$Q_k(y) = P^{(0,-\frac{1}{2})}_{\frac{s-k-1}{2}}(y)$
(s+k)-четно	$Q_k(y) = xP^{(0,\frac{1}{2})}_{\frac{s-k-2}{2}}(y)$

Благодаря связи полиномов Якоби с полиномами Лежандра P_n

$$P_n^{(0,-\frac{1}{2})}(2x^2-1) = P_{2n}(x) \tag{4.25}$$

$$xP_n^{(0,\frac{1}{2})}(2x^2-1) = P_{2n+1}(x) \tag{4.26}$$

результаты совпадают с полученными в [15].

4.3 Трехточечные корреляционные числа

Прямым вычислением получаем

$$\mathcal{Z}_{k_1 k_2 k_3} = -\frac{Q_{k_1} Q_{k_2} Q_{k_3}}{\frac{dQ_0}{dx}}\Bigg|_{x=1} + \int_0^1 dx Q_{k_1 k_2} Q_{k_3} = -\frac{1}{2s+1} + \int_0^1 dx Q_{k_1 k_2} Q_{k_3} \tag{4.27}$$

где мы использовали свойства полиномов Якоби: $Q_k(x=1)=1$, $\frac{dQ_0}{dx}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2s+1}$. Кроме того мы предположили что $k_1,k_2\le k_3$.

Как мы увидим, первый член воспроизводит выражение из минимальной гравитации, а роль второго члена – сократить первый, когда правила отбора нарушены.

Так же нам можно не беспокоится о случае, когда $k_1+k_2+k_3$ - нечетно. Действительно, когда $k_1+k_2+k_3$ - нечетно и $<2s+1$, то правила отбора нарушены, но $Z_{k_1k_2k_3}$ не сингулярно (оно пропорционально целой неотрицательной степени μ). Если же $k_1+k_2+k_3$ - нечетно и $\ge 2s+1$ интегральный член автоматически равен нулю в силу (4.22).

Таким образом рассмотрим случай, когда $k_1+k_2+k_3$ - четно. Правила отбора требуют

$$\int_0^1 dx Q_{k_1k_2}Q_{k_3}=\begin{cases}\frac{1}{2s+1} & \text{if}\quad k_1+k_2<k_3\\ 0 & \text{if}\quad k_1+k_2\ge k_3\end{cases} \tag{4.28}$$

В переменных y (4.24) получаем

$(s+k_1+k_2)$ - нечетно	$Q_{k_1k_2}(y)=\sum_{n=0}^{\frac{s-k_1-k_2-3}{2}}\frac{4n+1}{2s+1}P_n^{(0,-\frac{1}{2})}(y)$
$(s+k_1+k_2)$ - четно	$Q_{k_1k_2}(y)=x\sum_{n=0}^{\frac{s-k_1-k_2-4}{2}}\frac{4n+3}{2s+1}P_n^{(0,\frac{1}{2})}(y)$

В этом месте мы уже можем посчитать величину, которая не зависит ни от нормировки операторов, ни от нормировки корреляторов, и сравнить её с аналогичной величиной в минимальной гравитации. А именно рассмотрим величину

$$\frac{(\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3})^2\mathcal{Z}_0}{\prod_{i=1}^3\mathcal{Z}_{k_ik_i}.} \tag{4.29}$$

Когда правила отбора выполнены, имеем $Z_{k_1k_2k_3}=-\frac{1}{2s+1}$. Поэтому получаем для этой величины

$$\frac{\prod_{i=1}^3(2s-2k_i-1)}{(2s+3)(2s+1)(2s-1)} \tag{4.30}$$

что в точности совпадает со значением в минимальной гравитации (2.10), если взять $q=2, p=2s+1, m_i=1, n_i=k_i+1$.

4.4 Четырехточечные корреляционные числа

Опять же прямое вычисление дает

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \left(-\frac{\frac{d^2Q_0}{dx^2}}{(\frac{dQ_0}{dx})^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{dQ_{k_i}}{dx}}{(\frac{dQ_0}{dx})^2} - \frac{\sum_{i<j} Q_{k_ik_j}}{\frac{dQ_0}{dx}} \right)\Bigg|_{x=1} +$$
$$+ \int_0^1 dx (Q_{k_1k_2}Q_{k_3k_4} + Q_{k_1k_3}Q_{k_2k_4} + Q_{k_1k_4}Q_{k_2k_3}) +$$
$$+ \int_0^1 dx (Q_{k_1k_2k_3}Q_{k_4} + Q_{k_1k_2k_4}Q_{k_3} + Q_{k_1k_3k_4}Q_{k_2} + Q_{k_2k_3k_4}Q_{k_1}). \qquad (4.31)$$

Роль членов в третей строке - удовлетворить правила отбора, сокращая члены в первых двух строках, когда правила отбора нарушены. С другой стороны слагаемые в третей строке автоматически равны нулю (в силу ортогональности полиномов Якоби), когда правила отбора удовлетворены. Таким образом чтобы посчитатать четырехточечные числа, когда правила отбора выполнены, необходимо учесть только слагаемые в первых двух строках.

Во-первых удобно, как и прежде, перейти к переменным y согласно (4.24)

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \left(-\frac{16\frac{d^2Q_0}{dy^2} + 4\frac{dQ_0}{dy}}{(4\frac{dQ_0}{dy})^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 4\frac{dQ_{k_i}}{dy}}{(4\frac{dQ_0}{dy})^2} - \frac{\sum_{i<j} Q_{k_ik_j}}{4\frac{dQ_0}{dx}} \right)\Bigg|_{y=1} +$$
$$+ \int_{-1}^1 \frac{dy}{2\sqrt{2}(1+y)^{\frac{1}{2}}} (Q_{k_1k_2}Q_{k_3k_4} + Q_{k_1k_3}Q_{k_2k_4} + Q_{k_1k_4}Q_{k_2k_3}) \qquad (4.32)$$

Используя свойства полиномов Якоби (для четных и нечетных s, k, k_1, k_2)

$$Q_0'(1) = \frac{2s+1}{4}, \qquad Q_0''(1) = \frac{(s-1)(s+2)(2s+1)}{32}, \qquad (4.33)$$
$$Q_k'(1) = \frac{(s-k-1)(s-k)}{8}, \qquad Q_{k_1k_2} = \frac{(s-k_1-k_2-1)(s-k_1-k_2-2)}{2(2s+1)} \qquad (4.34)$$

где штрих означает производную по y. Используя последнее, мы получаем для четырехточечных чисел, когда правила отбора удовлетворены

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2(2s+1)^2}\Big(-(s-1)(s+2) - 2 + \sum_{i=1}^4 F(k_i+1) -$$
$$- F(k_{(12|34)}) - F(k_{(13|24)}) - F(k_{(14|23)})\Big) \qquad (4.35)$$

где

$$F(k) = (s-k-1)(s-k-2), \qquad k_{(ij|lm)} = \min(k_i+k_j, k_l+k_m) \qquad (4.36)$$

Величина, которая не зависит от нормировки операторов и корреляторов

$$\frac{(\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4}\mathcal{Z}_0)^2}{\prod_{i=1}^4 \mathcal{Z}_{k_ik_i}} \tag{4.37}$$

Для нее получается выражение, в точности совпадающее с (2.11) при $q = 2, p = 2s + 1, m_i = 1, n_i = k_i + 1$

$$\frac{\prod_{i=1}^4(2s-2k_i-1)}{(2s+3)(2s+1)(2s-1)}\left(\sum_{i=2}^{4}\sum_{t=-(k_1)}^{k_1}\left(s-k_i-t-\frac{1}{2}\right)-(k_1+1)\left(s+k_1+\frac{3}{2}\right)\right)^2 \tag{4.38}$$

5 Двухматричная модель и $(3, 3s+\alpha)$ минимальная гравитация

Рассмотрим двухматричную модель, отвечающую минимальной гравитации $(3, 3s+\alpha)$. В этом случае корреляционные числа на сфере описываются следующим образом. Имеем полином Q степени 3 и действие S

$$Q = p^3 + up + v, \qquad S(u,v) = S_{s+1,\alpha} + \sum_{k=0}^{s-1} t_k S_{s-k-1,\alpha} + \sum_{k=s}^{3s+\alpha-2} t_k S_{k-s,3-\alpha} \tag{5.1}$$

где как и прежде $S_{k,\alpha} = ResQ^{k+\frac{\alpha}{3}}$.

Возьмем подходящее решение (u_*, v_*) уравнений

$$\begin{cases} S_u = 0 \\ S_v = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

где нижние индексы u, v означают производные по u и v. Свободная энергия для этой модели определена как

$$Z = \frac{1}{2}\int_\gamma (S_u^2 - \frac{u}{3}S_v^2)du + \int_\gamma S_u S_v dv \tag{5.3}$$

где контур интегрирования γ идет от $(u,v) = (0,0)$ до $(u,v) = (u_*, v_*)$.

Зная что в (q,p) минимальной гравитации $b^2 = \frac{q}{p}$, размерность свободной энергии

$$Z \sim \mu^{\frac{Q}{b}} = \mu^{s+1+\frac{\alpha}{3}} \tag{5.4}$$

С другой стороны

$$S_{k,\alpha} \sim p^{3k+\alpha+1}, \qquad u \sim p^2, \qquad v \sim p^3 \tag{5.5}$$

$$Z \sim \frac{S^2}{u} \sim p^{6(s+1+\frac{\alpha}{3})} \tag{5.6}$$

Таким образом

$$p \sim \mu^{\frac{1}{6}}, \quad u \sim \mu^{\frac{1}{3}}, \quad v \sim \mu^{\frac{1}{2}}, \quad S \sim \mu^{\frac{s+1}{2}+\frac{\alpha+1}{6}} \tag{5.7}$$

а так же

$$t_k \sim \begin{cases} \mu^{\frac{k+2}{2}}, & 0 \le k \le s-1 \\ \mu^{s-\frac{k}{2}+\frac{\alpha}{3}}, & s \le k \le 3s+\alpha-2 \end{cases} \tag{5.8}$$

Таким образом времена t_k отвечают полям $O_{1,k+1}$ (с точностью до резонансных соотношений).

5.1 Резонансные соотношения

Как и раньше, несмотря на то, что размерности времён t_k совпадают с размерностями операторов $O_{1,k+1}$ минимальной гравитации, они не отвечают в точности этим операторам. А именно возможны резонансы.

Анализируя размерности времен (5.8) находим возможные резонансные соотношения между КдФ временами t_k в матричных моделях и временами λ_k минимальной гравитации до первого порядка

$$t_k = \lambda_k + c_k \mu^{\frac{k+2}{2}} + \sum_{\substack{l=1 \\ (k-l)\in 2Z}}^{s-1} \beta_{kl} \mu^{\frac{k-l}{2}} \lambda_l + \dots, \quad 0 \le k \le s-1 \tag{5.9}$$

$$t_k = \lambda_k + \sum_{\substack{l=k+2 \\ (l-k)\in 2Z}}^{3s+\alpha-2} \beta_{kl} \mu^{\frac{l-k}{2}} \lambda_l + \dots, \quad s \le k \le 3s+\alpha-2 \tag{5.10}$$

Так же нам понадобятся резонансы второго порялка

$$t_k = \cdots \sum C_k^{k_1 k_2} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} + \dots \tag{5.11}$$

Причем коэффициенты $C_k^{k_1 k_2}$ ненулевые, только если выполняются условия резонанса

$$[\lambda_k] = [\lambda_{k_1}] + [\lambda_{k_2}] \tag{5.12}$$

для некоторых k, k_1, k_2, где $[\lambda_k]$ размерность величины λ_k. Снова анализирую размерности (5.8) находим

$$C_k^{k_1 k_2} \neq 0, \qquad \text{если} \quad 1 \le k, k_1, k_2 \le s-1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \le k_1 \le s-1 \\ s \le k, k_2 \le 3s+\alpha-2 \end{cases} \tag{5.13}$$

После того как мы подставляем времена t_k в (5.3) согласно (5.9), (5.10), мы можем вычислять n-точечные корреляционные числа

$$Z_{k_1 \dots k_n} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \lambda_{k_n}} \bigg|_{\lambda=0} Z \tag{5.14}$$

5.2 Решения струнного уравнения

В случае $(3, 3s+\alpha)$ имеется две независимых функции u, v в полиноме Q (5.1). Это усложняет анализ по сравнению с серией Ли-Янга $(2, 2s+1)$ и на первый взгляд в этой ситуации вместо ортогональных полиномов от одной переменной (4.5), резонансные соотношения должны были бы описываться в терминах полиномов от двух переменных u, v. Однако как мы увидим, существует такое специальное решение струнного уравнения, которое позволяет одновременно удовлетворить и конформные правила отбора и при этом позволит описать резонансные соотношения в терминах полиномов только от одной переменной u.

Опишем теперь это решение струнного уравнения (5.2). Поскольку корреляционные числа являются производными свободной энергии при $\lambda = 0$, нам будет необходимо знать решение (u_*, v_*) струнного уравнения при $\lambda = 0$. Мы покажем что одно из уравнений (5.2) всегда удовлетворяется такими v_* что $v_*(\lambda = 0) = 0$. Это происходит за счет того, что функция $S(u, v)$ и её производные при $\lambda = 0$ обладают определенной четностью по v (так происходит благодаря тому, что $\mu \sim v^2$).

Пользуясь резонансными соотношениями (5.9) и (5.10) получаем для действия (5.1) ряд по λ

$$S(u,v) = S^0(u,v) + \sum_{k=1}^{3s+\alpha-2} \lambda_k S^k(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{k_1,k_2=1}^{3s+\alpha-2} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} S^{k_1 k_2}(u,v) + \dots \tag{5.15}$$

после чего размерный анализ показывает что

$$S^0 \sim \mu^{\frac{s+1}{2} + \frac{\alpha+1}{6}} \tag{5.16}$$

$$S^k \sim \begin{cases} \mu^{\frac{s-k-1}{2} + \frac{\alpha+1}{6}}, & 1 \le k \le s-1 \\ \mu^{\frac{k-s+1}{2} + \frac{1-\alpha}{6}}, & s \le k \le 3s+\alpha-2 \end{cases} \tag{5.17}$$

$$S^{k_1 k_2} \sim \begin{cases} \mu^{\frac{s-k_1-k_2-3}{2} + \frac{\alpha+1}{6}}, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1 \\ \mu^{\frac{k_2-k_1-s-1}{2} + \frac{1-\alpha}{6}}, & \begin{cases} 1 \le k_1 \le s-1 \\ s \le k_2 \le 3s+\alpha-2 \end{cases} \end{cases} \tag{5.18}$$

Покажем что функции $S^{k_1 \dots k_n}(u, v)$ обладают определенными четностями по v. Рассмотрим например $S^0(u, v)$. Эта функция является полиномом по u, v, μ. Поэтому

$$S^0(u,v) = \sum_{m,n,l} u^m v^n \mu^l \sim \mu^{\frac{s+1}{2} + \frac{\alpha+1}{6}} \tag{5.19}$$

где все слагаемые в сумме должны быть одной размерности. Поскольку $u \sim \mu^{\frac{1}{3}}, v \sim \mu^{\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{m}{3} + \frac{n}{2} + l = \frac{s+1}{2} + \frac{\alpha+1}{6} \tag{5.20}$$

Это уравнение в целых числах обладает следующим общим решением

$$\begin{cases} n &= s + \alpha + 2t \\ m &= 2 - \alpha - 3(t+l) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{5.21}$$

Поскольку v входит в $S^0(u,v)$ в степени n, то из последнего уравнения видим что функция $S^0(u,v)$ обладает четностью $(s+\alpha)$ по v. Аналогично находятся четности остальных полиномов $S^{k_1 \dots k_n}$

$$S^0(u,-v) = (-1)^{s+\alpha} S^0(u,v) \tag{5.22}$$

$$S^k(u,-v) = (-1)^{s+\alpha-k-2} S^k(u,v) \tag{5.23}$$

$$S^{k_1 k_2}(u,-v) = (-1)^{s+\alpha-k_1-k_2-4} S^{k_1 k_2}(u,v) \tag{5.24}$$

$$\dots$$

$$S^{k_1 \dots k_n}(u,-v) = (-1)^{s+\alpha-\sum_i (k_i+2)} S^{k_1 \dots k_n}(u,v) \tag{5.25}$$

Таким образом, в зависимости от четностей s и α, либо $\frac{\partial S^0}{\partial u}$ либо $\frac{\partial S^0}{\partial v}$ является нечетной функцией v. Следовательно, $v = 0$ всегда является решением системы (5.2) при $\lambda = 0$. Значение u_* при $\lambda = 0$ мы называем u_0

$$\begin{cases} S^0_v\big|_{v=0} & \equiv 0 \\ S^0_u\big|_{\substack{v=0 \\ u=u_0}} & \equiv 0 \end{cases} \qquad \text{if} \qquad (s+\alpha) - \text{четно} \tag{5.26}$$

$$\begin{cases} S^0_u\big|_{v=0} & \equiv 0 \\ S^0_v\big|_{\substack{v=0 \\ u=u_0}} & \equiv 0 \end{cases} \qquad \text{if} \qquad (s+\alpha) - \text{нечетно} \tag{5.27}$$

Так же многие из функций $S^{k_1 \dots k_n}$ – нечетны по v, а значит обращаются в нуль при $v = 0$. В дальнейшем мы будем активно использовать данный факт.

5.3 Анализ размерностей

Кроме того нам понадобятся степени полиномов $S^{k_1 \dots k_n}(u,v)$ при $v = 0$, которые опять же находятся из соображений размерности

$$S^0(u,0) = C^0 u^{\frac{3(s+1)}{2}+\frac{1+\alpha}{2}} + \dots \tag{5.28}$$

$$S^k(u,0) = \begin{cases} C^k u^{\frac{3(s-k-1)}{2}+\frac{1+\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k \le s-1 \\ C^k u^{\frac{3(k-s+1)}{2}+\frac{1-\alpha}{2}} + \dots, & s \le k \le p-2 \end{cases} \tag{5.29}$$

$$S^{k_1k_2}(u,0) = \begin{cases} C^{k_1k_2} u^{\frac{3(s-k_1-k_2-3)}{2}+\frac{1+\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1 \\ C^{k_1k_2} u^{\frac{3(k_2-k_1-s-1)}{2}+\frac{1-\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1 \le s-1, \quad s \le k_2 \le p-2 \end{cases} \tag{5.30}$$

$$S^{k_1k_2k_3}(u,0) = \begin{cases} u^{\frac{3(s-k_1-k_2-k_3-5)}{2}+\frac{1+\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1, k_2, k_3 \le s-1 \\ u^{\frac{3(k_3-k_1-k_2-s-3)}{2}+\frac{1-\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1, \quad s \le k_3 \le p-2 \\ u^{\frac{3(k_2+k_3-k_1-3s-1)}{2}+\frac{1-3\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1 \le s-1, \quad s \le k_2, k_3 \le p-2 \\ u^{\frac{3(k_1+k_2+k_3-5s+1)}{2}+\frac{1-5\alpha}{2}} + \dots, & s \le k_1, k_2, k_3 \le p-2 \end{cases} \tag{5.31}$$

$$S^{k_1k_2k_3k_4}(u,0) = \begin{cases} u^{\frac{3(s-k_1-k_2-k_3-k_4-7)}{2}+\frac{1+\alpha}{2}}, & 1 \le k_1, k_2, k_3, k_4 \le s-1 \\ u^{\frac{3(k_4-k_1-k_2-k_3-s-5)}{2}+\frac{1-\alpha}{2}}, & 1 \le k_1, k_2, k_3 \le s-1, \quad s \le k_4 \le p-2 \\ u^{\frac{3(k_3+k_4-k_1-k_2-3s-3)}{2}+\frac{1-3\alpha}{2}}, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1, \quad s \le k_3, k_4 \le p-2 \\ u^{\frac{3(k_2+k_3+k_4-k_1-5s-1)}{2}+\frac{1-5\alpha}{2}}, & 1 \le k_1 \le s-1, \quad s \le k_2, k_3, k_4 \le p-2 \\ u^{\frac{3(k_1+k_2+k_3+k_4-7s+1)}{2}+\frac{1-7\alpha}{2}}, & s \le k_1, k_2, k_3, k_4 \le p-2 \end{cases} \tag{5.32}$$

где степени u во всех полиномах идут с шагом 3, поскольку $\mu \sim u^3$.

Так же нам понадобится

$$S_v^0(u,0) = u^{\frac{3(s+1)}{2}-\frac{2-\alpha}{2}} + \dots \tag{5.33}$$

$$S_v^k(u,0) = \begin{cases} u^{\frac{3(s-k-1)}{2}-\frac{2-\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k \le s-1 \\ u^{\frac{3(k-s)}{2}-\frac{2+\alpha}{2}} + \dots, & s \le k \le p-2 \end{cases} \tag{5.34}$$

$$S_v^{k_1k_2}(u,0) = \begin{cases} u^{\frac{3(s-k_1-k_2-3)}{2}-\frac{2-\alpha}{2}} + \dots, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1 \\ u^{\frac{3(k_2-k_1-s-1)}{2}-\frac{2+\alpha}{2}} + \dots, & \begin{cases} 1 \le k_1 \le s-1 \\ s \le k_2 \le p-2 \end{cases} \end{cases} \tag{5.35}$$

Размерности корреляционных чисел

$$\langle O_k \rangle \sim \begin{cases} \mu^{s-\frac{k}{2}+\frac{\alpha}{3}}, & 1 \le k \le s-1 \\ \mu^{\frac{k+2}{2}}, & s \le k \le p-2 \end{cases} \tag{5.36}$$

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle \sim \begin{cases} \mu^{s-\frac{k_1+k_2}{2}+\frac{\alpha}{3}-1}, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1 \\ \mu^{\frac{k_2-k_1}{2}}, & 1 \le k_1 \le s-1, \quad s \le k_2 \le p-2 \\ \mu^{\frac{k_1+k_2}{2}-s-\frac{\alpha}{3}+1}, & s \le k_1, k_2 \le p-2 \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} O_{k_3} \rangle \sim \begin{cases} \mu^{s+\frac{\alpha}{3}-\frac{k_1+k_2+k_3+4}{2}}, & 1 \le k_1, k_2, k_3 \le s-1 \\ \mu^{\frac{k_3-k_1-k_2-2}{2}}, & 1 \le k_1, k_2 \le s-1, \quad s \le k_3 \le p-2 \\ \mu^{\frac{k_2+k_3-k_1}{2}-s-\frac{\alpha}{3}}, & 1 \le k_1 \le s-1, \quad s \le k_2, k_3 \le p-2 \\ \mu^{\frac{k_1+k_2+k_3+2}{2}-2s-\frac{2\alpha}{3}}, & s \le k_1, k_2, k_3 \le p-2 \end{cases} \tag{5.38}$$

5.4 Одноточечные и двухточечные корреляционные числа

Перед тем как окунуться в детали вычислений, сделаем несколько замечаний.

Во-первых, при вычислении одноточечных и двухточечных корреляционных чисел нам не нужно дифференцировать верхние пределы в (5.3), поскольку такие члены будут содержать S_u^0, S_v^0, взятые в точке $(u_*(\lambda = 0), v_*(\lambda = 0))$, что есть нуль в силу струнного уравнения (5.2).

Во-вторых, после взятия производных по λ в (5.14), многие из функций $S_u^{k_1 \ldots k_n}$, $S_v^{k_1 \ldots k_n}$ нечетны по v (5.22) - (5.25), а следовательно равны нулю при $v = 0$.

Используя эти свойства вычисляем нульточечные, одноточечные и двухточечные корреляционные числа. Результат приведен в таблице

	$(s+\alpha)$ - четно	$(s+\alpha)$ - нечетно
	$Z_0 = \frac{1}{2}\int_0^{u_0} (S_u^0)^2 du$	$Z_0 = -\frac{1}{6}\int_0^{u_0} (S_v^0)^2 u du$
	$Z_k = \int_0^{u_0} S_u^0 S_u^k du$	$Z_k = -\frac{1}{3}\int_0^{u_0} S_v^0 S_v^k u du$
k_1, k_2 - четно	$Z_{k_1 k_2} = \int_0^{u_0} (S_u^{k_1} S_u^{k_2} + S_u^0 S_u^{k_1 k_2}) du$	$Z_{k_1 k_2} = -\frac{1}{3}\int_0^{u_0} (S_v^{k_1} S_v^{k_2} + S_v^0 S_v^{k_1 k_2}) u du$
k_1, k_2 - нечетно	$Z_{k_1 k_2} = \int_0^{u_0} (S_u^0 S_u^{k_1 k_2} - \frac{u}{3} S_v^{k_1} S_v^{k_2}) du$	$Z_{k_1 k_2} = \int_0^{u_0} (S_u^{k_1} S_u^{k_2} - \frac{u}{3} S_v^0 S_v^{k_1 k_2}) du$
$k_1 + k_2$ - нечетно	$Z_{k_1 k_2} = 0$	$Z_{k_1 k_2} = 0$

где после вычисления производных положено $\lambda_k = 0$, а значит $v_* = 0$. И поскольку интегрирование теперь идет только по оси u, то под интегралами полиномы тоже берутся при $v = 0$.

Далее для каждого из случаев, $(s+\alpha)$ - четно или нечетно, анализ аналогичен случаю Ли-Янговской серии $(2, 2s+1)$. Аналогично Ли-Янговской серии мы заменяем $S(u, 0)$ и

u на безразмерные величины $Q(x)$ и $x = \frac{u}{u_0}$ соответственно. Так же мы заменяем λ_k на безразмерные величины s_k и теперь будем предполагать что $\partial_k = \frac{\partial}{\partial s_k}$.

Удобно пользоваться переменной

$$\frac{y+1}{2} = x^3, \qquad dx = \frac{dy}{3\sqrt[3]{2}(1+y)^{\frac{2}{3}}} \tag{5.39}$$

Получаем из условия зануления одноточечных и диагональности двухточечных корреляционных чисел

$(s+\alpha)$ - четно	$Q_u^0 = x^{2(\alpha-1)}(P^{(0,\frac{2}{3}(2\alpha-3))}_{\frac{s-\alpha+2}{2}}(y) - P^{(0,\frac{2}{3}(2\alpha-3))}_{\frac{s-\alpha}{2}}(y))$
$(s+\alpha)$ - нечетно	$Q_v^0 = x^{2\alpha-1}(P^{(0,\frac{1}{3}(4\alpha-3))}_{\frac{s-\alpha+1}{2}}(y) - P^{(0,\frac{1}{3}(4\alpha-3))}_{\frac{s-\alpha-1}{2}}(y))$
$(s+\alpha+k)$ - четно, $k < s$	$Q_u^k = x^{2(\alpha-1)}P^{(0,\frac{2}{3}(2\alpha-3))}_{\frac{s-k-\alpha}{2}}(y)$
$(s+\alpha+k)$ - нечетно, $k < s$	$Q_v^k = x^{2\alpha-1}P^{(0,\frac{1}{3}(4\alpha-3))}_{\frac{s-k-\alpha-1}{2}}(y)$
$(s+\alpha+k)$ - четно, $k \geq s$	$Q_u^k = x^{2(2-\alpha)}P^{(0,\frac{2}{3}(3-2\alpha))}_{\frac{k-s+\alpha-2}{2}}(y)$
$(s+\alpha+k)$ - нечетно, $k \geq s$	$Q_v^k = x^{5-2\alpha}P^{(0,\frac{1}{3}(9-4\alpha))}_{\frac{k-s+\alpha-3}{2}}(y)$

где все полиномы снова выписаны при $v = 0$.

5.5 Трехточечные корреляционные числа

Прямое вычисление дает

$$Z_{k_1k_2k_3} = (S_u^{k_1}S_u^{k_2} - \frac{u_0}{3}S_v^{k_1}S_v^{k_2})\partial_{k_3}u_* + S_u^{k_1}S_v^{k_2}\partial_{k_3}v_* + \\ + \int_0^{u_0} du(S_u^{k_1}S_u^{k_2k_3} - \frac{u}{3}S_v^{k_1}S_v^{k_2k_3}) + \int_0^{u_0} du(S_u^0 S_u^{k_1k_2k_3} - \frac{u}{3}S_v^0 S_v^{k_1k_2k_3}) + \text{перестановки} \tag{5.40}$$

Взяв производную от уравнений (5.2), получаем при $s_k = 0$

$$S_u^k + S_{uu}^0\partial_k u_* + S_{uv}^0\partial_k v_* = 0 \tag{5.41}$$
$$S_v^k + S_{vu}^0\partial_k u_* + S_{vv}^0\partial_k v_* = 0 \tag{5.42}$$
$$\tag{5.43}$$

Таким образом, используя четности по v полиномов $S^{k_1\ldots k_n}$, получаем при $v = 0$

$\neq 0$ только если	$(s+\alpha)$ - четно	$(s+\alpha)$ - нечетно
k - четно	$\partial_k u_* = -\frac{S_u^k}{S_{uu}^0}$	$\partial_k u_* = -\frac{S_v^k}{S_{uv}^0}$
k - нечетно	$\partial_k v_* = -\frac{S_v^k}{S_{vv}^0}$	$\partial_k v_* = -\frac{S_u^k}{S_{uv}^0}$

Используя выражения для производных от (u_*, v_*) и четности $S^{k_1 \dots k_n}$, получаем для $Z_{k_1 k_2 k_3}$

	$(s+\alpha)$ - четно	$(s+\alpha)$ - нечетно
k_1, k_2, k_3 - четно	$-\frac{S_u^{k_1} S_u^{k_2} S_u^{k_3}}{S_{uu}^0} + \int S_u^0 S_u^{k_1 k_2 k_3}$ $+ \int (S_u^{k_1} S_u^{k_2 k_3} + \text{перестановки})$	$\frac{u_0}{3} \frac{S_v^{k_1} S_v^{k_2} S_v^{k_3}}{S_{uv}^0} - \int \frac{u}{3} S_v^0 S_v^{k_1 k_2 k_3} -$ $- \int \frac{u}{3} (S_v^{k_1} S_v^{k_2 k_3} + \text{перестановки})$
k_1, k_2 - четно k_3 - нечетно	0	0
k_1 - четно k_2, k_3 - нечетно	$\frac{u_0}{3} \frac{S_u^{k_1} S_v^{k_2} S_v^{k_3}}{S_{uu}^0} - \frac{S_u^{k_1} S_v^{k_2} S_v^{k_3}}{S_{vv}^0} + \int S_u^0 S_u^{k_1 k_2 k_3} +$ $+ \int (S_u^{k_1} S_u^{k_2 k_3} - \frac{u}{3} (S_v^{k_2} S_v^{k_1 k_3} + S_v^{k_3} S_v^{k_1 k_2}))$	$-\frac{S_v^{k_1} S_u^{k_2} S_u^{k_3}}{S_{uv}^0} - \int \frac{u}{3} S_v^0 S_v^{k_1 k_2 k_3} +$ $+ \int (S_u^{k_2} S_u^{k_1 k_3} + S_u^{k_3} S_u^{k_1 k_2} - \frac{u}{3} S_v^{k_1} S_v^{k_2 k_3})$
k_1, k_2, k_3 - нечетно	0	0

где неинтегральные слагаемые взяты при $u = u_0$, а интегралы беруться в пределах от 0 до u_0.

Рассмотрим случай $(s+\alpha)$ – четно и все k – четны, то есть верхнюю левую ячейку таблицы. В этом случае

$$Z_{k_1 k_2 k_3} = -\frac{S_u^{k_1} S_u^{k_2} S_u^{k_3}}{S_{uu}^0}\Big|_{u=u_0} + \int_0^{u_0} (S_u^0 S_u^{k_1 k_2 k_3} + S_u^{k_1} S_u^{k_2 k_3} + S_u^{k_2} S_u^{k_1 k_3} + S_u^{k_3} S_u^{k_1 k_2}) du. \quad (5.44)$$

Имеется две существенно различных области параметров k_i: $k_i < s$ и $k_i \geq s$. Рассмотрим всевозможные случаи с четными k_i.

5.5.1 $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s-1$, k_i – четно

В этом случае трехточечные числа сингулярны (5.38). После обезразмеривания получаем для них выражение (предполагаем что $k_3 > k_1, k_2$)

$$\mathcal{Z}_{k_1 k_2 k_3} = -\frac{Q_u^{k_1} Q_u^{k_2} Q_u^{k_3}}{(Q_u^0)'}\Big|_{x=1} + \int_0^1 Q_u^{k_3} Q_u^{k_1 k_2} dx \quad (5.45)$$

где мы перешли к безразмерным величинам и штрих означает производную по x. Два других интегральных члена отсутствуют в силу ортогональности полиномов Якоби и того, что степень полинома $S_u^{k_2 k_3}$ меньше степени полинома $S_u^{k_1}$. Рассуждение со вторым отсутствующим членом аналогично. Таким образом чтобы удовлетворить правила отбора, необходимо чтобы

$$\int_0^1 Q_u^{k_3} Q_u^{k_1k_2} dx = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad k_3 \le k_1 + k_2 \\ \frac{1}{p}, & \text{if} \quad k_3 > k_1 + k_2 \end{cases} \tag{5.46}$$

Отсюда

$$\boxed{Q_u^{k_1k_2} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\frac{s-k_1-k_2-\alpha-2}{2}} (6k + 4\alpha - 3) x^{2(\alpha-1)} P_k^{(0,\frac{2}{3}(2\alpha-3))}, \qquad 1 \le k_1, k_2 \le s-1} \tag{5.47}$$

5.5.2 $1 \le k_1, k_2 \le s-1$, $s \le k_3 \le p-2$, k_i – четно

Правила отбора нарушены, если $k_3 > k_1 + k_2$, или поскольку k_i – четны, это эквивалентно $k_3 \ge k_1 + k_2 + 2$. Поэтому трехточечные числа несингулярны (5.38) когда правила отбора нарушены.

С другой стороны если правила отбора выполнены, трехточечные числа сингулярны и выражение для них приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{k_1k_2k_3} = -\frac{Q_u^{k_1} Q_u^{k_2} Q_u^{k_3}}{(Q_u^0)'}\Big|_{x=1} + \int_0^1 Q_u^0 Q_u^{k_1k_2k_3} dx + \\ + \int_0^1 (Q_u^{k_1} Q_u^{k_2k_3} + Q_u^{k_2} Q_u^{k_1k_3} + Q_u^{k_3} Q_u^{k_1k_2}) dx. \end{aligned} \tag{5.48}$$

5.5.3 $1 \le k_1 \le s-1$, $s \le k_2, k_3 \le p-2$, k_i – четно

В этом случае трехточечные числа сингулярны (5.38). Выражение для них

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3} = -\frac{Q_u^{k_1} Q_u^{k_2} Q_u^{k_3}}{(Q_u^0)'}\Big|_{x=1} + \int_0^1 Q_u^{k_2} Q_u^{k_1k_3} dx. \tag{5.49}$$

Чтобы удовлетворить правила отбора требуем

$$\int_0^1 Q_u^{k_2} Q_u^{k_1k_3} dx = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad k_3 \le k_1 + k_2 \\ \frac{1}{p}, & \text{if} \quad k_3 > k_1 + k_2 \end{cases} \tag{5.50}$$

Откуда получаем

$$\boxed{Q_u^{k_1k_3} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\frac{k_3-k_1-s+\alpha-4}{2}} (6k + 9 - 4\alpha) x^{2(2-\alpha)} P_k^{(0,\frac{2}{3}(3-2\alpha))}, \qquad \begin{cases} 1 \le k_1 \le s-1 \\ s \le k_3 \le p-2 \end{cases}} \tag{5.51}$$

5.5.4 Сравнение с минимальной гравитцией

Вычислим ненулевые корреляционные числа

$$Z_0 = \frac{p}{(p+3)(p-3)} \tag{5.52}$$

$$Z_{kk} = \begin{cases} \frac{1}{p-3(k+1)}, & 1 \le k \le s-1, \quad k - \text{четно} \\ \frac{1}{3(k+1)-p}, & s \le k \le p-2, \quad k - \text{четно} \end{cases} \tag{5.53}$$

$$Z_{k_1k_2k_3} = -\frac{1}{p}, \qquad 1 \le k_i \le p-2, \quad k - \text{четно} \tag{5.54}$$

Величина, не зависящая от нормировок операторов и корреляторов

$$\frac{(Z_{k_1k_2k_3})^2 Z_0}{\prod_{i=1}^3 Z_{k_ik_i}} = \frac{\prod_{i=1}^3 |p-(k_i+1)q|}{p(p+q)(p-q)} \tag{5.55}$$

где $p = 3s+\alpha, q = 3$. Это выражение в точности совпадает с (2.10) при $m_i = 1, n_i = k_i+1$.

5.6 Четырехточечные корреляционные числа

Прямое вычисление для четных k_i дает

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} = Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} + Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} \tag{5.56}$$

где

$$Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} = \left(-\frac{Q''_u}{(Q'_u)^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 (Q_u^{k_i})'}{(Q'_u)^2} - \frac{\sum_{i<j} Q_u^{k_ik_j}}{Q'_u}\right)\Bigg|_{x=1} + \\ + \int_0^1 dx (Q_u^{k_1k_2}Q_u^{k_3k_4} + Q_u^{k_1k_3}Q_u^{k_2k_4} + Q_u^{k_1k_4}Q_u^{k_2k_3}) \tag{5.57}$$

$$Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} = \int_0^1 dx (Q_u^{k_1k_2k_3}Q_u^{k_4} + Q_u^{k_1k_2k_4}Q_u^{k_3} + Q_u^{k_1k_3k_4}Q_u^{k_2} + Q_u^{k_2k_3k_4}Q_u^{k_1} + Q_u^0 Q_u^{k_1k_2k_3k_4}) \tag{5.58}$$

где штрих означает производную по x. Будем предполагать что $k_1 \le k_2 \le k_3 \le k_4$

5.6.1 $1 \le k_1, k_2, k_3, k_4 \le s-1$

Размерный анализ дает что в этом случае четырехточечные числа сингулярны

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} \sim \mu^{s+1+\frac{\alpha}{3}-\frac{k_1+k_2+k_3+k_4+8}{2}} \tag{5.59}$$

Полиномы, участвующие в $Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}$ известны из предыдущих разделов, а полиномы, участвующие в $Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4}$ неизвестны.

Поскольку $k_1 \le k_2 \le k_3 \le k_4$, то ортогональность полиномов Якоби дает

$$Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} = \int_0^1 dx Q_u^{k_1k_2k_3} Q_u^{k_4} \tag{5.60}$$

Поскольку $Q_u^{k_4}$ – полином Якоби, то $Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4}$ автоматически равен нулю, когда $k_4 \leq k_1+k_2+k_3+2$.

Правила отбора

$$Z_{k_1k_2k_3k_4}=0, \qquad \text{если} \quad k_4>k_1+k_2+k_3 \tag{5.61}$$

То есть необходимо чтобы

$$\int_0^1 dx Q_u^{k_1k_2k_3}Q_u^{k_4}=\begin{cases}0, & k_4\leq k_1+k_2+k_3\\ -Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}, & k_4>k_1+k_2+k_3\end{cases} \tag{5.62}$$

Чтобы найти значения полиномов при $x=1$ в $Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}$ используем следующие свойства полиномов Якоби

$$\frac{d}{dy}\Big|_{y=1}P_n^{(0,b)}(y)=\frac{n(n+b+1)}{2} \tag{5.63}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\Big|_{y=1}P_n^{(0,b)}(y)=\frac{n(n-1)(n+b+1)(n+b+2)}{8} \tag{5.64}$$

Таким образом находим

$$(Q_u^0)'(1)=p, \qquad Q_u''(1)=2p(2\alpha-1)+\frac{p(s-\alpha)(3s+5\alpha)}{4} \tag{5.65}$$

$$\frac{d}{dx}|_{x=1}Q_u^k=2(\alpha-1)+\frac{(s-k-\alpha)(3s-3k+5\alpha-6)}{4}, \tag{5.66}$$

$$Q_u^{k_1k_2}(1)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\frac{s-k_1-k_2-\alpha-2}{2}}(6k+4\alpha-3)=\frac{(s-k_1-k_2-\alpha)(3s-3k_1-3k_2+5\alpha-12)}{4p} \tag{5.67}$$

$$\int_0^1 dx Q_u^{k_1k_2}Q_u^{k_3k_4}=\frac{(s-\bar{k}_{(12|34)}-\alpha)(3s-3\bar{k}_{12|34}+5\alpha-12)}{4p^2} \tag{5.68}$$

где $\bar{k}_{(12|34)}=\max\{k_1+k_2,k_3+k_4\}$.

Таким образом

$$Z_{k_1k_2k_3k_4}=\begin{cases}\frac{1}{4p^2}(2+k_1+k_2+k_3-k_4)(2p-3\sum_{i=1}^4(k_i+1)), & \text{if} \quad k_4>k_1+k_2+k_3\\ \frac{1}{2p^2}(1+k_1)(2p-3\sum_{i=1}^4(k_i+1)), & \text{if} \quad k_1+k_4\leq k_2+k_3\end{cases} \tag{5.69}$$

При $k_1+k_4\leq k_2+k_3$ выражение для

$$\frac{Z_{k_1k_2k_3k_4}Z_0^3}{\left(\prod_{i=1}^4 Z_{k_ik_i}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.70}$$

в точности совпадает с (2.11). Кроме того из правил отбора находим

$$Q_u^{k_1k_2k_3} = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\frac{s-k_1-k_2-k_3-\alpha-4}{2}} c_k x^{2(\alpha-1)} P_k^{(0,\frac{2}{3}(2\alpha-3))}(y) \tag{5.71}$$

где

$$c_k = \frac{3}{4}(6k+4\alpha-3)(2k+\sum_{i=1}^{3} k_i - s + \alpha + 2)(2k - \sum_{i=1}^{3} k_i - 2s - 2\alpha - 12) \tag{5.72}$$

5.6.2 $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s-1, s \leq k_4 \leq p-2$, k_i – четно

В этом случае анализ размерностей дает

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} \sim \mu^{\frac{k_4-k_1-k_2-k_3-4}{2}} \tag{5.73}$$

Поэтому если $k_4 \geq k_1+k_2+k_3+4$, то четырехточечные корреляционные числа несингулярны. В то же время конформные правила отбора нарушены, если $k_4 > k_1+k_2+k_3$. Поэтому имеется “окно” при $k_4 = k_1+k_2+k_3+2$ (поскольку k_i – четны), когда нужно отдельно проверить что четырехточечные корреляционные числа равны нулю.

Явное выражение для четырехточечных корреляционных чисел в этом случае остается прежним

$$Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} = \left(-\frac{Q_u''}{(Q_u')^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 (Q_u^{k_i})'}{(Q_u')^2} - \frac{\sum_{i<j} Q_u^{k_ik_j}}{Q_u'}\right)\Bigg|_{x=1} + \\ + \int_0^1 dx (Q_u^{k_1k_2}Q_u^{k_3k_4} + Q_u^{k_1k_3}Q_u^{k_2k_4} + Q_u^{k_1k_4}Q_u^{k_2k_3}) \tag{5.74}$$

$$Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} = \int_0^1 dx (Q_u^{k_1k_2k_3}Q_u^{k_4} + Q_u^{k_1k_2k_4}Q_u^{k_3} + Q_u^{k_1k_3k_4}Q_u^{k_2} + Q_u^{k_2k_3k_4}Q_u^{k_1} + Q_u^0 Q_u^{k_1k_2k_3k_4}) \tag{5.75}$$

Таким образом при $k_4 = k_1+k_2+k_3+2$ получаем, что должно выполняться нетривиальное тождество $Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} + Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} = 0$. Нетривиальным оно является поскольку мера интегрирования не является канонической для интегрируемых полиномов Якоби.

5.6.3 $1 \leq k_1, k_2 \leq s-1, s \leq k_3, k_4 \leq p-2$, k_i – четно

Из размерного анализа

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} \sim \mu^{\frac{k_3+k_4-k_1-k_2-4}{2}+1-s-\frac{\alpha}{3}} \tag{5.76}$$

получаем что в этом случае четырехточечные корреляционные числа сингулярны.

Выражение (5.56) сводится к

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} = Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} + \int_0^1 dx Q_u^{k_1k_2k_4} Q_u^{k_3} \tag{5.77}$$

То есть для выполнения правил отбора необходимо

$$\int_0^1 dx Q_u^{k_1k_2k_4} Q_u^{k_3} = \begin{cases} 0, & k_4 \leq k_1 + k_2 + k_3 \\ -Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}, & k_4 > k_1 + k_2 + k_3 \end{cases} \tag{5.78}$$

Несложно посчитать из свойств полиномов Якоби что

$$Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{cases} -\frac{1}{4p^2}(2 + k_1 + k_2 + k_3 - k_4)(2p + 3k_1 + 3k_2 - 3k_3 - 3k_4), & k_4 > k_1 + k_2 + k_3 \\ -\frac{1}{2p^2}(1 + k_1)(2p + 3k_1 + 3k_2 - 3k_3 - 3k_4), & k_1 + k_4 \leq k_2 + k_3 \end{cases} \tag{5.79}$$

Далее из значения $Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}$ при $k_4 > k_1 + k_2 + k_3$ и правил отбора (5.78) находим

$$Q_u^{k_1k_2k_4} = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\frac{k_4-k_1-k_2-s+\alpha-6}{2}} c_k x^{2(2-\alpha)} P_k^{(0,\frac{2}{3}(3-2\alpha))}(y) \tag{5.80}$$

где

$$c_k = \\ = \frac{1}{4}(6k + 9 - 4\alpha)(2 + k_1 + k_2 - k_4 + 2k + s - \alpha + 2)(2p + 3k_1 + 3k_2 - 3k_4 - 6k - 3s + 3\alpha - 6) \tag{5.81}$$

Кроме того из значения $Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4}$ при $k_1 + k_4 < k_2 + k_3$ находим, что величина

$$\frac{Z_{k_1k_2k_3k_4} Z_0^3}{\left(\prod_{i=1}^4 Z_{k_ik_i}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.82}$$

снова совпадает с результатом в минимальной гравитации (2.11).

5.6.4 $1 \leq k_1 \leq s-1, s \leq k_2, k_3, k_4 \leq p-2$, k_i – четно

Из размерного анализа

$$Z_{k_1k_2k_3k_4} \sim \mu^{\frac{k_2+k_3+k_4-k_1-2}{2}+1-2s-\frac{2\alpha}{3}} \tag{5.83}$$

четырехточечные числа сингулярны.

Выражения для них сводятся к

$$
\begin{aligned}
Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} &= \left(-\frac{Q''_u}{(Q'_u)^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 (Q^{k_i}_u)'}{(Q'_u)^2} - \frac{\sum_{i<j} Q^{k_ik_j}_u}{Q'_u} \right)\Bigg|_{x=1} \\
Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} &= \int_0^1 dx (Q^{k_2k_3k_4}_u Q^{k_1}_u + Q^0_u Q^{k_1k_2k_3k_4}_u)
\end{aligned} \tag{5.84}
$$

5.6.5 $s \le k_1 k_2, k_3, k_4 \le p-2$, k_i – четно

Из размерного анализа

$$
Z_{k_1k_2k_3k_4} \sim \mu^{\frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{2}+1-3s-\alpha} \tag{5.85}
$$

четырехточечные не сингулярны при $\sum_i k_i \ge 2(p-1)$. Выражения для них сводятся к

$$
\begin{aligned}
Z^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} &= \left(-\frac{Q''_u}{(Q'_u)^3} + \frac{\sum_{i=1}^4 (Q^{k_i}_u)'}{(Q'_u)^2} \right)\Bigg|_{x=1} \\
Z^{(I)}_{k_1k_2k_3k_4} &= \int_0^1 dx (Q^{k_1k_2k_3}_u Q^{k_4}_u + Q^{k_1k_2k_4}_u Q^{k_3}_u + Q^{k_1k_3k_4}_u Q^{k_2}_u + Q^{k_2k_3k_4}_u Q^{k_1}_u + Q^0_u Q^{k_1k_2k_3k_4}_u)
\end{aligned} \tag{5.86}
$$

6 Заключение

В этой работе мы показали, что можно подобрать резонансные соотношения между КдФ и Лиувиллевскими временами t_k и λ_k, а так же выбрать решение струнного уравнения таким образом, что конформные правила отбора для корреляционных чисел выполняются, а значения ненулевых корреляционных чисел совпадают с результатами в минимальной Лиувиллевской гравитации, полученными прямым интегрированием по пространству модулей. Случай $(2, 2s+1)$ минимальной гравитации и одноматричной модели в $(2s+1)$-критической точке был рассмотрен в [15]. Однако было не ясно каким образом эти рассуждения могут быть расширены на случай минимальной гравитации с произвольными (q, p). В этой работе мы рассмотрели случай $(3, 3s+\alpha)$ минимальной гравитации и двухматричной модели в $(3s+\alpha)$-критической точке. Кроме того относительно работы [15] были сделаны модификации и замечания, которые возможно позволят провести аналогичный анализ в произвольном случае. А именно можно было бы ожидать, что для произвольных (q, p) у струнного уравнения, как и в случае $(3, 3s+\alpha)$, имеются специальные решения (типа 5.26, 5.27), которые позволяют свести задачу к поиску полиномов от одной переменной. Так же можно ожидать, что в общей ситуации резонансные соотношения тоже определяются ортогональными полиномами Якоби $P^{(a,b)}_n$, как и в данной работе.

Приложение А. Доказательство рекурсионной формулы для гамильтонианов $H_{k,\alpha}$

Докажем что

$$\frac{\partial^2 H_{n,\alpha}}{\partial v^{q-\beta}\partial v^{q-\gamma}} = C^{\delta}_{\beta\gamma}\frac{\partial H_{n-1,\alpha}}{\partial v^{q-\delta}} \tag{A.1}$$

где

$$H_{k,\alpha} = -c_{k,\alpha} Res Q^{k+\frac{\alpha}{q}} = -c_{k,\alpha}S_{k,\alpha}, \qquad c_{k.\alpha} = \left[\frac{\alpha}{q}\left(\frac{\alpha}{q}+1\right)\dots\left(\frac{\alpha}{q}+k\right)\right]^{-1}. \tag{A.2}$$

Имеем полином Q

$$Q = p^q + \sum_{\alpha=1}^{q-1} u^{\alpha} p^{q-\alpha-1} \tag{A.3}$$

Так же нам понадобится обратная функция $p(Q)$, представленная как ряд Лорана по $z = Q^{\frac{1}{q}}$

$$p(Q) = z - \frac{1}{q}\sum_{\alpha=1}^{q-1}\frac{v^{\alpha}}{z^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right) \tag{A.4}$$

где

$$v^1 = u^1 \tag{A.5}$$
$$v^2 = u^2 \tag{A.6}$$
$$v^3 = u^3 - \frac{q-3}{2q}(u^1)^2 \tag{A.7}$$
$$\dots \tag{A.8}$$

Легко проверить что

$$v^{\alpha} = \frac{q}{\alpha} Res Q^{\frac{\alpha}{q}}. \tag{A.9}$$

Действительно

$$Res_{p=\infty} Q^{\frac{\alpha}{q}} = Res_{z=\infty} Q^{\frac{\alpha}{q}}\frac{dp}{dz} = Res_{z=\infty} z^{\alpha}\left(1 + \frac{1}{q}\sum_{\beta=0}^{q-1}\frac{\beta v^{\beta}}{z^{\beta+1}}\right) = \frac{\alpha}{q}v^{\alpha} \tag{A.10}$$

Докажем что

$$\phi_\alpha := \frac{\partial Q}{\partial v^{q-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dp}Q_+^{\frac{\alpha}{q}} \tag{A.11}$$

Это следует из серии равенств

$$\frac{\partial Q}{\partial v^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial v^\alpha}\frac{dQ}{dp} = \left(\frac{1}{q}\frac{1}{z^\alpha} + O\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right)\right)\frac{dQ}{dp} = \tag{A.12}$$

$$= \frac{1}{q}Q^{-\frac{\alpha}{q}}\frac{dQ}{dp} + O\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right)\frac{dQ}{dp} = \frac{1}{q-\alpha}\frac{d}{dp}Q^{\frac{q-\alpha}{q}} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{A.13}$$

И поскольку левая часть является полиномом по p, член $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ в правой части равен нулю. Это доказывает (A.11).

В координатах v^α метрика является плоской. Действительно, используя $\frac{\partial Q}{\partial v^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial v^\alpha}\frac{dQ}{dp}$, мы получаем

$$g_{\alpha\beta} = -q \cdot Res_{p=\infty}\frac{\phi_\alpha\phi_\beta}{Q'} = -qRes_{z=\infty}\frac{dQ}{dz}\frac{\partial p}{\partial v^{q-\alpha}}\frac{\partial p}{\partial v^{q-\beta}} = \delta_{\alpha+\beta,q} \tag{A.14}$$

Так же нам понадобиться следующее свойство структурных констант, которое можно найти в [12]

$$C_{\alpha\beta\gamma} = -q \cdot Res\frac{\phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma}{Q'} = -\frac{1}{\frac{\alpha}{q}(1+\frac{\alpha}{q})}\frac{\partial^2 S_{1,\alpha}}{\partial v^{q-\beta}\partial v^{q-\gamma}}. \tag{A.15}$$

Поскольку структурные константы симметричны, находим

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^{q-\alpha}\partial v^{q-\beta}\partial v^{q-\gamma}} \tag{A.16}$$

для некоторой функции F.

Таким образом

$$H_{1,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial v^{q-\alpha}}, \qquad C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial v^{q-\alpha}v^{q-\beta}}H_{1,\alpha}. \tag{A.17}$$

Решение струнного уравнения так же удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v^{q-\alpha}}{\partial t_{n,\beta}} = \frac{\partial}{\partial x}g^{\alpha\gamma}\frac{\partial H_{n+1,\beta}}{\partial v^{q-\gamma}}. \tag{A.18}$$

Возьмем это уравнение при $n=0$. Используя (A.17) получим

$$\frac{\partial v^{q-\alpha}}{\partial t_{0,\beta}} = C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial v^{q-\gamma}}{\partial x} \tag{A.19}$$

Используя коммутативность потоков (A.18) and (A.19), получим

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 H_{n,\delta}}{\partial v^{q-\gamma}\partial v^{q-\phi}} = C^{\gamma}_{\alpha\phi}\frac{\partial^2 H_{n,\delta}}{\partial v^{q-\gamma}\partial v^{q-\beta}} \tag{A.20}$$

В частности при $\phi = 1$ и используя

$$\frac{\partial H_{n,\alpha}}{\partial v^{q-1}} = H_{n-1,\alpha} \tag{A.21}$$

получаем рекурсионное соотношение

$$\frac{\partial^2 H_{n,\alpha}}{\partial v^{q-\beta}\partial v^{q-\gamma}} = C^{\delta}_{\beta\gamma}\frac{\partial H_{n-1,\alpha}}{\partial v^{q-\delta}} \tag{A.22}$$

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, *Phys.Lett.* **B103** (1981) 207–210.

[2] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, *Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory*, hep-th/9304011.

[3] P. Di Francesco, P. H. Ginsparg, and J. Zinn-Justin, *2-D Gravity and random matrices*, *Phys.Rept.* **254** (1995) 1–133, [hep-th/9306153].

[4] G. W. Moore, N. Seiberg, and M. Staudacher, *From loops to states in 2-D quantum gravity*, *Nucl.Phys.* **B362** (1991) 665–709.

[5] A. Belavin and A. Zamolodchikov, *Integrals over moduli spaces, ground ring, and four-point function in minimal Liouville gravity*, *Theor.Math.Phys.* **147** (2006) 729–754.

[6] A. Zamolodchikov, *Higher equations of motion in Liouville field theory*, *Int.J.Mod.Phys.* **A19S2** (2004) 510–523, [hep-th/0312279].

[7] A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, *Nucl.Phys.* **B241** (1984) 333–380.

[8] V. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. Zamolodchikov, *Fractal Structure of 2D Quantum Gravity*, *Mod.Phys.Lett.* **A3** (1988) 819.

[9] A. B. Zamolodchikov, *Three-point function in the minimal Liouville gravity*, *Theor.Math.Phys.* **142** (2005) 183–196.

[10] M. R. Douglas, *Strings in less than one-dimension and the generalized KdV hierarchies*, *Phys.Lett.* **B238** (1990) 176.

[11] P. H. Ginsparg, M. Goulian, M. Plesser, and J. Zinn-Justin, *(p, q) String actions*, *Nucl.Phys.* **B342** (1990) 539–563.

[12] R. Dijkgraaf, H. L. Verlinde, and E. P. Verlinde, *Topological strings in $d < 1$*, *Nucl.Phys.* **B352** (1991) 59–86.

[13] I. Krichever, *The Dispersionless Lax equations and topological minimal models*, *Commun.Math.Phys.* **143** (1992) 415–429.

[14] B. Dubrovin, *Integrable systems in topological field theory*, *Nucl.Phys.* **B379** (1992) 627–689.

[15] A. Belavin and A. Zamolodchikov, *On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models*, *J.Phys.* **A42** (2009) 304004, [arXiv:0811.0450].