Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
На степень магистра
Студента 6 курса
Сподынейко Л. А.

Матричные модели и амплитуды на торе

Научный руководитель
Белавин А. А.

Москва, 2014

Содержание

1 Введение

В данной работе мы будем изучать два подхода к двумерной квантовой гравитации. А именно, минимальную Лиувииллевскую гравитацию и матричные модели. Оба подхода основаны на вычисление суммы по двумерным флуктуирующим поверхностям

$$Z = \sum_{\text{surfaces}} e^{-S}. \tag{1}$$

Эта сумма содержит вклады поверхностей различных топологий, которые в двумерном случае нумеруются родом h.

Теория квантовой гравитации может быть определена через функциональный интеграл по метрике и полям материи. Как было показано в [1], после выбора конформной калибровки для метрики, теория разделяется на две практически независимые части: изначальную теорию полей материи и теорию Лиувилля для скалярного поля. Этот подход был соответственно назван Лиувиллевской гравитацией. Вычисление корреляционных чисел в Лиувиллевской гравитации является сложной проблемой. Недавно прогресс в этом был достигнут в статье [3], где было замечено, что проблема вычисление корреляционных чисел упрощается в случае так называемой минимальной Лиувиллевской гравитации, которая является теорией Лиувиллевской гравитации с полями материи из минимальной модели конформной теории поля [4]. С использованием высших уравнений движение минимальной Лиувиллевской гравитации [5] трех- и четырехточечные корреляционные числа для поверхностей рода 0 были в работах Белавина и Замолодчикова в [3]. Различные минимальные модели конформной теории поля нумеруются двумя взаимно простыми числами q и p при этом теория имеет центральный заряд $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ (q,p) with $q < p$. Поэтому, различные модели МЛГ также нумеруются этими числами. Мы будем называть (q,p) минимальной Лиувиллевской гравитацией Лиувиллевскую гравитацию с полями материи из (q,p) минимальной модели конформной теории поля

Другой подход к флуктуирующим двумерным поверхностям был предложен в [6–11]. Он был основан на приближении непрерывной двумерной поверхности ее дискретной триангуляцией и тем самым заменой функционального интеграла по непрерывным поверхностям обычным интегрированием в конечномерном пространстве. В силу того, что технически это было эквивалентно интегрированию по матрицам этот поход называется матричными моделями. Нам интересен некоторый придел этих моделей, в котором доминируют вклады поверхностей с большим числом вершин. Этот предел достигается устремлением размеров матриц к бесконечности с одновременной подстройкой параметров теории. Эта процедура подстройки параметров при которой триангуляции с большим числом вершин доминируют аналогична фазовому переходу второго рода в теории конденсированного состояния. Более того, как и в теории конденсированного состояния в матричных моделях существуют мульткритические точки. Мы будем называть теорию содержащую $q-1$ различных матриц в ее p-критической точке (q,p) матричной моделью.

Дуглас показал в [17], что проблема вычисления статистической суммы в матричных моделях может быть переформулирована в терминах так называемого струнного уравнения. Решение этого уравнения зависит от набора непрерывных переменных $\tau_{m,n}$ называемых временами. Им было также замечено, что эти времена имеют те же скейлинговые размерности как и константы связи $\lambda_{m,n}$ в минимальной Лиувиллевской гравитации. В связи с этим считалось, что матричные модели дают те же ответы для корреляционных функций, критических показателей и т.д как и Лиувиллевская гравитация. Однако, как показал Мур и др. в [12], связь между эти теориями не такая прямая. Они заметили, что из-за контактных членов корреляционные функции в матричных моделях не удовлетворяют правилам слияния конформной теории поля. Например, конформная симметрия требует, чтобы все одноточечные корреляционные функции в минимальной Лиувиллевской гравитации были равны нулю, но они не равны нулю в матричных моделях. Мур и др. также предложили решение этой проблемы. Их идея заключалась в том что времена $\tau_{m,n}$ в матричных моделях и константы связи $\lambda_{m,n}$ в минимальной Лиувиллевской гравитации связаны нелинейными резонансными соотношениями вида

$$\tau_{m,n} = \lambda_{m,n} + \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2} C_{m,n}^{m_1n_1,m_2n_2} \lambda_{m_1n_1}\lambda_{m_2n_2} + \ldots . \tag{2}$$

Требование того, чтобы корреляционные функции в минимальной Лиувиллевской гравитации удовлетворяли правилам слияния, дает уравнения на коэффициенты в этих соотношениях из которых они могут быть найдены. Для одно- и двухточеных корреляторов в [12] были найдены некоторые из этих коэффициентов. Их работа была продолжена в [13, 14], где соответствие между матричными моделями и минимальной Лиувиллевской гравитацией было распространено на трех- и четырехточечные корреляторы.

Все упомянутые выше статьи касались амплитуд на сфере, т.е. в них рассматривать только та часть статистической суммы флуктуирующих поверхностей, в которых сумма шла по поверхностям топологии сферы. Развитие этих результатов для амплитуд на торе было сделано для $(2, p)$ моделей в [15]. Идея статьи [15] заключается в следующем. Резонансные соотношения могут быть вычислены с помощью известной формы корреляционных чисел в матричных моделях на сфере и с использованием правил слияния конформной теории поля. Так как резонансные соотношения не зависят от рода, те же соотношения дают соответствие между амплитудами на торе в матричных моделях и минмальной Лиувиллевской гравитации. Поэтому, используя эти соотношения и явный вид амплитуд на торе в матричных моделях, мы можем найти корреляционные функции минимальной Лиувиллевской гравитации на торе. Заметим, что прямое вычисление амплитуд на торе в Лиувиллевской гравитации имеет ряд технических сложностей и не было еще проведено. Для случая моделей типа $(2, p)$ это было проделано в [15] и их результаты для амплитуд на торе в минималньой Лиувиллевской гравитации были подтверждены численными вычислениями в [16].

Цель данной работы развитие упомянутых результатов до случая $(3, p)$ моделей: мы найдем статистическую сумму для поверхностей рода ноль в $(3, p)$, также используя явный вид резонансных соотношений найденный в [14], мы найдем одно- и двухточечные корреляционные числа на торе в минимальной Лиувиллевской гравитации.

2 Матричные модели

Матричные модели возникают как инструмент для вычисления статистической суммы двумерных флуктуирующих дискретных поверхностей. При определенной подстройке параметров теории, поверхности с большим числом узлов начинают давать основной вклад в статистическую сумму и многие величины, такие как например струнная восприимчивость совпадают с аналогичными величинами в Лиувиллевской гравитации. Это наблюдение дало надежду, что изучение матричных моделей прольет свет на непертурбативные эффекты в теории струн.

2.1 Одноматричные Модели

2.1.1 Квантовая Гравитация и Суммирование по Дискретным Поверхностям

Для демонстрации метода мы рассмотрим самый простой случай двумерной квантовой гравитации без материи. Статистическая сумма для это модели дается выражением

$$Z = \sum_h \int \mathcal{D}g \, e^{-\beta A + \gamma \chi}, \tag{3}$$

где сумма берется по родам поверхностей, β и γ – две константы, $A = \int \sqrt{g}$ – площадь поверхности и $\chi = \frac{1}{4\pi} \int \sqrt{g} R = 2 - 2h$ - эйлерова характеристика поверхности.

Взятие интеграла по всем поверхностям является непростой задачей. Поэтому имеет смысл попытаться приблизить его более простой суммой по триангуляциям. А именно, вместо интегрирования по метрикам мы будем суммировать по всем возможным триангуляциям. Если мы положим все треугольники в триангуляциях равносторонними, то площадь поверхности перепишется как $A = \frac{1}{3} \sum_i N_i$, а кривизна как $R_i = 2\pi(6 - N_i)/N_i$, где мы ввели обозначение N_i – число ребер выходящее из i-ой вершины.

С другой стороны такая сумма по триангуляциям совпадает с разложением по связным феймановским диаграмма для действия

$$e^Z = \int dM e^{-\frac{1}{2} \mathrm{tr}\, M^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \mathrm{tr}\, M^3}, \tag{4}$$

где M – эрмитова матрица размера N, $g = e^{-\beta}$ и размер матрицы $N = e^{\gamma}$. В левой части этой формулы стоит e^Z, т.к. статистическая сумма в (3) состоит только из связных триангуляций.

2.1.2 Двойной Скейлинговый Предел

Если изменить нормировку матриц как $M \to \sqrt{N} M$, то матричное действие примет вид $N \mathrm{tr}\, \left(-\frac{1}{2} M^2 + g M^3\right)$. Такая нормировка облегчает нахождение степени множителя N для произвольной диаграммы. Каждая вершина дает вклад N, каждое ребро дает вклад N^{-1} и каждая петля дает фактор N из суммирования по индексам. В результате каждая диаграмма имеет множитель N равный

$$N^{V-E+F} = N^{\chi} = N^{2-2h}, \tag{5}$$

где V, E, F – число вершин, ребер и граней соответственно, χ – эйлерова характеристика поверхности связанной с этой диаграммой. В результате мы получаем следующее разложение статистической суммы при $N \to \infty$

$$Z(g) = N^2 Z_0(g) + Z_1(g) + N^{-2} Z_2(g) + \cdots = \sum_h N^{2-2h} Z_h(g), \tag{6}$$

где Z_h содержит вклады от поверхностей рода h. Получается, что в простом пределе $N \to \infty$ выживает только вклад поверхностей топологии сферы. Однако, оказывается, что функции $Z_h(g)$ расходятся при стремлении $g \to g_c$. Это происходит из-за расходимости в теории возмущений по g, а именно

$$Z_h(g) \sim \sum_n n^{(\Gamma_{\mathrm{str}}-2)\chi/2-1} \left(\frac{g}{g_c}\right)^n \sim (g - g_c)^{(2-\Gamma_{\mathrm{str}})\chi/2}, \tag{7}$$

где n – число вершин, а g_c – некоторое критической значение константы связи. Важно, что эта расходимость в теории возмущений является локальной и соответственно g_c одинаково для всех родов. Если мы, вместо наивного предела $N \to \infty$, будем использовать так называемый двойной скелинговый предел, в котором $N \to \infty$ и $g \to g_c$ так, что величина $\kappa = N(g - g_c)^{(2-\Gamma_{\rm str})/2}$ остается конечной. Тогда, статсумма будет раскладываться как

$$Z = \kappa^{-2} Z_0 + Z_1 + \kappa^2 Z_2 + \cdots = \sum_h \kappa^{2h-2} Z_h, \tag{8}$$

в этом пределе вклады высших родов не подавлены.

2.1.3 Решение Одноматричной Модели и Струнное Уравнение Дугласа

Мы будем решать матричную модель, используя метод ортогональных полиномов. Для примера рассмотрим следующее действие

$$]e^Z = \int dM\, e^{-\operatorname{tr} V(M)} = \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i\, \Delta^2(\lambda)\, e^{-\sum_i V(\lambda_i)}, \tag{9}$$

где $V(x)$ - полиномиальный потенциал и мы перешли от интегрирования по матрицам к интегрированию по собственным значениям. При этом возникает якобиан равный квадрату определителя Вандермонда $\Delta(\lambda) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$.

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся методом ортогональных полиномов. Введем полиномы $\Pi_n = \frac{1}{\sqrt{h_n}}\lambda^n + \ldots$ со скалярным произведением

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{-V(\lambda)}\, \Pi_n\, \Pi_m = \delta_{nm}. \tag{10}$$

В терминах этих полиномов определитель Вандермонда выражается как

$$\Delta(\lambda) = \det \lambda_i^{j-1} = \prod_{k=0}^{N-1} \sqrt{h_k}\, \det \Pi_{j-1}(\lambda_i). \tag{11}$$

Используя стандартную формулу для детерминанта, мы получаем для $\Delta(\lambda)$

$$\det \Pi_{j-1}(\lambda_i) = \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} \prod_k \Pi_{\pi(k)-1}(\lambda_k), \tag{12}$$

где сумма идет по перестановкам π, а $\operatorname{sgn}\pi$ – четность перестановки. Когда мы раскроем $\Delta^2(\lambda)$ по этой формуле, видно, что из-за свойства ортогональности полиномов, ненулевой вклад будет только от слагаемых где все $\Pi_i(\lambda)$ из одного детерминанта спарено с таким же членом из второго. Всего получается $N!$ одинаковых ненулевых членов, в итоге для статсуммы мы получаем

$$e^Z = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i = N!\, h_0^N \prod_{i=1}^{N_1} r_i^{N-k}, \tag{13}$$

где мы ввели обозначение $r_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}$. Переходя к пределу $N \to \infty$ в этой формуле с точностью до несущественной константы мы получаем

$$\frac{1}{N^2} Z = \frac{1}{N} \sum_i \left(1 - \frac{i}{N}\right) \ln r_i \sim \int d\xi\, (1-\xi) \ln r(\xi), \tag{14}$$

где мы заменили i/N на непрерывную переменную ξ, а также коэффициенты r_i/N на функцию $r(\xi)$. Т.е. теперь задача о вычислении статсуммы свелась к вычислению функции $r(\xi)$. Мы сведем задачу о нахождении $r(\xi)$ к операторному уравнению. Для этого введем матрицу

$$\lambda \Pi_n = \sum_m Q_{nm} \Pi_m. \tag{15}$$

Или, скалярно умножая левую и правую часть на Π_m,

$$Q_{nm} = \int d\lambda \, e^{-V} \, \lambda \, \Pi_n \Pi_m. \tag{16}$$

Заметим, что в силу того, что полиномы ортогональны, а также того что потенциал является симметричным, можно найти

$$Q_{nm} = \sqrt{r_{n+1}} \delta_{m,n+1} + \sqrt{r_n} \delta_{m+1,n}. \tag{17}$$

Также введем матрицу $P = \frac{1}{2}(A - A^T)$, где A это матрица определяемая как

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_n = \sum_m A_{nm} \Pi_m. \tag{18}$$

Важно, что эти матрицы удовлетворяют уравнению

$$[P, Q] = 1. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь двойной скейлинговый предел этих операторов. Для этого перейдем от переменной ξ к переменной x по формуле $g_c - \xi g = g_c a^2 x$ и используем анзац $r(\xi) = r_c(1 + au(x))$, $1/N = a^{5/2}$, где мы рассматриваем предел $a \to 0$. Тогда в пределе для оператора Q получим

$$Q = r_c^{1/2}(1 + au(x))^{\frac{1}{2}} \exp(-a^{1/2} \frac{d}{dx}) + r_c^{1/2}(1 + au(x))^{\frac{1}{2}} \exp(a^{1/2} \frac{d}{dx}) \tag{20}$$

В ведущем порядке по a

$$Q = 2r_c^{1/2} + ar_c^{1/2} \left(u(x) + \frac{d^2}{dx^2} \right) + \dots \tag{21}$$

Оператор P в этом пределе принимает вид

$$P = d^3 - \frac{3}{4}\{u, d\} = \left(Q^{3/2}\right)_+, \tag{22}$$

где индекс + обозначает дифференциальную часть псевдодифференциального оператора. Заметим, что P является дифференциальным оператором степени 3. Однако, при специальном устремлении параметров действия, что соответствует критической точке более высокого порядка, он становиться оператором более высокого порядка. В p-критической точке он имеет вид

$$P = \left(Q^{p/2}\right)_+. \tag{23}$$

Статистическая сумма в этом пределе имеет вид

$$Z(z) \sim \int_{a^{-2}}^{z} dx \, (z - x) u(x), \tag{24}$$

где z определяется как $g_c - g = g_c a^2 z$. Дифференцированием этого выражения мы получаем

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = u(z). \tag{25}$$

В результате мы свели задачу о вычислении статистической суммы к операторному уравнению $[P, Q] = 1$ для функции $u(x)$.

2.2 Мультиматричные Модели

Матричные модели допускают обобщение, в котором вместо одной матрицы M используется несколько матриц M_i, где $i = 1, \ldots, q-1$. Статистическая сумма такой модели имеет вид

$$e^Z = \int \prod_{\alpha=1}^{q-1} dM^{(\alpha)}\, e^{-\sum_{\alpha=1}^{q-1} \operatorname{tr} V_\alpha(M^{(\alpha)}) + \sum_{\alpha=1}^{q-2} c_\alpha \operatorname{tr} M^{(\alpha)} M^{(\alpha+1)}}, \tag{26}$$

где $M^{(\alpha)}$ – эрмитовы матрицы размера N, V_α – полиномиальные потенциалы, а c_α – некоторые константы.

2.2.1 Обобщенный Метод Ортогональных Полиномов

Также как и в случае одноматричной модели для начало удобно перейти от интегрирования по эрмитовым матрицам к интегрированию по собственным значениям

$$e^Z = \int \prod_{\substack{\alpha=1,\ldots,q-1 \\ i=1,\ldots,N}} d\lambda_i^{(\alpha)}\, \Delta(\lambda^{(1)}) e^{-\sum_i S(\lambda_i^{(\alpha)})} \Delta(\lambda^{(q-1)}), \tag{27}$$

где $\lambda_i^{(\alpha)}$ – собственные значения матрицы $M^{(\alpha)}$ и мы ввели обозначения $S(M^{(\alpha)}) = \sum_{\alpha=1}^{q-1} \operatorname{tr} V_i(M^{(\alpha)}) - \sum_{\alpha=1}^{q-2} c_\alpha \operatorname{tr} M^{(\alpha)} M^{(\alpha+1)}$ и $\Delta(\lambda^{(\alpha)}) = \prod_{i<j} (\lambda_i^{(\alpha)} - \lambda_j^{(\alpha)})$.

Для вычисления этой статсуммы введем следующий набор ортонормированных полиномов $\Pi_n(\lambda)$ и $\widetilde{\Pi}_m(\lambda)$, таких что

$$\int \prod_{\alpha=1,\ldots,q-1} d\lambda^{(\alpha)} e^{-S(\lambda^{(\alpha)})} \Pi_n(\lambda^{(1)}) \widetilde{\Pi}_m(\lambda^{(q-1)}) = \delta_{mn} \tag{28}$$

Определим теперь матрицы Q и P по формулам

$$\int \prod_{\alpha=1,\ldots,q-1} d\lambda^{(\alpha)} e^{-S(\lambda^{(\alpha)})} \lambda^{(1)} \Pi_n(\lambda^{(1)}) \widetilde{\Pi}_m(\lambda^{(q-1)}) = Q_{nm}, \tag{29}$$

$$\int \prod_{\alpha=1,\ldots,q-1} d\lambda^{(\alpha)} \frac{d\, e^{-S(\lambda^{(\alpha)})}}{d\lambda^{(1)}} \Pi_n(\lambda^{(1)}) \widetilde{\Pi}_m(\lambda^{(q-1)}) = P_{nm}. \tag{30}$$

Аналогично случаю одноматричной модели мы можем перейти к двойному скейлинговому пределу. В этом пределе матрица Q становиться дифференциальным оператором порядка q. Точнее

$$Q = d^q + \sum_{\alpha=1}^{q-1} u_\alpha(x) d^{q-\alpha-1}, \tag{31}$$

где $u_\alpha(x)$ некоторые функции переменной x, которая является несколько преобразованным индексом n/N, и d – оператор дифференцирования по x. Оператор P в этом пределе имеет вид

$$P = \left(Q^{\frac{p}{q}}\right)_+, \tag{32}$$

где p – порядок критической точки в которой мы рассматриваем систему, индекс $+$ обозначает дифференциальную часть псевдодифференциального оператора.

Также аналогично случаю одноматричной модели для статистической суммы выполняется уравнение

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = u_1(x). \tag{33}$$

2.2.2 Деформация Критической Точки

Переходя к двойному скейлингову пределу, мы можем рассматривать теорию не точно в критической точке, а некотором малом отклонении от нее. Такое отклонение характеризуется набором чисел $\tau_{m,n}$ с $m = 1, \ldots, q-1$ и $n = 1, \ldots, p-1$. В этом случае оператор Q сохраняет свой вид, а оператор P становиться

$$P = \left(Q^{\frac{p}{q}} + \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{n=1}^{p-1} \tau_{m,n} Q^{\frac{|pm-qn|}{q}-1} \right)_+. \tag{34}$$

Уравнения $[P, Q] = 1$ и $\frac{d^2 Z}{dx^2} = u_1(x)$ в этом случае определяют Z как функцию от параметров $\tau_{m,n}$. Более того т.к. фактически $\tau_{m,n}$ являются отклонением коэффициентов полиномов V_α и коэффициентов c_α в действии $S[M^{(\alpha)}]$ от их критических значений, то естественно их понимать как деформацию действия для критической модели некоторыми массивными операторами

$$S = S_{\text{crit}} + \sum_{m,n} \tau_{m,n} O_{m,n}. \tag{35}$$

Это рассуждение мотивирует следующее определение для корреляционных чисел

$$\langle O_{m_1 n_1} O_{m_2 n_2} \ldots O_{m_N n_N} \rangle = \frac{\partial^N Z}{\partial \tau_{m_1 n_1} \ldots \partial \tau_{m_N n_N}} \Big|_{\tau_{1,2}=\tau_{2,1}=\cdots=\tau_{q-1,p-1}=0}, \tag{36}$$

где производные взяты в точке где все $\tau_{m,n}$, кроме $\tau_{1,1}$ равны нулю.

В дальнейшем мы будем называть параметры $\tau_{m,n}$ временами.

2.2.3 Статистическая Сумма на Торе

Определенная выше статистическая сумма содержит в себе вклад триангулированных поверхностей всех родов. Ее можно разбить на сумму вкладов каждого рода в отдельности

$$Z[\tau_{m,n}] = \sum_{h=0}^{\infty} Z_h[\tau_{m,n}]. \tag{37}$$

В этом разделе нам будет удобно использовать обозначение $Z[\tau_{m,n}]$, чтобы явно подчеркнуть зависимость статистической суммы Z от времен $\tau_{m,n}$, где $m = 1, \ldots, q$ и $n = 1, \ldots, p$. В данной работе мы интересуемся вкладом поверхностей рода 1 в статсумму. Поэтому нам нужен метод для того, чтобы выделять этот вклад из полной статсуммы.

Для этого мы используем следующее скейлинговое свойство статистической суммы [11, 19, 20]

$$Z[\varepsilon^{-\frac{2\delta_{m,n}}{\gamma}} \tau_{m,n}] = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^{2(h-1)} Z_h[\tau_{m,n}], \tag{38}$$

где $\gamma = 1 + \frac{p}{q}$, и гравитационные размерности определены как

$$\delta_{m,n} = \frac{p + q - |pm - qn|}{2q}. \tag{39}$$

В итоге, вклад поверхностей рода 1 в полной статсумме может быть найдет как член порядка ε^0 в разложении $Z[\varepsilon^{-\frac{2\delta_{m,n}}{\gamma}}\tau_{m,n}]$ по ε. Более того, множители $\varepsilon^{-\frac{2\delta_{m,n}}{\gamma}}$ в (38) могут быть получены формальной заменой $\frac{d}{dx} \to \varepsilon\frac{d}{dx}$ в определении операторов Q и P. Это легко показать, используй размерный анализ.

3 Лиувилевская Гравитация

3.1 Минимальные Модели Конформной Теории Поля

3.2 Минимальная Лиувилевская Гравитация

Известно, что любая конформно инвариантная теория поля в двух измерениях может быть сформулирована в искривленном пространстве, которое подчиняется уравнениям гравитации. Поляков показал [1], что в конформной калибровке для метрического тензора $g_{\mu\nu} = e^{\varphi}\hat{g}_{\mu\nu}$, эта теория разделяется на две почти независимые части: изначальную конформную теорию и Лиувиллевскую теорию скаляроного поля φ с действием

$$S_L = \frac{1}{4\pi}\int_M \sqrt{\hat{g}}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + Q\hat{R}\varphi + 4\pi\mu e^{2b\varphi}\right)d^2x, \tag{40}$$

где μ – космологическая постоянная, M – двумерное многообразие, $\hat{R}$ – Риччи скаляр для метрики $\hat{g}_{\mu\nu}$, а константы Q и b определяются через центральный заряд теории Лиувилля через соотношения

$$c_L = 1 + 6Q^2 = 1 + 6(b + b^{-1})^2. \tag{41}$$

Причем центральный заряд для теории Лиувилля связан с центральным зарядом изначальной конформной теории условием отсутствия конформной аномалии $c_L + c_M = 26$, где c_M – центральный заряд конформной теории.

В силу выше указанного, такая теория называется Лиувиллевской гравитацией. Если изначальная теория было минимальной модель конформной теории поля [4], то эта модель называется Минимальной Лиувиллевской гравитацией (МЛГ). Мы отсылаем читателя для более подробного изложения к другим источникам [19, 22].

(q,p) минимальная модель конформной теории поля [4] имеет центральный заряд $c_M = 1 - \frac{(p-q)^2}{6pq}$. Она состоит из конченого числа примарных полей $\Phi_{m,n}$, где $m = 1,\ldots,q-1$ и $n = 1,\ldots,p-1$. Из-за отражательной симметрии ($\Phi_{q-m,p-n} = \Phi_{m,n}$), только половина этих полей независима. В МЛГ эти поля "одеваются"скалярным полем

$$O_{m,n} = \int \Phi_{m,n}e^{2b\delta_{m,n}\varphi(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x, \tag{42}$$

где $b = \sqrt{q/p}$, интегрирование происходит по двумерному многообразию M и гравитационные размерности $\delta_{m,n}$ совпадают со своим определением в матричных моделях (39).

В данной работе нас будет интересовать статистическая сумма определяемая как

$$Z[\lambda] = \left\langle \exp\left(\sum_{(m,n)}\lambda_{m,n}O_{m,n}\right)\right\rangle, \tag{43}$$

где $\langle\ldots\rangle$ обозначает интегрирование по траекториям с действием $S = S_L + S_M$. На это выражение можно смотреть не как на корреляционную функцию полей, а как на статистическую сумму для модели, у которой действие деформировано операторами $O_{m,n}$ с константами связи $\lambda_{m,n}$.

Корреляционные числа полей $O_{m,n}$ подчиняются уравнению

$$\langle O_{m_1n_1}O_{m_2n_2}\dots O_{m_Nn_N}\rangle = \frac{\partial^N Z[\lambda]}{\partial\lambda_{m_1n_1}\dots\partial\lambda_{m_Nn_N}}\Big|_{\lambda_{m,n}=0}, \tag{44}$$

где все производные взяты в точке с $\lambda_{m,n}=0$ для всех $m=1,\dots,q-1$ and $n=1,\dots,p-1$.

3.3 Резонансные Соотношения

Оба подхода, непрерывный и дискретный, к двумерной квантовой гравитации должны приводить к одним ответам для корреляционных чисел и прочего в силу того что они описывают одну и ту же систему. Однако, как это было замечен в [12], есть некоторый произвол из-за присутствия контактных членов в корреляционных функциях и эти модели дают разные результаты. Эта проблема может быть решена с помощью нелинейных резонансных соотношений вида

$$\tau_{m,n} = \lambda_{m,n} + \sum_{m_1,n_1} C_{m,n}^{(m_1,n_1)(m_2,n_2)}\lambda_{m_1,n_1}\lambda_{m_2,n_2} + \dots, \tag{45}$$

где все слагаемые удовлетворяют условию резонанса: гравитационные размерности всех члена должны совпадать. Т.е. корреляционные числа, вычисленные с помощью матричных моделей, будут совпадать с корреляционными числами, вычисленными в МЛГ, если выразить времена $\tau_{m,n}$ через константы связи $\lambda_{m,n}$ соотношениями (45).

4 Вычисление Статистической Суммы

4.1 Постановка Задачи

Основная цель данной работы это вычисление статистической суммы и корреляционных чисел для $(3,p)$ матричных моделей и $(3,p)$ минимальной Лиувиллевской гравитации на торе. Отправной точкой наших вычислений будет струнное уравнение Дугласа [17].

Напомним его формулировку. Определим два дифференциальных оператора

$$Q = (\varepsilon d)^q + \sum_{\alpha=1}^{q-1} u_\alpha(x)(\varepsilon d)^{q-\alpha-1}, \tag{46}$$

$$P = \left(Q^{\frac{p}{q}} + \sum_{m=1}^{q-1}\sum_{n=1}^{p-1}\tau_{m,n}Q^{\frac{|pm-qn|}{q}-1}\right)_+, \tag{47}$$

где $u_\alpha(x)$ – функции переменной x, d – производная по x и ε – вспомогательный параметр. Заметьте, что члены с $|pm-qn|<q$ не дают вклада в P. Струнное уравнение Дугласа имеет вид

$$[P,Q]=1. \tag{48}$$

Оно эквивалентно системе дифференциальных уравнений на функции $u_\alpha(x)$, из которых они в принципе могут быть определены. Статистическая сумма определяется выражением

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = u_1^*(x), \tag{49}$$

где $u_\alpha^*(x)$ – специальным образом выбранное решение уравнения (48). Все эти уравнения неявно определяют Z как функцию времен $\tau_{m,n}$ (как будет ясно из дальнейшего x совпадает с одним из времен).

Нам будет удобно использовать переформулировку этих уравнений в терминах принципа наименьшего действия [18]. Определим действие

$$S[u_\alpha] = \mathrm{Res}\left(Q^{\frac{p}{q}+1} + \sum_{m=1}^{q-1}\sum_{n=1}^{p-1}\tau_{m,n}Q^{\frac{|pm-qn|}{q}}\right), \tag{50}$$

где Res выдает значение коэффициента при d^{-1} со знаком минус проинтегрированного по x. В терминах действия уравнение Дугласа принимает вид

$$\frac{\delta S[u_\alpha]}{\delta u_\alpha(x)} = 0, \tag{51}$$

где $\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)}$ это вариационная производная по отношению к функции $u_\alpha(x)$. Уравнения (50) и (51) могут быть получены интегрированием формулы (48). Заметьте, что $S[u_\alpha]$ зависит от большего числа времен чем оператор P. Дополнительные времена с (m,n) такими что $|pm-qn|<q$ являются константами интегрирования, причем x одно из них.

Для того, чтобы найти статистическую сумму для тора, необходимо найти решения этих уравнений Дугласа до второго порядка по ε. Это будет сделано в следующем разделе.

После того как вычислена статистическая сумма, можно найти корреляционные числа в матричных моделях, используя формулу (36). А также используя явный вид резонансных соотношений полученных в [14], мы можем найти также корреляционные числа в МЛГ. Эти вычисления являются главным результатом данной работы.

4.2 Вычисление Статистической Суммы

В данном разделе мы найдем статистическую сумму для $(3,p)$ матричной моделей на торе. Данное вычисление является достаточно громоздким и техническим, поэтому мы сформулируем только основные идеи расчета и результат, а более подробное изложение приведем в аппендиксе. Читателю следует также помнить, что мы рассматриваем специальный случай $q=3$.

Как было указано вклад поверхностей рода 1 в статистическую сумму дается членом порядка ε^0 в полной статистической сумме $Z[\varepsilon]$ (в этом разделе нам будет удобно записывать зависимость от ε как от отдельной переменной, например $S[u_\alpha,\varepsilon\,|\tau_{m,n}] = S[u_\alpha\,|\varepsilon^{-\frac{2\delta_{m,n}}{\gamma}}\tau_{m,n}]$, где мы явно написали зависимость от времен в действии). Как следует из уравнения (49), порядок ε^0 отвечает порядку ε^2 в решении струнного уравнения $u_1^*(x,\varepsilon)$. Поэтому нам нужно держать члены только до второго порядка по эпсилон в струнном уравнении и, соответственно, в струнном действии $S[u_\alpha(x),\varepsilon]$. С этой точностью выражения для действия и решения имеют вид

$$S[u_\alpha,\varepsilon] = S^{(0)}[u_\alpha] + \varepsilon S^{(1)}[u_\alpha] + \varepsilon^2 S^{(2)}[u_\alpha] + \ldots, \tag{52}$$

$$u_\alpha^*(x,\varepsilon) = u_\alpha^{*\,(0)}(x) + \varepsilon u_\alpha^{*\,(1)}(x) + \varepsilon^2 u_\alpha^{*\,(2)}(x) + \ldots. \tag{53}$$

Их вычисление приведено в приложении. Последним шагом является интегрирование уравнения (49). Ответ имеет вид

$$Z_1^{(3,p)} = -\frac{1}{8}\log\det\frac{\delta^2 S^{(0)}[u_\alpha]}{\delta u_\alpha \delta u_\beta}\Big|_{u_\alpha = u_\alpha^{*\,(0)}}. \tag{54}$$

где α, β принимают значения $1, 2$, детерминант вычисляется по отношению к α, β и вариационные производные взяты в точках $u_\alpha(x) = u_\alpha(x)^{*(0)}$. Это один из главных результатов нашей работы. Интересно, что ответ для статистической суммы на торе полностью выражается через величины относящиеся к статсумме на сфере. Важно отметить, что каждое действие εd как производной дает член порядка ε, поэтому для вычисления $S^{(0)}[u_\alpha(x)]$ можно пользоваться выражением (50), причем считать, что d является обычной переменной, а не оператором.

Аналогичный ответ для моделей типа $(2, p)$ был получен в работе [15]

$$Z_1^{(2,p)} = -\frac{1}{12} \log \frac{\delta^2 S^{(0)}[u_1]}{(\delta u_1)^2}\Big|_{u_1 = u_1^{*(0)}}, \tag{55}$$

Вид этих двух ответов дает естественное предположение для статистической суммы поверхностей рода 1 в произвольной модели (q, p)

$$Z_1^{(q,p)} = -\frac{q}{24} \log\det \frac{\delta^2 S^{(0)}}{\delta u_\alpha \delta u_\beta}\Big|_{u = u_\alpha^{*(0)}}, \tag{56}$$

где α принимает значения $1, ..., q-1$. Это предположение отличается на множитель $q - 1$ от предложенного в работе [21].

5 Вычисление Корреляционных чисел

В этом разделе мы будем вычислять корреляционные числа в $(3, p)$ моделях матричных моделей и МЛГ. Это еще один результат нашей работы.

Т.к. мы будем рассматривать исключительно случай $q = 3$, нам будет удобно ввести следующие обозначения. Во-первых, мы будем писать $u(x) = u_1(x)$ и $v(x) = u_2(x)$. Так же, в случае $q = 3$ поля $\Phi_{m,n}$ "разбиваются"на две строки с $m = 1$ и $m = 2$ соответственно. В силу $\mathbb{Z}_2$ симметрии ($O_{3-m,p-n} = O_{m,n}$) только половина этих полей является независимой, и мы можем считать, что это первая строка. В связи с этим, мы будем введем обозначения $O_k = O_{1,k+1}$, $\tau_k = \tau_{1,k+1}$ и $\lambda_k = \lambda_{1,k+1}$, где $k = 0, \dots, p-2$.

5.1 Корреляционные Числа Матричных Моделей

Для вычисления корреляторов в матричных моделях нужно пользоваться формулой (36). Вычисление достаточно прямолинейно, для нахождения ответа нужно брать производные от статистической суммы (38) по временам $\tau_{m,n}$. Однако есть два тонких момента. Во-первых, нужно выбрать правильный корень струнного уравнения. Мы выберем такой же корень как и в работе [14], а именно такой корень, что $v^{*(0)} = 0$ при $\tau_{m,n} = 0$ для всех $(m, n) \neq (1, 1)$. Во-вторых, при дифференцировании нужно помнить, что корень струнного уравнения также зависит от времен $\tau_{m,n}$.

Во всех формулах ниже мы будем считать, что $k_i < s$, где s неполное частное от деления p на 3. Мы будем использовать перенормированные $S^{(0)}[u_\alpha]$ и τ_k так, что $\frac{\delta S^{(0)}}{\delta u}\Big|_{v=0}$ и $\frac{\delta S^{(0)}}{\delta v}\Big|_{v=0}$ имеют коэффициент 1 во всех своих слагаемых. Также, удобно переписать статсумму (54), используя соотношение $\frac{\delta^2 S^{(0)}}{\delta u^2} = \frac{u}{3}\frac{\delta^2 S^{(0)}}{\delta v^2}$ доказанное в [14]. Тогда статистическую сумму можно записать как

$$Z = -\frac{1}{8} \log\left(\frac{3}{u} {S_{uu}^{(0)}}^2 - {S_{uv}^{(0)}}^2\right), \tag{57}$$

где индексы обозначают вариационные производные. В дальнейшем мы будем опускать верхний индекс (0) и будем использовать обозначение S_k для производных по временам $\frac{\partial S}{\partial \tau_k}$. Например, под S_{uvk} имеется ввиду $\frac{\partial}{\partial \tau_k}\frac{\delta^2 S^{(0)}}{\delta u \delta v}$. Отметим, что струнное действие имеет следующие свойства

$$S_v(u,0)=0 \qquad \text{для } p - \text{четных,} \tag{58}$$

$$S_u(u,0)=0 \qquad \text{для } p - \text{нечетных.} \tag{59}$$

Или, более обще, струнное действие имеет следующую четность при отражениях v

$$S_{k_1k_2\ldots k_n}(u,-v)=(-1)^{p+\sum k_i}S(u,v) \tag{60}$$

Также нам понадобятся производные решения струнного уравнения (u^*,v^*) по временам в точке, где все времена равны нулю. Их можно легко получить, беря производные от струнного уравнения (48) и используя свойство (60).

	p - even	p - odd
k - even	$\partial_k u^* = -\frac{S_{uk}}{S_{uu}}$	$\partial_k u^* = -\frac{S_{vk}}{S_{uv}}$
k - odd	$\partial_k v^* = -\frac{S_{vk}}{S_{vv}}$	$\partial_k v^* = -\frac{S_{uk}}{S_{uv}}$

где все функции взяты в точке (u^*,v^*), ∂_k это $\frac{\partial}{\partial \tau_k}$ и все остальные неуказанные здесь производные первого порядка равны нулю.

5.1.1 Одноточечные Корреляционные Числа

Рассмотрим сначала случай четных p и k. Беря производную (54) по τ_k, мы получаем

$$\begin{aligned}\partial_k Z = -\frac{1}{8}\frac{1}{\frac{3}{u^*}S_{uu}^2-S_{uv}^2}\Bigg(&\frac{6}{u^*}S_{uu}S_{uuk}+\frac{6}{u^*}S_{uu}S_{uuu}\partial_k u^*+\frac{6}{u^*}S_{uu}S_{uuv}\partial_k v^* \\ &-\frac{3}{u^{*2}}S_{uu}S_{uu}\partial_k u^*-2S_{uv}S_{uvk}-2S_{uv}S_{uv}S_{uuv}\partial_k u^*-2S_{uv}S_{uv}S_{uvv}\partial_k v^*\Bigg).\end{aligned} \tag{61}$$

Это выражение может быть упрощено с использованием (60) и выражений для производных u^* and v^* по временам. В случае когда p,k четны, они дают $S_{uv}=0$, $S_{uvk}=0$ и $\partial_k v^*=0$. С учетом этих соотношений формула (61) принимает вид

$$\partial_k Z = -\frac{1}{4}\left(\frac{S_{uuk}}{S_{uu}}-\frac{S_{uuu}S_{uuk}}{S_{uu}^2}+\frac{1}{2u^*}\frac{S_{uk}}{S_{uu}}\right) \tag{62}$$

Используя, эту формулу мы можем найти одноточечные корреляционные числа для $k<s$ и p,k – четных

$$\langle O_k\rangle = \frac{1}{24}(p+3k-1)(-\mu)^{-k/2-1}. \tag{63}$$

Для p – четного и k – нечетного, одноточечный коррелятор равен нулю, так как производные S_{uu}, S_{uv} по временам и $\partial_k u$ равны нулю.

В случае, когда p – нечетный мы можем использовать формулу (61). Но, теперь другие слагаемые дают вклад. С использованием $S_{uu}=0$, $\partial_k u^*=0$ выражение для одноточечной корреляционной функции в случае k – четного принимает вид

$$\partial_k Z = -\frac{1}{4}\left(\frac{S_{uvk}}{S_{uv}}-\frac{S_{uuv}S_{uvk}}{S_{uv}^2}\right) \tag{64}$$

После использования выражения для S мы получаем следующий ответ в случае k – четного и $k < s$

$$\langle O_k \rangle = \frac{1}{24}(p + 3k - 1)(-\mu)^{-k/2-1} \tag{65}$$

Снова, как это можно увидеть из (64), одноточечные корреляционные числа $\langle O_k \rangle$ для k – нечетного равны нулю.

В заключение, мы суммируем результаты этого раздела в таблице

	p - even	p - odd
k - even	$\langle O_k \rangle = \frac{1}{24}(p + 3k - 1)(-\mu)^{-k/2-1}$	$\langle O_k \rangle = \frac{1}{24}(p + 3k - 1)(-\mu)^{-k/2-1}$
k - odd	$\langle O_k \rangle = 0$	$\langle O_k \rangle = 0$

5.1.2 Двухточечные Корреляционные Числа

В этом разделе мы не будем записывать выражения для частных производных статсуммы как мы делали в (61). Вместо этого мы заметим, что двухточечная корреляционная функция может быть получена дифференциированием более простого выражения. А именно, в случае p, k_i – четных или p, k_i – нечетных

$$\partial_{k_1}\partial_{k_2} Z = -\frac{1}{8}\partial_{k_1}\partial_{k_2} \ln \frac{3}{u}^{*} S_{uu}^2. \tag{66}$$

Простым вычислением можно показать, что все члены приходящие из S_{uv}^2 в (57) не дают вклада. С другой стороны, в случае когда p – четный и k_i – нечетные или p – нечетный и k_i – четные, только члены получаемые из S_{uv}^2 в (57) дают вклад. Поэтому, в этом случае мы можем использовать выражение

$$\partial_{k_1}\partial_{k_2} Z = -\frac{1}{4}\partial_{k_1}\partial_{k_2} \ln S_{uv}. \tag{67}$$

Наконец, все корреляционные числа при k_1 – нечетном и k_2 – четном равны нулю.

После этих замечаний мы приведем ответы для корреляционных функций.

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle = \frac{1}{48}\left((5 + p)(k_1 + k_2) + 3(k_1^2 + k_2^2) + 3k_1k_2 + 2(p - 1)\right)(-\mu)^{(4+k_1+k_2)/2} \tag{68}$$

при p, k_i – четных и $k_i < s$.

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle = -\frac{1}{432}(-1 + 3k_1 + p)(-1 + 3k_2 + p)(-\mu)^{-(k_1+k_2)/2-2} \tag{69}$$

при p – четном, k_i – нечетных и $k_i < s$.

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle = \frac{1}{48}\left((5 + p)(k_1 + k_2) + 3(k_1^2 + k_2^2) + 3k_1k_2 + 2(p - 1)\right)(-\mu)^{(4+k_1+k_2)/2} \tag{70}$$

при p – нечетном, k_i – четных и $k_i < s$. и

$$\langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle = -\frac{1}{48}(-2 + 3k_1 + p)(-2 + 3k_2 + p)(-\mu)^{-(k_1+k_2)/2-2} \tag{71}$$

при p – нечетных, k_i – нечетных и $k_i < s$.

5.2 Корреляционные Числа в Минимальной Лиувиллевской Гравитации

Теперь мы переходим к корреляционным функциям МЛГ. Основная проблема вычисления корреляторов в МЛГ с использованием результатов матричных моделей это нахождение коэффициентов в резонансных соотношениях (45) между временами $\tau_{m,n}$ и константами связи $\lambda_{m,n}$. Основной инструмент для этого это правила слияния в МЛГ, которые приводят к уравнениям на коэффициенты в (45). Несколько первых коэффициентов были найдены в [14] и мы будем использовать их результаты в дальнейшем.

Точнее, мы будем использовать следующие выраэения [14] для частных производных струнного действия S по константам связи λ:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} S_u = x^{2(p_0-1)} P^{(0,\frac{2}{3}(2p_0-3))}_{\frac{s-k-p_0}{2}}(y) \quad \text{для } (p+k) - \text{четного } k < s \tag{72}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} S_u = x^{2-p_0)} P^{(0,\frac{2}{3}(1-p_0))}_{\frac{s-k-p_0-3}{2}}(y) \quad \text{для } (p+k) - \text{нечетного } k < s \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_{k_1} \partial \lambda_{k_2}} S_u = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\frac{s-k_1-k_2-p_0-2}{2}} (6k+4p_0-3) x^{2(p_0-1)} P_k^{(0,\frac{2}{3}(2p_0-3))}(y) \tag{74}$$

В последней формуле $k_i < s$ и k_i, p – четные. Мы использовали обозначения $P_n^{a,b}(y)$ для полиномов Якоби, $x = \frac{u}{u\,0}$, $y = 2x^3 - 1$, производные S берутся в точнке $(u, v) = (u^*, v^*)$ и s,p_0 обозначают неполное частное и остаток при делении p на 3, т.е. $p = 3s + p_0$.

Метод вычисления в МЛГ практически совпадают с методом вычисления в матричных моделях. Основное отличие в том, что производные должны браться по отношению к $\lambda_{m,n}$. Для простоты мы перенормируем $\lambda_{1,1} = \mu = 1$ для простоты. Для получения ответов в МЛГ мы можем использовать те же формулы (62), (64), но с производными S взятыми из (72),(73).

Ответы для нульточечной и одноточечной корреляционных чисел

$$\langle 1 \rangle = -\frac{1}{4} \log p, \tag{75}$$

$$\langle O_k \rangle = -\frac{2 + 6k + 3k^2 - 2(k+1)p}{16p}, \tag{76}$$

где k, p – четные числа. Одноточечный коррелятор для нечетного k равен нулю.

Двух точечные корреляторы

$$\begin{aligned} \langle O_{k_1} O_{k_2} \rangle = -\frac{1}{32p^2} \big(&9k_1^3(1+k_2) + 9k_1^2(1+k_2)(4+k_2) + 3(2+k_2)(2+3k_2(2+k_2)) \\ &+3k_1(1+k_2)(14+3k_2(4+k_2)) - 6(1+k_1)(1+k_2)(2+k_1+k_2)p\big), \end{aligned} \tag{77}$$

где k_1, k_2, p – четные числа.

Все приведенные результаты зависят от конкретной нормировки полей и статистической суммы. Так как нормировка в нашей работе совпадает с [14], мы можем вычислить следующие независящие от нормировки величины

$$\sqrt{\frac{Z_0^{\text{Sphere}}}{Z_{kk}^{\text{Sphere}}} \frac{Z_k^{\text{Torus}}}{Z_0^{\text{Torus}}}} = \sqrt{\frac{p(p-3(k+1))}{(p+3)(p-3)}} \, \frac{2 + 6k + 3k^2 - 2(k+1)p}{4p \log p} \tag{78}$$

$$\frac{Z_0^{\rm Sphere}}{\sqrt{Z_{k_1k_1}^{\rm Sphere} Z_{k_2k_2}^{\rm Sphere}}} \frac{Z_{k_1k_2}^{\rm Torus}}{Z_0^{\rm Torus}} = \sqrt{\frac{p^2(p-3(k_1+1))(p-3(k_2+1))}{(p+3)^2(p-3)^2}}$$
$$\frac{1}{8p^2\log p}\left(9k_1^3(1+k_2)+9k_1^2(1+k_2)(4+k_2)+3(2+k_2)(2+3k_2(2+k_2))\right.$$
$$\left.+3k_1(1+k_2)(14+3k_2(4+k_2))-6(1+k_1)(1+k_2)(2+k_1+k_2)p\right), \tag{79}$$

A Аппендикс: Приближенное решение струнного уравнения

В данном разделе мы будем рассматривать только случай $q = 3$, поэтому для удобства мы введем обозначения $u(x) = u_1(x)$, $v(x) = u_2(x)$.

В этом аппендиксе мы найдем решение струнного уравнение до второго порядка по ε. Точнее, действие определенно как

$$S[u_\alpha, \varepsilon] = \text{Res}\left(Q^{\frac{p}{3}+1} + \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{p-1}\tau_{m,n}Q^{\frac{|pm-3n|}{3}}\right), \tag{80}$$

где

$$Q = \varepsilon^3 d^3 + \varepsilon u(x) d + v(x). \tag{81}$$

Чтобы найти решение струнного уравнения до второго порядка по ε нам нужно найти действие до того же порядка

$$S[u_\alpha, \varepsilon] = S^{(0)}[u_\alpha] + \varepsilon S^{(1)}[u_\alpha] + \varepsilon^2 S^{(2)}[u_\alpha] + \dots. \tag{82}$$

Для этого нам нужно научиться находить вычеты операторов $Q^{l+\alpha/3}$ для произвольных значений l и α. Это можно сделать используя следующий метод [19, 20]. Основная идея заключается в нахождении рекуррентного соотношения на вычеты вида $Q^{l+\alpha/3}$.

Мы параметризуем часть $Q^{l+\alpha/3}$ содержащую отрицательные степени d как $Q_-^{l+\alpha/3} = \{R_l, d^{-1}\} + \{K_l, d^{-2}\} + \{M_l, d^{-3}\} + \dots$. Где мы использовали обозначения $\{a, b\} = ab + ba$. Так как оператор коммутирует с любой своей степенью, а также используя соотношение $Q^{l+\alpha/3} = Q_-^{l+\alpha/3} + Q_+^{l+\alpha/3}$, где $Q_+^{l+\alpha/3}$ – часть $Q^{l+\alpha/3}$ содержащая неотрицательные степени d, мы получаем

$$[Q_+^{l+\alpha/3}, Q] = [Q, Q_-^{l+\alpha/3}]. \tag{83}$$

Заметим, что левая часть этого равенства содержит только неотрицательные степени d, в то время как в правой части членов с неотрицательной степенью d конечное число. Они имеют вид

$$[Q_+^{l+\alpha/3}, Q] = [Q, Q_-^{l+\alpha/3}] = 6\varepsilon R_l' d + 6\varepsilon K_l' + 3\varepsilon^2 R_l''. \tag{84}$$

Также мы легко получить, что

$$Q_+^{l+1+\alpha/3} = (Q^{l+\alpha/3}Q)_+ = Q^{l-2/3}Q + 2R_l\varepsilon^2 d^2 + (2K_l - \varepsilon R_l')\varepsilon d + 2M_l + \varepsilon^2 R_l'' - 2\varepsilon K_l' + 2R_l u. \tag{85}$$

Коммутируя обе части последнего равенства с Q и используя (84), мы получаем три рекуррентных соотношения на неизвестные функции K_l, M_l и R_l. Одно из них легко решается и дает выражение для M_l через R_l и K_l. Оставшиеся два имеют вид

$$6\varepsilon R_{l+1}' = 4\varepsilon^3 K_l''' + 2\varepsilon u' K_l + 4\varepsilon u K_l' - 2\varepsilon^2 u'' R_l + 4\varepsilon v' R_l - 3\varepsilon^2 u' R_l' + 6\varepsilon v R_l' \tag{86}$$

$$6\varepsilon K'_{l+1} = 2\varepsilon v' K_l + 6\varepsilon v K'_l - \frac{1}{3}\varepsilon^3 u''' R_l - \varepsilon^2 u'' K_l - 3\varepsilon^2 u' K'_l - \frac{3}{2}\varepsilon^3 u'' R'_l - \frac{5}{2}\varepsilon^3 u' R''_l - \frac{5}{3}\varepsilon^3 u R'''_l \tag{87}$$

$$-\frac{4}{3}\varepsilon u u' R_l - \frac{4}{3}\varepsilon u^2 R'_l - \frac{1}{3}\varepsilon^5 R_l^{(5)} \tag{88}$$

Отметим, что эти соотношения имеют один и тот же вид для разных значений α в $\mathrm{Res}\, Q^{l+3\alpha/3}$, но они отличают в начальных условиях. Эти уравнения могут быть решены до второго порядка по ε с помощью анзаца

$$R_l^{(1/3)} = \sum_{k\geq 0} (A_k^{(l)} u^{3k+1} v^{l-1-2k} + \varepsilon B_k^{(l)} u^{3k+1} v^{l-2-2k} u' + \varepsilon^2 D_k^{(l)} u^{3k+2} v^{l-3-2k} u'' \tag{89}$$

$$+\varepsilon^2 E_k^{(l)} u^{3k+1} v^{l-3-2k} u'^2 + \varepsilon^2 F_k^{(l)} u^{3k+2} v^{l-4-2k} u' v' + \varepsilon^2 G_k^{(l)} u^{3k} v^{l-3-2k} v'^2 + \varepsilon^2 H_k^{(l)} u^{3k} v^{l-2-2k} v'') + \ldots, \tag{90}$$

$$K_l^{(1/3)} = \sum_{k\geq 0} (a_k^{(l)} u^{3k} v^{l-2k} + \varepsilon b_k^{(l)} u^{3k} v^{l-1-2k} u' + \varepsilon^2 d_k^{(l)} u^{3k+1} v^{l-2-2k} u'' \tag{91}$$

$$+\varepsilon^2 e_k^{(l)} u^{3k} v^{l-2-2k} u'^2 + \varepsilon^2 f_k^{(l)} u^{3k+1} v^{l-3-2k} u' v' + \varepsilon^2 g_k^{(l)} u^{3k+2} v^{l-4-2k} v'^2 + \varepsilon^2 h_k^{(l)} u^{3k+2} v^{l-3-2k} v'') + \ldots, \tag{92}$$

где точки обозначают опущенные слагаемые с более высокими степенями ε. Подстановка этого анзаца в уравнения (86) и (87) дает систему рекуррентных линейных уравнений на коэффициенты в выражениях (89) и (91). Они могут быть решены после достаточно сложного вычисления. Ответ для действия принимает простой вид

$$\begin{aligned} S[u,v] = \mathrm{Res}\left(Q^{\frac{p}{3}+1} + \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{p-1} \tau_{m,n} Q^{\frac{|pm-3n|}{3}}\right) = S^{(0)} - \frac{1}{2}\varepsilon S_v^{(0)} u' - \frac{1}{6}\varepsilon^2 S_{vv}^{(0)} u u'' \\ -\frac{1}{12}\varepsilon^2 S_{uvv}^{(0)} u u'^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^2 S_{vvv}^{(0)} u u' v' + \frac{1}{4}\varepsilon^2 S_{uvv}^{(0)} v'^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 S_{uv}^{(0)} v'' + \ldots, \end{aligned} \tag{93}$$

где индексы у $S^{(0)}[u,v]$ обозначают вариационные производные по отношению к $u(x)$ и $v(x)$, а точки обозначают члены более высокого порядка по ε.

Далее мы можем решить уравнение Дугласа (51) и решение имеет вид $u^*(x,\varepsilon) = u^{*(0)}(x) + \varepsilon^2 u^{*(2)}(x) + O(\varepsilon^2)$. Наконец мы можем проинтегрировать (49) где u_* заменено на $u^{*(2)}$. В результате мы приходим к (38).

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **103**, 207 (1981).

[2] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).

[3] A. A. Belavin and Al. B. Zamolodchikov, Theor. Math. Phys. **147**, 729 (2006) [Teor. Mat. Fiz. **147**, 339 (2006)].

[4] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).

[5] Al. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **19S2**, 510 (2004) [hep-th/0312279].

[6] V. A. Kazakov, A. A. Migdal and I. K. Kostov, Phys. Lett. B **157**, 295 (1985).

[7] V. A. Kazakov, Phys. Lett. A **119**, 140 (1986).

[8] V. A. Kazakov, Mod. Phys. Lett. A **4**, 2125 (1989).

[9] M. Staudacher, Nucl. Phys. B **336**, 349 (1990).

[10] E. Brezin and V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).

[11] M. R. Douglas and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **335**, 635 (1990).

[12] G. W. Moore, N. Seiberg and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **362**, 665 (1991).

[13] A. A. Belavin and A. B. Zamolodchikov, J. Phys. A **42**, 304004 (2009) [arXiv:0811.0450 [hep-th]].

[14] A. Belavin, B. Dubrovin and B. Mukhametzhanov, arXiv:1310.5659 [hep-th].

[15] A. Belavin and G. Tarnopolsky, JETP Lett. **92**, 257 (2010) [arXiv:1006.2056 [hep-th]].

[16] V. Belavin, Phys. Lett. B **698**, 86 (2011) [arXiv:1010.5508 [hep-th]].

[17] M. R. Douglas, Phys. Lett. B **238**, 176 (1990).

[18] P. H. Ginsparg, M. Goulian, M. R. Plesser, et al., Nucl. Phys. B **342**, 539 (1990).

[19] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, [hep-th/9304011].

[20] P. Di Francesco, P. H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, Phys. Rept. **254**, 1 (1995) [hep-th/9306153].

[21] R. Dijkgraaf and E. Witten, Nucl. Phys. B **342**, 486 (1990).

[22] Al. B. Zamolodchikov, hep-th/0505063.