Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень магистра

Мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина вблизи перехода Андерсона со взаимодействием

студент 028 группы Евгений Репин
научный руководитель: д.ф.-м.н. И.С. Бурмистров

Черноголовка 2016

I. ВВЕДЕНИЕ

Широко известным свойством перехода металл-изолятор является нетривиальная статистика моментов волновой функции[1]. В случае хорошего металла, когда пространство и энергия раскоррелированы, флуктуации волновой функции просто переписываются через флуктуации локальной плотности состояний, что в свою очередь, как известно, можно переписать через корреляторы полей Q нелинейной сигма-модели. Тогда аномальные размерности собственных операторов ренормгруппы сигма-модели дают скейлинговые показатели моментов волновой функции. Контролируемым образом, конечно, переход можно описать только в рамках $\epsilon-$разложения, когда точка перехода $g_\star \gg 1$. Моментам локальной плотности состояний соответствует, по-видимому, всегда собственный оператор с максимальной аномальной размерностью (наиболее быстро растущий в инфракрасную область). Для задачи без электрон-электронного взаимодействия класс собственных операторов без производных по пространству поля Q был получен ранее явно[2,3], а чисто скейлинговые комбинации волновых функций обсуждались в работе[4] в отсутствие электрон-электронного взаимодействия. Однако в реальных системах взаимодействие всегда присутствует, и поэтому разумно задать вопрос о том, насколько изменится эта картина при наличии взаимодействия. Ранее[5] было замечено, что оператор, соответствующий второму моменту локальной плотности состояний, после тривиальной модификации (см. текст и секцию Выводы) остается собственным и с учетом взаимодействия, но его аномальная размерность меняется. Естественно спросить, остаются ли остальные операторы, известные из невзаимодействующей задачи, также собственными. Результатом этой работы является ответ, что, по-видимому, да, но в случае высших корреляторов одночастичной функции Грина вычисление до 2 порядка по $1/g$ является недостаточным для доказательства того, что все операторы остаются собственными, хотя является сильным на то указанием. Эти операторы, отличные от моментов локальной плотности состояний, являются характеристикой мезоскопических флуктуаций одночастичной функции Грина. Они соответствуют специальным пространственным корреляционным функциям локальной плотности состояний (см. Выводы) и в принципе могут быть измерены в экспериментах по туннельной микроскопии. Мы рассматриваем класс AI (ненарушенная симметрия обращения времени и вращения в спиновом пространстве).

II. НЕЛИНЕЙНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ

Теория поля, которую мы изучаем, определяется стандартным образом[6,7] на матричное поле Q, действующее в тензорном произведении репличного пространства размером N_r, счетномерного пространства мацубаровских частот, пространства Намбу 2×2 и спинового пространства 2×2 с действием

$$S = -\frac{g}{32}\int dr\,\mathrm{Tr}(\nabla Q)^2 + 4\pi T Z_\omega \int dr\,\mathrm{Tr}\,\eta Q - \frac{\pi T}{4}\sum_{\alpha,n}\sum_{r=0,3}\sum_{j=0}^{3}\Gamma_j \int dr\,\mathrm{Tr}(I_n^\alpha t_{rj} Q)\,\mathrm{Tr}(I_{-n}^\alpha t_{rj} Q) \tag{1}$$

где индексы α, β в репличном пространстве, n, m в мацубаровском, а индексы матриц t_{ij} есть разложение матрицы t, действующей только в тензорном произведении спинового и Намбу пространства, по базису тензорного произведения наборов матриц Паули, то есть $t_{ij} = \sigma_i^{Nambu} \otimes \sigma_j^{spin}$, а t_{00} - единичная матрица; g-безразмерный кондактанс, который предполагается большим (металлическая область), что позволяет использовать теорию возмущений для нелинейной сигма-модели; Γ_i - амплитуды взаимодействия электронов в трех триплетных и одном синглетном канале, Z_ω - фактор перенормировки частоты[6], T-температура. Мы рассматриваем случай, когда нет притяжения в куперовском канале и поэтому пренебрегаем ($\Gamma_c = 0$) взаимодействием (с $r = 1; 2$). Здесь матрицы

$$\Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = sgn(n)\delta_{nm}\delta^{\alpha\beta}t_{00} \tag{2}$$

есть седловое решение для этого действия,

$$\eta_{nm}^{\alpha\beta} = n\delta_{nm}\delta^{\alpha\beta}t_{00} \tag{3}$$

и

$$(I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m,k}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha\gamma}t_{00} \tag{4}$$

На матрицу Q наложено нелинейное условие $Q^2 = 1$, которое мы разрешаем так называемой четной корневой параметризацией $Q = W + \Lambda\sqrt{1 - W^2}$. Где матрица W в мацубаровском пространстве представлена как

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

где блоки w и $\overline{w}$ связаны условиями

$$\overline{w} = -Cw^T C, \quad w = -Cw^\star C, \quad C = it_{12} \tag{6}$$

это условие происходит из еще одной связи зарядового сопряжения на матрицу Q ($Q^\dagger = C^T Q^T C$). Обе связи на матрицу Q означают выделение низкоэнергетического (безмассового) сектора возбуждений в системе[6], если матрица Q отклоняется от этих условий, вклады малы по 1/g. В квадратичном по полям W приближении действие дает пропагатор этих полей при $r = 0;3$

$$\langle w_{rj}(p)^{\alpha\beta}_{nm} \overline{w}_{rj}(-p)^{\gamma\delta}_{kl}\rangle = \frac{2}{g}\delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\delta_{n-m,l-k}D_p(i\Omega_{nm})(\delta_{nl} - \frac{32\pi T\Gamma_j}{g}\delta^{\alpha\beta}D_p^{(j)}(i\Omega_{nm})) \tag{7}$$

где

$$D_p(i\Omega) = \frac{1}{p^2 + \frac{16Z_\omega|\Omega|}{g}} \tag{8}$$

$$D_p^{(j)}(i\Omega) = \frac{1}{p^2 + \frac{16(Z_\omega+\Gamma_j)|\Omega|}{g}} \tag{9}$$

обычный и перенормированный взаимодействием, соответственно, диффузионные пропагаторы. При $r = 1;2$ пропагатор

$$\langle w_{rj}(p)^{\alpha\beta}_{nm} \overline{w}_{rj}(-p)^{\gamma\delta}_{kl}\rangle = \frac{2}{g}\delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\delta_{nl}\delta_{ml}D_p(i\Omega_{nm}) \tag{10}$$

A. Перенормировка плотности состояний

В присутствии взаимодействия плотность состояний перенормируется

$$\frac{\rho(i\epsilon_n)}{\rho_0} = \frac{1}{4}\langle \mathrm{sp}\, Q^{\alpha\alpha}_{nn}\rangle = \sqrt{Z} \tag{11}$$

где ρ_0 начальное условие для РГ (на импульсе $p = 1/l$), n - положительная мацубаровская частота, а при $\epsilon_n \to E + i0, \quad E \to 0$

$$Z = 1 - \frac{h^\epsilon t}{\epsilon}\sum_{j=0}^{3}\ln(1+\gamma_j) \tag{12}$$

перенормировка напряженности поля W[7,11], она не связана с Z_ω. Здесь h-инфракрасная обрезка теории, то есть искусственно добавленная бесконечно малая масса поля Q, что отвечает добавке в действие $S \to S + \frac{gh^2}{8}\int d\boldsymbol{r}\,\mathrm{Tr}(\Lambda Q))$. Тогда во всех пропагаторах квадрат импульса понимается как $p^2 + h^2$.

В присутствии взаимодействия действие (1) не инвариантно относительно вращений в мацубаровском и репличном пространствах (из-за наличия матриц I_n^α), поэтому идея нахождения собственных операторов такова: рассмотрим линейные комбинации простейших комбинаций полей Q, неинвариантные относительно вращений в мацубаровском и репличном пространствах и из условия конечности их аномальной размерности в пределе $\epsilon \to 0$ в рамках $\epsilon-$разложения получим уравнение на коэффициенты этого линейного разложения.

III. ОПЕРАТОРЫ, БИЛИНЕЙНЫЕ ПО Q

Начнем рассмотрение с операторов, квадратичных по полю Q. В этом случае имеется 2 линейно-независимых оператора вида, описанного выше. Возьмем их линейную комбинацию

$$P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m) = \langle\langle \mathrm{sp}\, Q^{\alpha_1\alpha_1}_{nn}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{sp}\, Q^{\alpha_2\alpha_2}_{mm}(\boldsymbol{r})\rangle\rangle + \mu\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{nm}(\boldsymbol{r})Q^{\alpha_2\alpha_1}_{mn}(\boldsymbol{r})\big]\rangle, \tag{13}$$

где μ - заданное число $\langle\langle AB\rangle\rangle = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$, а sp означает след по спиновому и Намбу-пространствам. Далее построим оператор, зависящий от мацубаровских частот $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2}, \varepsilon_{n_3}$

$$K_2 = \frac{1}{32}\,\mathrm{Re}\Big[P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_3}) - P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2})\Big] \tag{14}$$

Произведем его аналитическое продолжение на вещественные частоты: $\varepsilon_{n_1} \to E + i0^+$, $\varepsilon_{n_3} \to E' + i0^+$, и $\varepsilon_{n_2} \to E' - i0^+$

$$K_2(E, E') = \frac{1}{32}\,\mathrm{Re}\Big[P_2^{\alpha_1\alpha_2;RR}(E, E') - P_2^{\alpha_1\alpha_2;RA}(E, E')\Big] \tag{15}$$

Тогда для $\mu = -2$ оператор K_2 является вторым моментом локальной плотности состояний $(\langle\rho(E)\rho(E')\rangle - \langle\rho(E)\rangle\langle\rho(E')\rangle)$, этим и мотивировано определение. Фиксированные репличные индексы α_1 и α_2 различны в ур. (14), $\alpha_1 \neq \alpha_2$, что отвечает тому факту, что второй момент понимается в смысле мезоскопических флуктуаций плотности состояний (разные реплики - разные образцы).

A. Однопетлевое вычисление

В однопетлевом приближении, то есть первом порядке по обратному кондактансу $g \gg 1$ получаем ненулевой вклад при $n_1 \geq 0, \quad n_2 < 0$

$$P_2^{\alpha_1\alpha_2;(1)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2}) = \mu\langle \mathrm{sp}[w_{n_1n_2}^{\alpha_1\alpha_2}\overline{w}_{n_2n_1}^{\alpha_2\alpha_1}]\rangle = \frac{128\mu}{g}\int_q \mathcal{D}_q(i\Omega) \tag{16}$$

где $\Omega = \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}$, h - инфракрасная обрезка теории (искусственно добавленная бесконечно малая масса поля Q), тогда после аналитического продолжения на вещественные частоты и при $E \to E' \to 0$ и $T \to 0$ (для простоты анализа)

$$K_2^{(1)} = \mu\frac{h^\epsilon t}{\epsilon} \tag{17}$$

где $t = 8\Omega_d/g$, $\Omega_d = S_d/(2(2\pi)^d)$ и S_d - площадь d-мерной сферы. $d = 2 + \epsilon$ при $\epsilon \ll 1$.

B. Двупетлевое вычисление

Во втором порядке по обратному кондактансу ненулевые вклады в $P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_3})$ с $n_1 \geq 0$ и $n_3 \geq 0$

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_3}) = \frac{\mu}{4}\sum_{n_6n_8}\sum_{\beta_1\beta_2}\langle \mathrm{sp}[w_{n_1n6}^{\alpha_1\beta_1}\bar{w}_{n_6n_3}^{\beta_1\alpha_2}w_{n_3n_8}^{\alpha_2\beta_2}\bar{w}_{n_8n_1}^{\beta_2\alpha_1}]\rangle. \tag{18}$$

по теореме Вика получаем

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_3}) = -\mu\sum_{j=0}^{3}(\frac{64}{g})^2\frac{\pi T\Gamma_j}{g}\sum_{\omega_n > \epsilon_{n_3}}\int_{q,p} D_q(i\omega_n + i\Omega_{13})D_p(i\omega_n)D_p^{(j)}(i\omega_n) + (\epsilon_1 \to \epsilon_3). \tag{19}$$

Производя аналитическое продолжение на вещественные частоты, получаем

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{(2)}(E, E') = -\mu\sum_{j=0}^{3}(\frac{32}{g})^2\frac{\Gamma_j}{ig}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\tanh\frac{\omega - E'}{2T}\int_{q,p} D_q(\omega + E - E')D_p(\omega)D_p^j(\omega) + (E \to E'). \tag{20}$$

Опять полагая $E = E' = T = 0$, получим, используя трюк Фейнмана

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1\prod_{i=1}^{3}dx_i\delta(\sum_i x_i - 1)\frac{2}{(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^3} \tag{21}$$

и беря интегралы по импульсам,

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{RR(2)} = (\frac{16}{g})^2 \sum_{j=0}^{3} \frac{\Gamma_j}{Z_\omega} \frac{A_\epsilon \Gamma(1-\epsilon) h^{2\epsilon}}{\epsilon \Gamma^2(1-\epsilon/2)} \int_0^1 \prod_{i=1}^{3} dx_i \delta(\sum_i x_i - 1) \frac{x_3^{-1-\epsilon/2}(1-x_3)^{-1-\epsilon/2}}{1-x_2+a_j x_2} \tag{22}$$

где $a_j = 1 + \frac{\Gamma_j}{Z_\omega} = 1 + \gamma_j$ и $A_\epsilon = \Omega_d^2 \Gamma^2(1-\epsilon/2)\Gamma^2(1+\epsilon/2)$. Оставляя только неуходящие в пределе $\epsilon \to 0$ члены,

$$\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \frac{1}{(x_2(1-x_2))^{1+\epsilon/2}(1-x_3+a_j x_3)} \simeq \frac{-2\log a_j}{a_j \epsilon} - \frac{a_j - 1}{a_j}[2\frac{\partial}{\partial x}[{}_3F_2(1,1,1;2,x=1;\frac{a_j-1}{a_j})] + \frac{\partial}{\partial y}[{}_3F_2(1,1,y=1;2,1;\frac{a_j-1}{a_j})]] \tag{23}$$

Используя соотношения для гипергеометрической функции

$$\frac{\partial}{\partial y}[{}_3F_2(1,1,y=1;2,1;\frac{a-1}{a})] = \frac{a\log^2 a}{2(a-1)}, \quad \frac{\partial}{\partial y}[{}_3F_2(1,1,y=1;2,1;\frac{a-1}{a})] = -\frac{\partial}{\partial x}[{}_3F_2(1,1,1;2,x;\frac{a-1}{a})] \tag{24}$$

получим в итоге

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{RR(2)} \to -8\mu \frac{t^2\, h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \sum_{j=0}^{3} \Big[\ln(1+\gamma_j) - \frac{\epsilon}{4}\ln^2(1+\gamma_j)\Big], \tag{25}$$

Двупетлевой вклад в $P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_4})$ при $n_1 \geq 0$ и $n_4 < 0$ равен

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_4}) = -\frac{1}{4}\sum_{n_5 n_6}\sum_{\beta_1\beta_2} \langle\langle \mathrm{sp}[w_{n_1 n_6}^{\alpha_1\beta_1} \bar{w}_{n_6 n_1}^{\beta_1\alpha_1}]\, \mathrm{sp}[\bar{w}_{n_4 n_5}^{\alpha_2\beta_2} w_{n_5 n_4}^{\beta_2\alpha_2}]\rangle\rangle + \mu \Big\langle \mathrm{sp}[w_{n_1 n_4}^{\alpha_1\alpha_2} \bar{w}_{n_4 n_1}^{\alpha_2\alpha_1}] \Big[S_0^{(4)} + S_{\rm int}^{(4)} + \frac{1}{2}\left(S_{\rm int}^{(3)}\right)^2\Big]\Big\rangle. \tag{26}$$

Здесь

$$S_0^{(4)} = \frac{g}{128}\int_{q_1}\int_{q_2}\int_{q_3}\int_{q_4} \delta(\boldsymbol{q_1}+\boldsymbol{q_2}+\boldsymbol{q_3}+\boldsymbol{q_4}) \sum_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\sum_{n_5 n_6 n_7 n_8} \mathrm{sp}[w_{n_5 n_6}^{\beta_1\beta_2} \bar{w}_{n_6 n_7}^{\beta_2\beta_3} w_{n_7 n_8}^{\beta_3\beta_4} \bar{w}_{n_8 n_5}^{\beta_4\beta_1}] \times \Big[(\boldsymbol{q_1}+\boldsymbol{q_2})(\boldsymbol{q_3}+\boldsymbol{q_4}) + (\boldsymbol{q_1}+\boldsymbol{q_4})(\boldsymbol{q_2}+\boldsymbol{q_3}) - 2h^2 - \frac{32\pi T Z_\omega}{g}(n_{56}+n_{78})\Big], \tag{27}$$

получается из разложения действия S_σ до 4 порядка по W. Разложение вклада со взаимодействием дает также

$$S_{\rm int}^{(3)} = \sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0;3} \frac{\pi T\Gamma_j}{4}\sum_{\beta,n}\int d\boldsymbol{r}\, \mathrm{Tr}\, I_n^\beta t_{rj} W\, \mathrm{Tr}\, I_{-n}^\beta t_{rj}\Lambda W^2, \qquad S_{\rm int}^{(4)} = -\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0;3}\frac{\pi T\Gamma_j}{16}\sum_{\beta,n}\int d\boldsymbol{r}\, \mathrm{Tr}\, I_n^\beta t_{rj}\Lambda W^2\, \mathrm{Tr}\, I_{-n}^\beta t_{rj}\Lambda W^2. \tag{28}$$

После вычисления средних в ур. (26), получаем

$$\begin{aligned} [P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{(2)}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_4}) &= -2\left[\frac{16}{g}\int_q D_q(i\Omega_{n_{14}})\right]^2 + 2\mu(\frac{16}{g})^2\int_{pq}[p^2+q^2+h^2+\frac{16 Z_\omega}{g}\Omega_{14}] D_p(i\Omega_{14}) D_q^2(i\Omega_{14}) \\ &+ \mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}(\sum_{\omega_n>\epsilon_{n_1}} + \sum_{\omega_n>-\epsilon_{n_4}})\frac{\pi T\Gamma_j}{g}\int_{pq} D_p^2(i\Omega_{14})[p^2+h^2+q^2+\frac{16 Z_\omega}{g}(\Omega_{14}+\omega_n)] D_q(i\omega_n) D_q^{(j)}(i\omega_n) \\ &- \mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}\sum_{\omega_n>0}\frac{2\pi T\Gamma_j}{g}[1-\frac{16\Gamma_j\omega_n}{g}\int_{pq} D_{p+q}^{(j)}(i\omega_n)] D_q^2(i\Omega_{14}) D_p(i\Omega_{14}+i\omega_n) \\ &- \mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}(\sum_{\epsilon_{n_1}>\omega_n>0} + \sum_{-\epsilon_{n_4}>\omega_n>0})\frac{\pi T\Gamma_j}{g}[1-\frac{16\Gamma_j\omega_n}{g}\int_{pq} D_{p+q}^{(j)}(i\omega_n)] D_q^2(i\Omega_{14}) D_p(i\Omega_{14}-i\omega_n) \end{aligned} \tag{29}$$

После аналитического продолжения в ур. (29), получаем ($\Omega = E - E'$)

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{RA(2)}(E,E') = -2\left[\frac{16}{g}\int_q D_q(i\Omega)\right]^2 + 2\mu(\frac{16}{g})^2\int_{pq}[p^2+q^2+h^2+\frac{16Z_\omega}{g}i\Omega]D_p(\Omega)D_q^2(\Omega)$$
$$+\mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}(\tanh(\frac{\Omega-E}{2T}+\tanh(\frac{\Omega-E'}{2T})))\frac{\pi T\Gamma_j}{4ig}\int_{pq,\omega}D_p^2(\Omega)[p^2+h^2+q^2+\frac{16Z_\omega}{g}(i\Omega+i\omega)]D_q(\omega)D_q^{(j)}(\omega)$$
$$-\mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}\int_{pq,\omega}\coth(\frac{\omega}{2T})\frac{\Gamma_j}{2ig}[1+\frac{16\Gamma_j i\omega}{g}D_{p+q}^{(j)}(\omega)]D_q^2(\Omega)D_p(\Omega+\omega)$$
$$-\mu(\frac{64}{g})^2\sum_{j=0}^{3}\int_{pq,\omega}(2\coth(\frac{\omega}{2T})-\tanh(\frac{\omega-E}{2T})-\tanh(\frac{\omega-E'}{2T}))\frac{\Gamma_j}{4ig}[1+\frac{16\Gamma_j i\omega}{g}D_{p+q}^{(j)}(\omega)]D_q^2(\Omega)D_p(\Omega-\omega) \quad (30)$$

При $E = E' = T = 0$ все интегралы берутся элементарно кроме интеграла из предпоследнего слагаемого

$$\int_0^{+\infty}d\omega\omega\int_{pq}D_p^{(j)}(\omega)D_q^2(0)D_{p+q}(\omega) = -\frac{A_\epsilon\Gamma(1-\epsilon)h^{2\epsilon}}{\epsilon\Gamma^2(1-\epsilon/2)}\int_0^1\prod_{i=1}^{3}\delta(\sum_i x_i-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^{-1-\epsilon/2}\frac{x_2}{(ax_1+x_3)^2} \quad (31)$$

где мы опять использовали трюк Фейнмана. Для вычисления интеграла по фейнмановским параметрам x_i введем замену переменных $x_3 = \frac{1-u}{s+1}$, $x_2 = \frac{s}{s+1}$, $x_1 = \frac{u}{s+1}$, $u \in [0;1]$, $s \in [0;+\infty]$. Тогда

$$I = \int_0^1\prod_{i=1}^{3}\delta(\sum_i x_i-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^{-1-\epsilon/2}\frac{x_2}{(ax_1+x_3)^2} = \int_0^1\frac{du(u-u^2)^{1-\epsilon/2}B(2,-1-\epsilon/2)}{(1-u-au)^2}\times$$
$${}_2F_1(2,-\epsilon,1-\epsilon/2;1-u+u^2) \quad (32)$$

Где $B(\alpha,\beta)$ - Бета-функция Эйлера. Используем соотношение для гипергеометрической функции с требуемой точностью

$${}_2F_1(2,-\epsilon,1-\epsilon/2,1-u+u^2) \simeq 1-\epsilon(\frac{1-u+u^2}{u-u^2}-\log(u-u^2)) \quad (33)$$

Теперь все интегралы получаются элементарными и неисчезающие в пределе $\epsilon \to 0$ члены получаются

$$I \simeq \frac{2}{\epsilon}\frac{2(1-a)+(1+a)\log a}{(a-1)^3}+\frac{-2}{a}+\frac{2(a+1)}{(a-1)^3}(Li_2(1-a)+\log a+\frac{\log^2 a}{4})+\frac{2(1+a)\log a}{(a-1)^3} \quad (34)$$

В итоге получаем

$$[P_2^{\alpha_1\alpha_2}]^{RA(2)} \to 32\frac{t^2\,h^{2\epsilon}}{\epsilon^2}\Big[-1+\mu+\frac{\mu}{2}\epsilon\Big]+8\mu\frac{t^2\,h^{2\epsilon}}{\epsilon^2}\sum_{j=0}^{3}\Big[2f(\gamma_j)+3\ln(1+\gamma_j)-\epsilon\frac{2+\gamma_j}{\gamma_j}\Big(\ln(1+\gamma_j)+Li_2(-\gamma_j)$$
$$+\frac{1}{4}\ln^2(1+\gamma_j)\Big)\Big], \quad (35)$$

где $f(x) = 1-(1+1/x)\ln(1+x)$. Собирая вместе ур.(25) и (35), получаем следующий вклад в неприводимый оператор:

$$K_2^{(2)} = \frac{t^2\,h^{2\epsilon}}{4\epsilon^2}\left\{4-2\mu(2+\epsilon)-2\mu\sum_{j=0}^{3}\Big[f(\gamma_j)+2\ln(1+\gamma_j)\Big]-\mu\epsilon\sum_{j=0}^{3}\Big[\ln(1+\gamma_j)+2f(\gamma_j)-c(\gamma_j)\Big]\right\}, \quad (36)$$

где $c(x) = 2+\frac{2+x}{x}\mathrm{Li}_2(-x)+\frac{1+x}{2x}\log^2 x$, где $\mathrm{Li}_2(t)$ - полилогарифм степени 2.

C. Аномальная размерность

Приводимый оператор $\tilde{K}_2$ получается из выражения для K_2 с использованием

$$\tilde{P}_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m) = \langle \mathrm{sp}\,Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{sp}\,Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle+\mu\langle\mathrm{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r})Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle, \quad (37)$$

вместо $P_2^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m)$. Неприводимый оператор K_2 получается из этого выражения вычетом изо всех полей $Q \to Q - \langle Q \rangle$. Приводимый оператор равен

$$\tilde{K}_2 = Z + K_2 = Z m_2' \tag{38}$$

В главном порядке по $t \sim 1/g$ перенормировка напряженности поля[7,11]

$$Z = 1 - \frac{h^\epsilon t}{\epsilon} \sum_{j=0}^{3} \ln(1+\gamma_j) \tag{39}$$

Перенормировка инфракрасной обрезки (бесконечно малой массы поля Q) дается[8]

$$h' = h \left\{ 1 - \frac{t\, h^\epsilon}{2\epsilon} \Big[1 + \sum_{j=0}^{3} \big[f(\gamma_j) + \frac{1}{2}\ln(1+\gamma_j) \big] \Big] \right\} \tag{40}$$

Перенормировка кондактанса в главном порядке дается слаболокализационной поправкой[9–11]

$$g' = g\Big[1 + \frac{a_1 t\, h^\epsilon}{\epsilon} + O(\epsilon)\Big], \quad a_1 = 1 + \sum_{j=0}^{3} f(\gamma_j). \tag{41}$$

удерживая толко расходящиеся члены в аномальной размерности оператора K_2

$$m_2' = m_2 \Big[1 + \frac{b_1 t\, h'^\epsilon}{\epsilon} + \frac{t^2 h'^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \Big(b_2 + \epsilon b_3 \Big) \Big]. \tag{42}$$

получим, используя выражение для K_2 (Ур. (36)), для коэффициентов при этих расходящихся членах выражения

$$b_1 = \mu, \qquad b_2 = 1 - \mu - \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^{3} f(\gamma_j), \qquad b_3 = \frac{\mu}{4} \sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j) \tag{43}$$

Условие, обеспечивающее перенормируемость теории с добавленным к действию локальным оператором K_2 (суть требование о конечности его аномальной размерности в пределе $\epsilon \to 0$) имеет вид

$$b_2 = \frac{b_1(b_1 - a_1)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu^2 + \mu - 2 = 0 \tag{44}$$

Если оно выполняется для μ, то уравнение на аномальную размерность получается конечным в пределе $\epsilon \to 0$

$$-\frac{d \ln m_2^{(\mu)}}{dy} = \mu \left(t + \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j) \right) + O(t^3) \tag{45}$$

где $y = -\ln h'$ - логарифм бегущего масштаба и мы опускаем штрих у всех величин для краткости. Ур. (44) имеет два решения $\mu = -2$ и $\mu = 1$, то есть здесь требование перенормируемости однозначно фиксирует собственные операторы до 2 порядка по $1/g$. Самое существенное замечание здесь состоит в том, что ни они, ни само уравнение на них не зависят от параметров взаимодействия, поэтому естественно предположить, что та же ситуация останется во всех порядках теории возмущений. Операторы, полученные методом фонового поля(98) для невзаимодействующей задачи, конечно, удовлетворяют этому уравнению. Соответствующие операторы $\tilde{P}$ и $\tilde{K}$ мы обозначим как $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ и $\tilde{\mathcal{K}}_2^{(\mu)}$ соответственно.

IV. ОПЕРАТОРЫ С ТРЕМЯ Q

Рассмотрим теперь следующий оператор

$$\begin{aligned}\tilde{P}_3^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k) = \langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \rangle + \mu \langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \big] \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \rangle \\ + \lambda \langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \big] \rangle,\end{aligned} \tag{46}$$

Соответствующий неприводимый оператор

$$\begin{aligned}P_3^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m,i\varepsilon_k) &= \langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle - 3\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle \\ &+2\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle + \mu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r})Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle \\ &-\mu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r})Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle + \lambda\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r})Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r})Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle, \end{aligned} \tag{47}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{P}_3^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m,i\varepsilon_k) &= P_3^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m,i\varepsilon_k) + 3\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle \frac{1}{3}\left(\tilde{\mathcal{P}}_{-2}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m) + 2\tilde{\mathcal{P}}_{1}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m)\right) \\ -2\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle &+ \mu\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle \frac{1}{3}\left(\tilde{\mathcal{P}}_{1}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m) - \tilde{\mathcal{P}}_{-2}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n,i\varepsilon_m)\right)\end{aligned} \tag{48}$$

Неприводимый оператор K_3 получается из P_3 следующим образом

$$K_3 = \frac{1}{8^3}\Big[P^{RRR} - P^{RRA} - P^{RAR} - P^{ARR} + P^{RAA} + P^{ARA} + P^{AAR} - P^{AAA}\Big] \tag{49}$$

Стоит отметить, что квазиклассическое значение ($Q = \Lambda$) $\tilde{K}_3$ равняется единице. Также, значения μ и λ, при которых оператор $\tilde{K}_3$ становится собственным относительно ренормгруппы, могут быть найдены посредством процедуры перенормировки фоновым полем (см. ниже). Также

$$\langle \operatorname{sp} Q_{n_1 n_1}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle = 4sgn(n_1)Z^{1/2} \tag{50}$$

Неприводимый оператор может быть частично представлен с использованием ранее найденного базиса собственных операторов более низкого по Q порядка

$$\tilde{K}_3 = K_3 + Z^{1/2}\big(\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)} + 2\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)}\big) + \frac{\mu}{3}Z^{1/2}\big(\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)} - \tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)}\big) - 2Z^{3/2} \equiv Z^{3/2}m_3' \tag{51}$$

В двупетлевом приближении

$$K_3 = \frac{3\lambda t^2 h^{2\epsilon}}{2\epsilon^2} \tag{52}$$

Поэтому, действуя абсолютно аналогично предыдущему случаю введем

$$m_3' = m_3\Big[1 + \frac{b_1 t\, h'^{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{t^2 h'^{2\epsilon}}{\epsilon^2}\Big(b_2 + \epsilon b_3\Big)\Big]. \tag{53}$$

для коэффициентов получается, аналогично предудущему случаю,

$$b_1 = \mu, \qquad b_2 = 3 + \frac{3\lambda}{2} - \mu - \frac{\mu}{2}\sum_{j=0}^{3} f(\gamma_j), \qquad b_3 = \frac{\mu}{4}\sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j) \tag{54}$$

Опять выражение, обеспечивающее перенормируемость дает одно уравнение на коэффициенты μ и λ, для найденных коэффициентов

$$b_2 = \frac{b_1(b_1 - a_1)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu^2 + \mu = 3\lambda + 6 \tag{55}$$

не зависит от параметров взаимодействия, поэтому и для операторов, кубических по полю Q естественно предположить, что они останутся собственными во всех порядках теории возмущений, хотя в этом случае полученного ур. (55) недостаточно для фиксирования всех коэффициентов в операторе, в отличие от предыдущего случая с двумя полями Q. Но перенормировка фоновым полем в невзаимодействующей задаче (см. Приложение) дает три собственных оператора:

$\tilde{K}_3^{(-6)}$ с $\mu = -6$ и $\lambda = 8$

$\tilde{K}_3^{(-1)}$ с $\mu = -1$ и $\lambda = -2$

$\tilde{K}_3^{(3)}$ с $\mu = 3$ и $\lambda = 2$

Прямой проверкой легко убедиться, что для этих значений уравнение 55 выполнено. Аномальная размерность оператора получается из

$$-\frac{d\ln m_3^{(\mu)}}{dy} = \mu\left(t + \frac{t^2}{2}\sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j)\right) + O(t^3) \tag{56}$$

V. ОПЕРАТОРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ Q

Рассмотрим следующий оператор

$$\begin{aligned}\tilde{P}_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) = \langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ +\mu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ +\lambda\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{lk}^{\alpha_4\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle + \eta\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ +\nu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4}(\boldsymbol{r}) Q_{ln}^{\alpha_4\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle \end{aligned} \tag{57}$$

Соответствующий неприводимый оператор

$$\begin{aligned} P_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) = \tilde{P}_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) - 4\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ +6\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle - 3\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ -2\mu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle + \mu\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ -\eta\langle \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle, \end{aligned} \tag{58}$$

Опять оператор может быть частично выражен через собственные операторы более низкой степени

$$\begin{aligned} \tilde{P}_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) = P_4^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + 3\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ -6\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r})\rangle\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{P}}_{-2}^{\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + \frac{2}{3}\tilde{\mathcal{P}}_{1}^{\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_k, i\varepsilon_l)\right) \\ -\mu\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{P}}_{1}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m) - \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{P}}_{-2}^{\alpha_1\alpha_2}(i\varepsilon_n, i\varepsilon_m)\right)\langle \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r})\rangle\langle \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r})\rangle \\ +4\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\left(\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{P}}_{-6}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + \frac{3}{5}\tilde{\mathcal{P}}_{-1}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{P}}_{3}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l)\right) \\ +\eta\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\left(\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{P}}_{-6}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) - \frac{3}{20}\tilde{\mathcal{P}}_{-1}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + \frac{1}{12}\tilde{\mathcal{P}}_{3}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l)\right) \\ +2\mu\langle \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r})\rangle\left(-\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{P}}_{-6}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) - \frac{1}{10}\tilde{\mathcal{P}}_{-1}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l) + \frac{1}{6}\tilde{\mathcal{P}}_{3}^{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(i\varepsilon_m, i\varepsilon_k, i\varepsilon_l)\right) \end{aligned} \tag{59}$$

Неприводимый оператор K_4 получается из P_4 следующим образом

$$K_4 = \frac{1}{8^4}\sum_{p_1,\ldots,p_4=\pm}\left(\prod_{j=1}^{4} p_j\right) P_4^{p_1\ldots p_4} \tag{60}$$

Квазиклассическое значение $\tilde{K}_4$ равно единице. Значения μ, λ, η и ν, при которых оператор $\tilde{K}_4$ в отсутствие взаимодействия становится собственным относительно ренормгруппы также могут быть найдены посредством перенормировки фоновым полем (см. ниже). Используя ур. (59), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{K}_4 = K_4 + 3Z^2 - 6Z\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)} + \frac{2}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)}\right) - \mu Z\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)} - \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)}\right) + 4Z^{1/2}\left(\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-6)} + \frac{3}{5}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-1)} + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(3)}\right) \\ +\eta Z^{1/2}\left(\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-6)} - \frac{3}{20}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-1)} + \frac{1}{12}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(3)}\right) + 2\mu Z^{1/2}\left(-\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-6)} - \frac{1}{10}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-1)} + \frac{1}{6}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(3)}\right) \equiv Z^2 m_4' \end{aligned} \tag{61}$$

В двупетлевом приближении,

$$K_4 = \frac{\lambda t^2 h^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \tag{62}$$

Поэтому для аномальной размерности

$$m_4' = m_4\Big[1 + \frac{b_1 t\, h'^{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{t^2 h'^{2\epsilon}}{\epsilon^2}\Big(b_2 + \epsilon b_3\Big)\Big]. \tag{63}$$

получается

$$b_1 = \mu, \qquad b_2 = 6 + \lambda + \frac{3\eta}{2} - \mu - \frac{\mu}{2}\sum_{j=0}^{3} f(\gamma_j), \qquad b_3 = \frac{\mu}{4}\sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j) \tag{64}$$

условие перенормируемости

$$b_2 = \frac{b_1(b_1 - a_1)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu^2 + \mu = 3\eta + 2\lambda + 12 \tag{65}$$

опять выполняется, для аномальной размерности этого оператора получается уравнение

$$-\frac{d\ln m_4^{(\mu)}}{dy} = \mu\left(t + \frac{t^2}{2}\sum_{j=0}^{3} c(\gamma_j)\right) + O(t^3) \tag{66}$$

Перенормировка фоновым полем (см. Приложение) дает пять собственных операторов:

$\tilde{K}_4^{(-12)}$ с $\mu = -12$, $\lambda = 12$, $\eta = 32$ и $\nu = -48$

$\tilde{K}_4^{(-5)}$ с $\mu = -5$, $\lambda = -2$, $\eta = 4$ и $\nu = 8$

$\tilde{K}_4^{(-2)}$ с $\mu = -2$, $\lambda = 7$, $\eta = -8$ и $\nu = 2$

$\tilde{K}_4^{(1)}$ с $\mu = 1$, $\lambda = -2$, $\eta = -2$ и $\nu = -4$

$\tilde{K}_4^{(6)}$ с $\mu = 6$, $\lambda = 3$, $\eta = 8$ и $\nu = 6$

Прямой проверкой легко убедиться, что ур. (65) выполняется для всех этих операторов.

VI. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПО Q ОПЕРАТОРЫ СТЕПЕНИ $q > 4$

Операторы старших степеней по Q могут быть объединены в один случай, так как при $q > 4$ все операторы могут быть полностью выражены через собственные операторы более низких степеней, то есть все неприводимые операторы с $q > 4$ зануляются. Рассмотрим оператор старших степеней

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_q^{\alpha_1\cdots\alpha_q}(i\varepsilon_{n_{k_1}},\ldots,i\varepsilon_{n_{k_q}}) &= \langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_1\alpha_1}_{n_{k_1}n_{k_1}}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q^{\alpha_2\alpha_2}_{n_{k_2}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}(\boldsymbol{r})\rangle \\
&+\mu_{2,1,\ldots,1}\langle \operatorname{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_2\alpha_1}_{n_{k_2}n_{k_1}}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q^{\alpha_3\alpha_3}_{n_{k_3}n_{k_3}}(\boldsymbol{r}) \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}(\boldsymbol{r})\rangle \\
&+\mu_{3,1,\ldots,1}\langle \operatorname{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_3\alpha_1}_{n_{k_3}n_{k_1}}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q^{\alpha_4\alpha_4}_{n_{k_4}n_{k_4}}(\boldsymbol{r}) \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}(\boldsymbol{r})\rangle \\
&+\mu_{4,1,\ldots,1}\langle \operatorname{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_4\alpha_1}_{n_{k_4}n_{k_1}}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q^{\alpha_5\alpha_5}_{n_{k_5}n_{k_5}}(\boldsymbol{r}) \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}(\boldsymbol{r})\rangle \\
&+\mu_{2,2,1,\ldots,1}\langle \operatorname{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_2\alpha_1}_{n_{k_2}n_{k_1}}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp}\big[Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_4\alpha_3}_{n_{k_4}n_{k_3}}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q^{\alpha_5\alpha_5}_{n_{k_5}n_{k_5}}(\boldsymbol{r}) \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}(\boldsymbol{r})\rangle \\
&+\cdots + \mu_q\langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}(\boldsymbol{r}) Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}(\boldsymbol{r}) \ldots Q^{\alpha_q\alpha_1}_{n_{k_q}n_{k_1}}(\boldsymbol{r})\rangle,
\end{aligned} \tag{67}$$

Соответствующий неприводимый $\tilde{K}_q$ получается из $\tilde{P}_q$ абсолютно аналогично предыдущим случаям

$$\tilde{K}_q = \frac{1}{2^{3q}}\sum_{p_1,\ldots,p_q=\pm}\left(\prod_{j=1}^{q} p_j\right)\tilde{P}_q^{p_1\ldots p_q} \tag{68}$$

Аналогично, квазиклассическое значение $\tilde{K}_q$ равно единице.

Легко видеть, что неприводимая часть $\tilde{P}_q$ с $q > 4$ не дает вклада в двупетлевом приближении, поэтому нет необходимости рассматривать следующие по степеням Q операторы отдельно, как мы сделали ранее, а можно выписать общие соотношения для всех $q > 4$. Поэтому можно выразить оператор с q операциями взятия следа как

$$\langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_1\alpha_1}_{n_{k_1}n_{k_1}} \ldots \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle \to \prod_{j=1}^{q}\langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle + \frac{1}{2}q(q-1)\prod_{j=1}^{q-2}\langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle\langle\langle \operatorname{sp} Q^{\alpha_{q-1}\alpha_{q-1}}_{n_{k_{q-1}}n_{k_{q-1}}} \cdot \operatorname{sp} Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle\rangle \tag{69}$$

Далее для остальных ненулевых в двупетлевом приближении операторов можно получить их выражение через операторы низшей степени

$$\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_1}_{n_{k_2}n_{k_1}}\big]\,\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_3\alpha_3}_{n_{k_3}n_{k_3}}(\boldsymbol{r})\dots\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle \to \prod_{j=1}^{q-2}\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_{q-1}\alpha_q}_{n_{k_{q-1}}n_{k_q}}\,Q^{\alpha_q\alpha_{q-1}}_{n_{k_q}n_{k_{q-1}}}\big]\rangle$$
$$+(q-2)\prod_{j=1}^{q-3}\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle\langle\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_{q-3}\alpha_{q-3}}_{n_{k_{q-3}}n_{k_{q-3}}}\cdot\mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_{q-1}\alpha_q}_{n_{k_{q-1}}n_{k_q}}\,Q^{\alpha_q\alpha_{q-1}}_{n_{k_q}n_{k_{q-1}}}\big]\rangle\rangle \tag{70}$$

$$\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}\,Q^{\alpha_3\alpha_1}_{n_{k_3}n_{k_1}}\big]\,\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_4\alpha_4}_{n_{k_4}n_{k_4}}\dots\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle \to \langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}\,Q^{\alpha_3\alpha_1}_{n_{k_3}n_{k_1}}\big]\rangle\prod_{j=4}^{q}\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle \tag{71}$$

$$\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}\,Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}\,Q^{\alpha_4\alpha_1}_{n_{k_4}n_{k_1}}\big]\,\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_5\alpha_5}_{n_{k_5}n_{k_5}}\dots\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle \to \langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_3}_{n_{k_2}n_{k_3}}\,Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}\,Q^{\alpha_4\alpha_1}_{n_{k_4}n_{k_1}}\big]\rangle\prod_{j=5}^{q}\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle \tag{72}$$

и

$$\langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_1}_{n_{k_2}n_{k_1}}\big]\,\mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}\,Q^{\alpha_4\alpha_3}_{n_{k_4}n_{k_3}}\big]\,\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_5\alpha_5}_{n_{k_5}n_{k_5}}\dots\mathrm{sp}\,Q^{\alpha_q\alpha_q}_{n_{k_q}n_{k_q}}\rangle$$
$$\to \langle \mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_1\alpha_2}_{n_{k_1}n_{k_2}}\,Q^{\alpha_2\alpha_1}_{n_{k_2}n_{k_1}}\big]\,\mathrm{sp}\big[Q^{\alpha_3\alpha_4}_{n_{k_3}n_{k_4}}\,Q^{\alpha_4\alpha_3}_{n_{k_4}n_{k_3}}\big]\rangle\prod_{j=5}^{q}\langle \mathrm{sp}\,Q^{\alpha_j\alpha_j}_{n_{k_j}n_{k_j}}\rangle \tag{73}$$

То есть

$$\tilde{K}_q = Z^{q/2}+\frac{1}{2}q(q-1)Z^{q/2-1}\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)}+\frac{2}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)}-Z\right)+\mu_{2,1,\dots,1}Z^{q/2-1}\left(\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)}-\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)}\right)$$
$$+(q-2)\mu_{2,1,\dots,1}Z^{(q-3)/2}\left(-\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-6)}-\frac{1}{10}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-1)}+\frac{1}{6}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(3)}-\frac{1}{3}Z^{1/2}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(1)}+\frac{1}{3}Z^{1/2}\tilde{\mathcal{K}}_2^{(-2)}\right)$$
$$+\mu_{3,1,\dots,1}Z^{(q-3)/2}\left(\frac{1}{15}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-6)}-\frac{3}{20}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(-1)}+\frac{1}{12}\tilde{\mathcal{K}}_3^{(3)}\right)$$
$$+\mu_{4,1,\dots,1}Z^{(q-4)/2}\left(-\frac{1}{105}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-12)}+\frac{2}{63}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-5)}+\frac{1}{180}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-2)}-\frac{2}{45}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(1)}++\frac{1}{60}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(6)}\right)$$
$$+\mu_{2,2,1,\dots,1}Z^{(q-4)/2}\left(\frac{1}{105}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-12)}-\frac{2}{63}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-5)}+\frac{7}{90}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(-2)}-\frac{4}{45}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(1)}++\frac{1}{30}\tilde{\mathcal{K}}_4^{(6)}\right)=Z^{q/2}m'_q, \tag{74}$$

где мы опять вводим аномальную размерность оператора

$$m'_q = m_q\Big[1+\frac{b_1th'}{\epsilon}+\frac{t^2h'^{2\epsilon}}{\epsilon^2}\Big(b_2+\epsilon b_3\Big)\Big]. \tag{75}$$

Здесь получаем для коэффициентов

$$b_1=\mu_{2,1,\dots,1},\quad b_2=-\mu_{2,1,\dots,1}\left(1+\frac{1}{2}\sum_j f(\gamma_j)\right)+\frac{1}{2}q(q-1)+\frac{3}{2}\mu_{3,1,\dots,1}+\mu_{2,2,\dots,1},\quad b_3=\frac{1}{4}\mu_{2,1,\dots,1}\sum_j c(\gamma_j) \tag{76}$$

Привычное соотношение перенормируемости опять не зависит от параметров взаимодействия, поэтому собственные операторы невзаимодействующей задачи будут автоматически удовлетворять этому требованию

$$b_2=\frac{b_1(b_1-a_1)}{2}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \mu^2_{2,1,\dots,1}+\mu_{2,1,\dots,1}=3\mu_{3,1,\dots,1}+2\mu_{2,2,\dots,1}+q(q-1) \tag{77}$$

и аномальная размерность дается уравнением

$$-\frac{d\ln m_q^{(\mu)}}{dy}=\mu_{2,1,\dots,1}\left(t+\frac{t^2}{2}\sum_{j=0}^{3}c(\gamma_j)\right)+O(t^3) \tag{78}$$

Стоит отметить, что уравнения на аномальные размерности формально совпадают для всех q, однако зависят от взаимодействия. Поэтому утверждение о том, что операторы, по всей видимости, остаются собственными для ренормгруппы со взаимодействием, является нетривиальным.

VII. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В СЛУЧАЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Утверждение о том, что операторы остаются собственными с учетом взаимодействия становится явно неверным при $T \neq 0$. В перенормировке фоновым полем, обсуждаемой в Приложении, это можно явно увидеть следующим образом: в первом порядке по $1/g$ достаточно рассматривать линейное разложение поля $Q_{fast} \simeq W$, а вклад в пропагатор полей при $r = 0; 3$, зависящий от взаимодействия

$$\langle w_{rj}(p)^{\alpha\beta}_{nm} \overline{w}_{rj}(-p)^{\gamma\delta}_{kl} \rangle = \frac{2}{g} \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \delta_{n-m,l-k} D_p(i\Omega_{nm})(\delta_{nl} - \frac{32\pi T\Gamma_j}{g} \delta^{\alpha\beta} D^{(j)}_p(i\Omega_{nm})) \tag{79}$$

дает нелогарифмический вклад, исчезающий в пределе $T \to 0$. Поэтому, если во всех порядках теории возмущений будет выполнено аналогичное соотношение, тогда оператор останется собственным во всех порядках. Рассмотрим сначала коррелятор полей W, то есть докажем, что во всех порядках теории возмущений выполнено (79).

A. Унитарный класс без взаимодействия

Для унитарного класса при $\Gamma_j = 0$ требуемое утверждение довольно очевидно, так как для любой связной диаграммы в ее выражении будет присутствовать множитель типа

$$\delta_{nn_1} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_2 l} \sim \delta_{nl} \tag{80}$$

и

$$\delta^{\alpha\alpha_1} \delta^{\alpha_1\alpha_2} \delta^{\alpha_2\delta} \sim \delta^{\alpha\delta} \tag{81}$$

Причем каждый индекс мацубаровского пространства однозначно связан с индексом в репличном пространстве, то есть в силу оффдиагональности матрицы W множитель типа $\delta_{nk} = 0$ возникнуть не может, поэтому невозможен множитель $\delta^{\alpha\gamma}$ и $\delta^{\alpha\beta}$.

B. Ортогональный класс без взаимодействия

В случае ортогонального класса появляются Намбу и спиновое пространства, а также становятся ненулевыми корреляторы $\langle ww \rangle$. Последнее обстоятельство никак не меняет аргумент из предыдущей подсекции, поэтому достаточно доказать, что ненулевой коррелятор может возникнуть только из одинаковых по Намбу и спиновому пространству матриц W. Рассмотрим пример выражения шпуров по Намбу и спиновому пространству

$$\mathrm{sp}(\tilde{t}_1 t_i t_j t_k) \, \mathrm{sp}(\tilde{t}_2 t_l t_m) \, \mathrm{sp}(t_i t_l) \, \mathrm{sp}(t_k t_j t_m) \tag{82}$$

где $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$- матрицы внешних полей w из коррелятора, а остальные матрицы соответствуют внутренним полям из диаграммы, причем каждая матрица внутреннего поля встречается дважды в каком-нибудь шпуре. Требуется доказать, что $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$. Мы будем вольно коммутировать матрицы t, используя правила коммутации сигма-матриц и опуская соответствующие знаки, а также учтем то обстоятельство, что отличие коррелятора $\langle ww \rangle$ от $\langle w\overline{w} \rangle$ сводится лишь к преобразованию $C^T t C = \pm t$, то есть никак не меняет рассмотрение.

Итак, назовем шпуры, содержащие матрицы $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ "главными". Для доказательства сначала прокоммутируем совпадающие в главных шпурах матрицы, если такие есть, к $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ и объединим их: $t_1 = \tilde{t}_1 \Sigma$, $t_2 = \tilde{t}_2 \Sigma$, где Σ-это произведение совпадающих матриц. Далее занумеруем в первом главном шпуре все матрицы, отличные от t_1 и будем последовательно подставлять их выражения, следующие из незануления второго шпура, содержащего их. $sp\sigma_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $i = 0$, поэтому в нашем примере (82) t_i надо будет заменить на t_l. Далее надо будет заменить t_j на $t_k t_m$, тогда матрица t_k встретится в первом главном шпуре дважды, и после коммутирования ее можно будет убрать ($t_k^2 = 1$). Если после этой процедуры останутся неиспользованными некоторые шпуры со внутренними матрицами, то такие шпуры содержат матрицы только из главного шпура с $\tilde{t}_2$ (в нашем примере таких нет). Проделывая те же самые шаги, избавимся от этих матриц во втором главном шпуре. Таким образом, пройдя по всем пронумерованным матрицам и убирая совпадающие после каждого шага, придем к тому, что пронумерованные матрицы из первого шпура полностью заменятся теми, которые были во втором главном шпуре. Наконец прокоммутируем эти матрицы в первом шпуре, чтобы и их порядок совпал с тем, что во втором главном шпуре. Тогда условие незануления обоих шпуров гласит

$$1 = \tilde{t}_1 \Sigma \Sigma' = \tilde{t}_2 \Sigma \Sigma' \tag{83}$$

то есть $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$.

C. Ортогональный класс со взаимодействием

Наличие взаимодействия приводит к появлению новых вершин, качественно отличных от ранее наличествовавших, а также к возможности брать вторую часть пропагатора со взаимодействием из выражения (79). Аргумент из предыдущего раздела остается без изменений, поэтому нужно доказать только для репличного и мацубаровского пространств. То, что структура по репликам $\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\alpha\delta}$ однозначно связана со структурой типа $\delta_{n-m,l-k}$, проще всего увидеть на уровне крестовой диаграммной техники: все реплики равны тогда и только тогда, когда линия взаимодействия, диагональная по репликам соединяет различные фермионные линии. Она развяжет мацубаровские индексы в вершинах и приведет лишь к ограничению типа закона сохранения энергии ($\delta_{n-m,l-k}$). Очевидно, что добавление любых линий рассеяния на примесях не изменит этого выражения (в силу упругости и независимости от реплик). Таким образом, в четной корневой параметризации утверждение доказано.

D. Корреляторы $\langle QQ\rangle$

В нашей параметризации $Q = W + \Lambda\sqrt{1-W^2}$ нечетную по W степень имеет лишь первое слагаемое, поэтому $Q_{+-} \neq 0$ возможно лишь когда $Q = W$, поэтому корреляторы полей $\langle Q_{nm}Q_{kl}\rangle$ даются формулой (79), если $sgn(nm) \leq 0$ и $sgn(kl) \leq 0$. Аналогично, остальные корреляторы полей Q будут следующими: при $\langle Q_{++}Q_{--}\rangle$

$$\langle Q^{\alpha\beta}_{nm}Q^{\gamma\delta}_{lk}\rangle = Z\Lambda^{\alpha\beta}_{nm}\Lambda^{\gamma\delta}_{kl} + \ldots \tag{84}$$

где $\ldots$ означает слагаемые, имеющие лишнюю T и не дающие вклада в перенормировку фоновым полем. Этот вклад приводит лишь к тривиальной перенормировке поля $Q \to \sqrt{Z}Q$. Корреляторы типа $\langle Q_{+-}Q_{--}\rangle \sim T$ уходит в пределе $T \to 0$. Наконец для $\langle Q_{++}Q_{++}\rangle$ и $\langle Q_{--}Q_{--}\rangle$

$$\langle Q^{\alpha\beta}_{nm}Q^{\gamma\delta}_{lk}\rangle = Z\Lambda^{\alpha\beta}_{nm}\Lambda^{\gamma\delta}_{kl} + X(\delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\delta_{nk}\delta_{ml} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta}\delta_{nl}\delta_{mk}) + \ldots \tag{85}$$

где X - некий логарифмический интеграл от быстрых полей, появляющийся из-за взаимодействия. В этом интеграле пренебрегается зависимостью от внешних медленных частот n, m, k, l. В унитарном случае второго слагаемого, пропорционального X, нет. С помощью этих корреляторов находим новые правила слияния в унитарном случае

$$\langle \mathrm{Tr}(AQ)\,\mathrm{Tr}(BQ)\rangle = 2Y(\mathrm{Tr}(AB - \Lambda A\Lambda B)) + 2X(\mathrm{Tr}(AB + \Lambda A\Lambda B)), \quad Y = \frac{2}{g}\int_p \tilde{D}_p(0) \tag{86}$$

$$\langle \mathrm{Tr}(AQBQ)\rangle = 2Y(\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) - Tr(\Lambda A)\,\mathrm{Tr}(\Lambda B)) + 2X(\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) + Tr(\Lambda A)\,\mathrm{Tr}(\Lambda B)), \quad Y = \frac{2}{g}\int_p \tilde{D}_p(0) \tag{87}$$

При перенормировке фоновым полем слагаемые типа $\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ и $\mathrm{Tr}(AB)$ вклада не дают, поэтому с учетом замены $Y \to Y - X$ перенормировка квадратичных операторов остается неизменной во всех порядках. Мы полагаем, что такой же агрумент работает для ортогонального класса и для всех изучаемых операторов.

VIII. ВЫВОДЫ

Итак, мы получаем, что изучаемый подкласс собственных операторов ренормгруппы сигма-модели без взаимодействия удовлетворяют уравнению, получаемому из требования перенормируемости теории при наличии взаимодействия. Конечно, приведенное вычисление до второго порядка по теории возмущений не является строгим доказательством того, что операторы остаются собственными вообще, но оно является сильным на то указанием. Если получится вывести математически строгое доказательство того, что операторы останутся собственными во всех порядках теории возмущений, тогда соответствие между операторами взаимодействующей и невзаимодействующей задачи станет тривиальным: нужно взять оператор невзаимодействующей задачи с фиксированными репличными индексами, запаздывающий заменить на некоторую неотрицательную мацубаровскую частоту, опережающий индекс на отрицательную, учесть перенормировку поля W множителем $(\sqrt{Z})^{k/2}$, где k - количество полей Q во взятом операторе и получить собственный оператор задачи со взаимодействием. Таким образом с невзаимодействующей задачи перенесется подкласс собственных операторов без производных от поля Q. Физически эти операторы характеризуют корреляции плотности состояний на близких расстояниях и в принципе могут быть получены из прямого подсчета соответствующих средних с карты измерений туннельного тока в экспериментах туннельной микроскопии.

Собственные операторы, квадратичные по Q, могут быть выражены через плотность состояний как

$$K_2^{(-2)} = \langle\langle \rho(r=0)\rho(0)\rangle\rangle \tag{88}$$

$$K_2^{(1)} = \frac{1}{2}\langle\langle (3\rho(r) - \rho(r=0))\rho(0)\rangle\rangle, \quad \lambda_F \ll |r| \ll l \tag{89}$$

Требование $|r| \ll l$ длины свободного пробега означает, что точки неразличимы для поля Q, а требование $\lambda_F \ll |r|$ означает, что мы пренебрегаем спариванием фермионных полей в предэкспоненте $\langle \psi^\star(r)\psi(0)\rangle \sim \frac{e^{ik_F r}}{\sqrt{k_F r}} \sim \frac{1}{\sqrt{g}}$. Как было указано во Введении, второй оператор дает дополнительную информацию о корреляциях плотности состояний. Операторы третьей степени могут быть выражены через плотность состояний как

$$K_3^{(-6)} = \frac{1}{8^3}\langle\langle \rho(0)^3\rangle\rangle \tag{90}$$

$$K_3^{(-1)} = \frac{1}{8^3}[\frac{5}{4}\langle\langle \rho(r)\rho(0)^2\rangle\rangle - \frac{1}{4}\langle\langle \rho(0)^3\rangle\rangle], \quad \lambda_F \ll |r| \ll l \tag{91}$$

$$K_3^{(3)} = \frac{1}{8^3}[\frac{1}{4}\langle\langle \rho(0)^3\rangle\rangle + 3\langle\langle \rho(r)\rho(r')\rho(0)\rangle\rangle - \frac{9}{4}\langle\langle \rho(0)^2\rho(r)\rangle\rangle], \quad \lambda_F \ll |r|, |r-r'|, |r'| \ll l \tag{92}$$

Оператор с наибольшей аномальной размерностью, соответствующий третьему моменту локальной плотности состояний, имеет аргументом одну точку образца. Оператор со следующей по величине аномальной размерностью $K_3^{(-1)}$ требует для определения 2 точки, что в некотором смысле отвечает необходимости вычесть главный, наиболее быстро растущий вклад в корреляции плотностей состояний. Для определения третьего оператора $K_3^{(3)}$ нужны уже 3 точки, так как нужно убрать главный и сублидирующий вклады.

IX. ПРИЛОЖЕНИЕ: ПЕРЕНОРМИРОВКА МЕТОДОМ ФОНОВОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы проведем перенормировку изучаемых операторов методом фонового поля в однопетлевом приближении без взаимодействия и найдем собственные операторы ренормгруппы в этом приближении.

1. Операторы с двумя Q

$$A_{1,1} = \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}), \qquad A_2 = \operatorname{sp} Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \tag{93}$$

метод фонового поля заключается в подстановке $Q \to T_0^{-1} Q T_0$, где в правой части поле Q считается быстрым (в смысле мацубаровских частот и импульсов), а поле T_0 - медленным и последующем усреднении по быстрым полям для получения эффективного действия на медленное поле $Q_0 = T_0^{-1}\Lambda T_0$. Используя известные правила слияния,

$$\langle \operatorname{Tr}(AW) \operatorname{Tr}(BW)\rangle = 2Y(\operatorname{Tr}(AB - \Lambda A\Lambda B - ACB^T C + \Lambda A\Lambda CB^T C)), \quad Y = \frac{2}{g}\int_p D_p(0) \tag{94}$$

$$\langle \operatorname{Tr}(AWBW)\rangle = 2Y(\operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B) - Tr(\Lambda A)\operatorname{Tr}(\Lambda B) + \operatorname{Tr}(ACB^T C) - \operatorname{Tr}(\Lambda A\Lambda CB^T C)), \quad Y = \frac{2}{g}\int_p D_p(0) \tag{95}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} A_2[Q] \\ A_{1,1}[Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2[Q_0] \\ A_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2[Q_0] \\ A_{1,1}[Q_0] \end{pmatrix} \tag{96}$$

где мы пренебрегаем под интегралом зависимостью пропагатора от частоты (частоты "медленные")

$$Y = \frac{4}{g}\int_q \mathcal{D}_q(0) = t\ln L/l. \tag{97}$$

Собственные числа матрицы (со знаком минус) в ур. (96) - $\lambda_2^{(1)} = -2$ и $\lambda_2^{(2)} = 1$, а соответствующие собственные операторы

$$\mathcal{P}_2^{(-2)} = A_{1,1} - 2A_2, \qquad \mathcal{P}_2^{(1)} = A_{1,1} + A_2. \tag{98}$$

2. Операторы с тремя Q

Поступая абсолютно аналогично с операторами, кубическими по полю Q

$$A_{1,1,2} = \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}), \qquad A_{1,2} = \operatorname{sp} Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}), \tag{99}$$

$$A_3 = \operatorname{sp} Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \tag{100}$$

получим

$$\begin{pmatrix} A_{1,1,1}[Q] \\ A_{1,2}[Q] \\ A_3[Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1,1}[Q_0] \\ A_{1,2}[Q_0] \\ A_3[Q_0] \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1,1}[Q_0] \\ A_{1,2}[Q_0] \\ A_3[Q_0] \end{pmatrix} \tag{101}$$

Собственные числа матрицы (со знаком минус) в ур. (101) - $\lambda_2^{(1)} = -6$, $\lambda_2^{(2)} = -1$ и $\lambda_2^{(3)} = 3$, а соответствующие собственные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{(-6)} &= A_{1,1,1} - 6A_{1,2} + 8A_3, \qquad \mu = -6, \lambda = 8, \\ \mathcal{P}_2^{(-1)} &= A_{1,1,1} - A_{1,2} - 2A_3, \qquad \mu = -1, \lambda = -2, \\ \mathcal{P}_2^{(3)} &= A_{1,1,1} + 3A_{1,2} + 2A_3, \qquad \mu = 3, \lambda = 2. \end{aligned} \tag{102}$$

3. Операторы с четырьмя Q

Для операторов с четырьмя Q

$$A_{1,1,1,1} = \operatorname{sp} Q_{nn}^{\alpha_1\alpha_1}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{mm}^{\alpha_2\alpha_2}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r}), \qquad A_{2,1,1} = \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{kk}^{\alpha_3\alpha_3}(\boldsymbol{r}) \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r}),$$

$$A_{3,1} = \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kn}^{\alpha_3\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp} Q_{ll}^{\alpha_4\alpha_4}(\boldsymbol{r}), \qquad A_4 = \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mk}^{\alpha_2\alpha_3}(\boldsymbol{r}) Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4}(\boldsymbol{r}) Q_{ln}^{\alpha_4\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big]$$

$$A_{2,2} = \operatorname{sp}\big[Q_{nm}^{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}) Q_{mn}^{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r})\big] \operatorname{sp}\big[Q_{kl}^{\alpha_3\alpha_4}(\boldsymbol{r}) Q_{lk}^{\alpha_4\alpha_3}(\boldsymbol{r})\big] \tag{103}$$

получим

$$\begin{pmatrix} A_{1,1,1,1}[Q] \\ A_{2,1,1}[Q] \\ A_{2,2}[Q] \\ A_{3,1}[Q] \\ A_4[Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1,1,1}[Q_0] \\ A_{2,1,1}[Q_0] \\ A_{2,2}[Q_0] \\ A_{3,1}[Q_0] \\ A_4[Q_0] \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1,1,1}[Q_0] \\ A_{2,1,1}[Q_0] \\ A_{2,2}[Q_0] \\ A_{3,1}[Q_0] \\ A_4[Q_0] \end{pmatrix} \tag{104}$$

Собственные числа матрицы (со знаком минус) в ур. (104) - $\lambda_4^{(1)} = -12$, $\lambda_4^{(2)} = -5$, $\lambda_4^{(3)} = -2$, $\lambda_4^{(4)} = 1$, и $\lambda_4^{(5)} = 6$. Соответствующие собственные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{(-12)} &= A_{1,1,1,1} - 12A_{2,1,1} + 12A_{2,2} + 32A_{3,1} - 48A_4, \qquad \mu = -12, \lambda = 12, \eta = 32, \nu = -48 \\ \mathcal{P}_4^{(-5)} &= A_{1,1,1,1} - 5A_{2,1,1} + 3A_{2,2} + 8A_{3,1} + 6A_4, \qquad \mu = -5, \lambda = -2, \eta = 4, \nu = 8 \\ \mathcal{P}_4^{(-2)} &= A_{1,1,1,1} - 2A_{2,1,1} + 7A_{2,2} - 8A_{3,1} + 2A_4, \qquad \mu = -2, \lambda = 7, \eta = -8, \nu = 2 \\ \mathcal{P}_4^{(1)} &= A_{1,1,1,1} + A_{2,1,1} - 2A_{2,2} - 2A_{3,1} - 4A_4, \qquad \mu = 1, \lambda = -2, \eta = -2, \nu = -4 \\ \mathcal{P}_4^{(6)} &= A_{1,1,1,1} + 6A_{2,1,1} + 3A_{2,2} + 8A_{3,1} + 6A_4, \qquad \mu = 6, \lambda = 3, \eta = 8, \nu = 6 \end{aligned} \tag{105}$$

[1] F. Evers, A.D. Mirlin Rev. Mod. Phys. 80, 1355 (2008)
[2] Daniel Hof and Franz Wegner, Nucl. Phys. **B275**, (1986).
[3] Franz Wegner, Nucl. Phys. **B280**, FS18 (1987).
[4] I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, M. R. Zirnbauer Phys. Rev. B 87, 125144 (2013)
[5] I.S. Burmistrov, I.V. Gornyi, A.D. Mirlin, Phys. Rev. B 91, 085427 (2015).
[6] A. M. Finkelstein, in Electron Liquid in Disordered Conductors, edited by I. M. Khalatnikov, Soviet Scientific Reviews, Vol. 14 (Harwood Academic, London, 1990).
[7] D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. 66, 261 (1994).
[8] M. A. Baranov, A. M. M. Pruisken, and B. Skoric, Phys. Rev. B 60, 16821 (1999).
[9] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Sov. Phys. JETP 50, 968 (1979); B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. 44, 1288 (1980); B. L. Altshuler and A. G. Aronov, in Electron-Electron Interactions in Disordered Conductors, edited by A. J. Efros and M. Pollack (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1985).
[10] A. M. Finkelstein, JETP Lett. 37, 517 (1983); ,Sov. Phys. JETP 53, 97 (1983); ,59, 212 (1984).
[11] C. Castellani, C. DiCastro, P. A. Lee, and M. Ma, Phys. Rev. B 30, 527 (1984).