

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Неадиабатические геометрические фазы и  
дефазировка в открытых квантовых  
системах»  
(Дипломная работа)

студента 028 группы  
А.Е. Светогорова  
научный руководитель  
д.ф-м.н. Ю.Г. Махлин

Черноголовка 2016

# Оглавление

Оглавление	1
1 Введение.	1
2 Фаза Ааронова-Анандана. Шумовые поправки к фазе.	4
3 Поправки к адиабатическому случаю.	9
4 Квазистационарный шум.	12
5 Заключение.	16
Приложение А Фаза Ааронова-Анандана без шума.	17
Приложение В Диаграммная техника.	20
Приложение С Дефазировка в случае коротко-коррелированного шума.	25
Приложение D Поправка к фазе и дефазировка в случае квазистационарного шума.	28
Приложение E Джозефсоновский зарядовый кубит.	31
6 Список литературы	34

## **Аннотация**

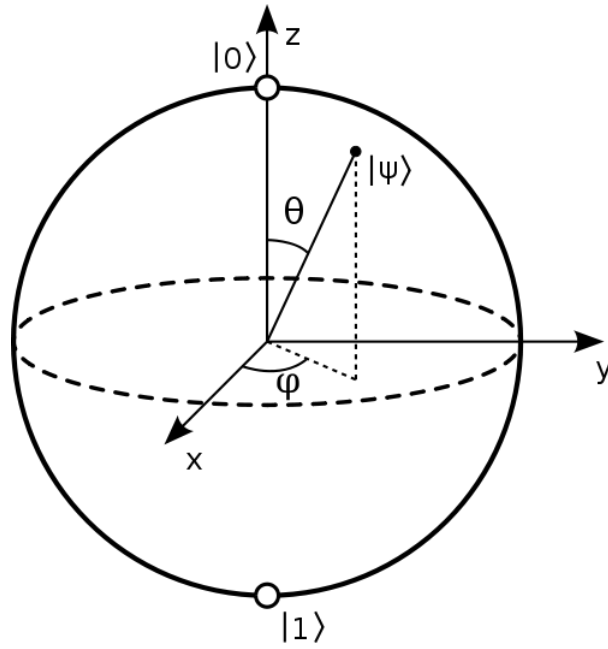
В работе изучается взаимодействие двухуровневой системы с окружающей средой. Находится его влияние на геометрические фазы систем с циклической эволюцией. Рассматривается случай коротко-коррелированного и квазистационарного шума, находится фаза, набираемая за время циклической эволюции с учетом влияния шумов, выделяется динамический, геометрический (адиабатический) и негеометрический-неадиабатический вклады. Находятся времена дефазировки. Проводится сравнение с результатом экспериментального наблюдения.

# Глава 1

## Введение.

Квантовую систему можно заставить совершить циклическую эволюцию, меняя параметры Гамильтониана. Например, адиабатически меняя параметры Гамильтониана двухуровневой системы так, чтобы они возвращались к исходным, можно взять два собственных состояния Гамильтониана (в каждый момент времени), которые вместе с Гамильтонианом совершат циклическую эволюцию (вернутся сами в себя). Такие состояния приобретают за каждый цикл фазу, представимую в виде двух слагаемых: динамической и геометрической части [2] (фаза Берри). Фаза Берри определяется траекторией в пространстве Гамильтониана, а динамическая фаза набирается за счет разности энергий квазистационарных собственных состояний  $\int E dt$ . Более того, меняя параметры Гамильтониана произвольным образом, мы все равно можем выделить два состояния с циклической эволюцией (если нет вырождения). Такие состояния приобретают за каждый цикл фазу, которая тоже разделяется на динамическую и геометрическую части [1] (фаза Ааронова-Анандана). Без условия адиабатичности динамическая фаза определяется, как  $\int dt \langle \psi | H | \psi \rangle$ , а геометрическая задается траекторией состояния с циклической эволюцией на сфере Блоха (половина телесного угла, заметаемого состоянием на сфере Блоха). Впервые фаза Ааронова-Анандана была измерена экспериментально при помощи ядерного магнитного резонанса на трехуровневой системе, где два верхних уровня использовались в качестве эффективно двухуровневой системы, а разность фаз измерялась по влиянию на частоту перехода в основное состояние [3].

Рис. 1.1: Bloch sphere



Динамика реальных систем с циклической эволюцией сложнее, так как нужно учитывать взаимодействие с окружающей средой. Его можно представить в виде различного вида шумов. Поэтому для описания реальных систем необходимо учитывать эффекты связанные с шумами. В частности, интересна задача влияния таких шумов на кубиты, так как это непосредственно влияет на время жизни информации, хранящейся в такой ячейке памяти. Любую двухуровневую систему удобно моделировать в виде спина-1/2 в магнитном поле. Тогда, например, шум в напряжении Джозефсоновского зарядового кубита переписывается в виде шумовой добавки к магнитному полю по одной из осей (см. приложение [E]). Влияние взаимодействия с окружающей средой на эволюцию двухуровневой системы интересно и в общем случае, так как легко обобщается на многоуровневые системы [4].

В настоящей работе исследуется влияние шума на фазы двухуровневых систем. Ранее было показано [5], что в адиабатическом случае коротко-коррелированный анизотропный шум (по оси z) добавляет к набираемой фазе поправку, которую так же можно разделить на динамическую и геометрическую (зависящую только от траектории) части. Вычисления в работе [5] производились при помощи нахождения оператора эволюции матрицы плотности системы (недиагональные элементы со-

держат разность фаз двух циклических состояний, так как  $\langle \sigma_{x'} + i\sigma_{y'} \rangle = \rho_{01}$ ). Однако без адиабатического приближения все оказывается сложнее. Поправка к фазе не разделяется явно на не зависящую и зависящую от времени одного цикла эволюции части. Но можно рассмотреть случай малых  $\omega$ , разложить результат по частоте и найти поправки к адиабатическому случаю. Так же можно рассмотреть дефазировку состояния (затухание продольной и поперечной компоненты спинора), получить времена  $T_1$  и  $T_2$ , чтобы проверить применимость предположения о малости времени когерентности шума. Отдельно мы рассмотрели противоположный случай квазистационарного шума, когда поправка к магнитному полю меняется на временах куда больших времени одного цикла системы. Для этого случая есть результаты экспериментальных измерений дефазировки в системе с искусственно созданным шумом [6]. Дальше мы обсудим полученные в эксперименте результаты и сравним с предсказаниями.

План изложения следующий. Сначала коротко рассмотрим концепцию геометрической фазы на примере фазы Берри (адиабатический случай), затем обобщим на неадиабатический случай и проследим, как набирается фаза Ааронова-Анадана в бесшумовом случае, после чего приведем вывод выражения для шумовой поправки к фазе в общем виде. Далее будет рассмотрено разложение результата по частоте в случае малых  $\omega$  и простой траектории, получим поправку к адиабатическому случаю, оценим времена дефазировки. После чего рассмотрим случай квазистационарного  $1/f$  шума (который тоже часто наблюдается в исследуемых системах), найдем поправку к фазе и дефазировку. Получим выражение для дефазировки в случае радиального шума, сравним с теоретическим предсказанием и результатом эксперимента в работе [6].

## Глава 2

# Фаза Ааронова-Анандана. Шумовые поправки к фазе.

Простейшим случаем геометрической фазы является фаза Берри [2]. Было обнаружено, что при адиабатической циклической эволюции система набирает не только фазу, связанную с энергией состояния, но и фазу, зависящую только от траектории, по которой циклически меняется Гамильтониан. В случае двухуровневой системы удобно описать все на языке спина-1/2 в магнитном поле. Так как Гамильтониан меняется адиабатически, можно считать, что собственными состояниями являются спин по полю и против поля. Значит, если поле совершает циклическую эволюцию, то и собственные состояния вернуться сами в себя с точностью до фазового множителя, который содержит как динамический вклад, так и геометрический (фазу Берри), пропорциональный телесному углу, замигаемому траекторией Гамильтониана:  $e^{i\phi_{\pm}} = \exp\left(-i \int_0^T E dt\right) e^{\mp \frac{i}{2}\Omega}$ . Были предложены экспериментальные методы измерения геометрической фазы в различных системах [15], [8], [9], [10], [11]. Ааронов и Анандан [1] обобщили концепцию фазы Берри на неадиабатический случай. В этом случае геометрическую фазу можно определить, как величину, задаваемую траекторией самого состояния (половина телесного угла на сфере Блоха), которое возвращается само в себя (с точностью до фазы)

(см. приложение [A]) ( $e^{i\phi_{\pm}} = \exp\left(\pm i \int_0^T \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle dt\right) e^{\mp \frac{i}{2}\Omega}$ ). В случае взаимодействия с окружающей средой можно следить за фазой матрицы плотности (в базисе циклических состояний, которые мы определяем, как собственные для оператора эволюции). Для этого достаточно написать уравнение на недиагональные элементы (их фаза есть разность фаз двух состояний в чистом случае, а в нашем приближении можно разделить уравнения на диагональные и недиагональные элементы матрицы плотности).

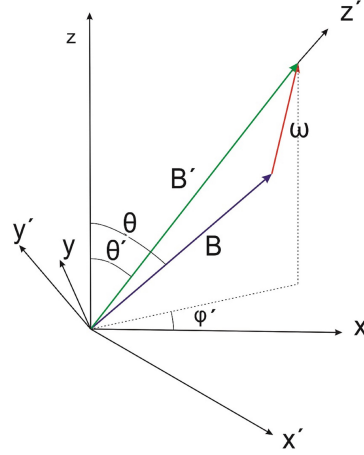


Рис. 2.1: Вращающаяся система координат  $x'y'z'$ , которая вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно лабораторной системы отсчета  $xyz$ .  $z'$  следует за циклическим состоянием,  $y'$  для определенности всегда находится в исходной плоскости  $xy$

Гамильтониан системы с анизотропным шумом по оси  $z$ .

$$H_s = -\frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\sigma - \frac{1}{2}X\sigma_z + H_{env}(X) \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{X}$  есть шумовая поправка к полю. Удобно работать во вращающейся системе отсчета, которая вращается с угловой скоростью  $\omega$ , ось  $z'$  следует за циклическим состоянием на сфере Блоха, для определенности считаем, что ось  $y'$  все время остается в исходной плоскости  $xy$ . Тогда Гамильтониан (аналогично [5])

$$H = -\frac{1}{2}B'\sigma_{z'} - \frac{1}{2}X(\cos\theta'\sigma_{z'} - \sin\theta'\sigma_{x'}) + H_{env} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \omega$  есть эффективное поле во вращающейся системе отсчета



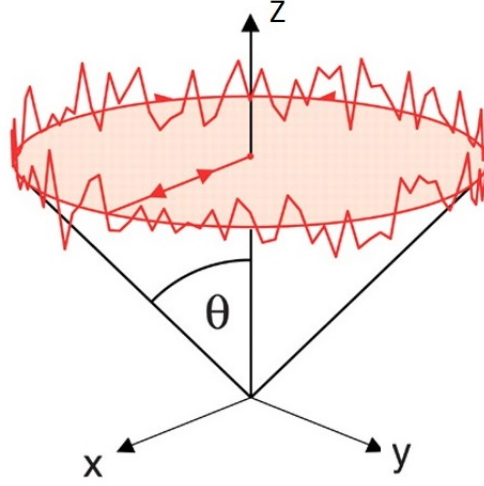


Рис. 2.2: Траектория состояния для коротко-коррелированного анизотропного шума по оси  $z$

Тогда усреднить матрицу плотности по шуму можно при помощи техники, развитой Schoeller и Schön [12] [В].

Получим уравнение Блоха на недиагональный элемент матрицы плотности

$$\frac{d}{dt}\rho_{01}(t) = iB'\rho_{01}(t) + \Gamma_{01 \rightarrow 01}\rho_{01}(t) \quad (2.3)$$

где  $\Gamma_{01 \rightarrow 01}$  - компонента тензора Блоха-Редфилда.

$$\Gamma_{01 \rightarrow 01} = - \int_{-\infty}^t dt_1 S(t-t_1) \times \left[ \cos \theta'(t) \cos \theta'(t') + \frac{1}{2} \sin \theta'(t) \sin \theta'(t') \exp \left( -i \int_{t'}^t B'(\tau) d\tau \right) \right] \quad (2.4)$$

где

$$S(t-t') = \frac{1}{2} (\langle X(t)X(t') \rangle + \langle X(t')X(t) \rangle)$$

Так как шум коротко-коррелирован, то интеграл набирается на таких  $t'$ , когда можно пользоваться разложением.

$$\theta'(t') = \theta'(t) - \omega_{y'}(t-t')$$

$$B'(\tau) = B'(t) - \dot{B}'(t)(t - \tau)$$

Для краткости обозначений в дальнейшем значения взяты в момент времени  $t$ , если не указано другое.

Воспользуемся полученным разложением.

$$\begin{aligned} \Gamma_{01 \rightarrow 01} = & - \int_{-\infty}^t dt' S(t - t') \{ \cos \theta' (\cos \theta' + \sin \theta' \omega_{y'} (t - t')) + \\ & + \frac{1}{2} \sin \theta' (\sin \theta' - \cos \theta' \omega_{y'} (t - t')) \times \\ & \times \exp \left( -i \int_{t'}^t (B' - \dot{B}'(t - \tau)) d\tau \right) \} \end{aligned}$$

Так как коррелятор можно считать нулевым на временах больше корреляционного времени (а так как шум коротко-коррелирован, то  $\tau_c \ll T, T_1, T_2$ ), то можно продолжить интегрирование до  $+\infty$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01 \rightarrow 01} = & - \int_{-\infty}^{\infty} dt S(t) \{ \cos \theta' (\cos \theta' + \sin \theta' \omega_{y'} t) + \\ & + \frac{1}{2} \sin \theta' (\sin \theta' - \cos \theta' \omega_{y'} t) \exp(-iB't) + \frac{i}{2} \sin^2 \theta' \dot{B}' \frac{t^2}{2} \exp(-iB't) \} \end{aligned}$$

Теперь перейдем к Фурье-представлению коррелятора, тогда тензор можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{01 \rightarrow 01} = & -i \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \frac{\cos^2 \theta'}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \theta'}{2(\Omega - B' + i0)} \right) \\ & + \omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{(\Omega + i0)^2} - \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{2(\Omega - B' + i0)^2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \dot{B}' \sin^2 \theta' \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поправка к фазе получается из уравнения 2.3 интегрированием мнимой части  $\Gamma_{01 \rightarrow 01}$  по времени.

$$\Delta\phi = - \int_0^T \text{Im}\Gamma_{01 \rightarrow 01} dt$$

При этом при прохождении полного цикла последние два слагаемых в (2.5) занулятся.

Найдена поправка к фазе в случае произвольной траектории для коротко-коррелированного анизотропного шума. Результат можно использовать и для изотропного случая, если сложить вклады от шума по всем трем осям.

## Глава 3

# Поправки к адиабатическому случаю.

Полученный в общем виде результат не разделяется на динамическую и геометрическую части. Однако, можно рассмотреть случай близкий к адиабатическому и разложиться, используя малость частоты (как это делалось в [6]). Тогда можно будет выделить динамический вклад, геометрический, а так же поправки к адиабатическому, т.е. неадиабатический-негеометрический вклад. Для простоты разберем случай эволюции по кругу вокруг оси  $z$  с постоянной  $\omega$ . Тогда поправка к фазе будет иметь вид

$$\Delta\phi = -Re \int dt \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2 \theta'}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \theta'}{2(\Omega - B' + i0)} \right]$$

Разложим эффективное поле по частоте

$$\begin{aligned} B' &= \sqrt{B^2 \sin^2 \theta + (B \cos \theta + \omega)^2} = \sqrt{B^2 + 2B\omega \cos \theta + \omega^2} \approx \\ &\approx B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{2B^2} \right) \end{aligned}$$

Так же учтем, что в адиабатическом случае ( $\omega \rightarrow 0$ ) у нас все выражается через угол  $\theta$  - между полем и осью  $z$ . Выразим косинус и синус угла с эффективным полем через  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ , используя малость по  $\omega/B$

$$\sin \theta' = \frac{B \sin \theta}{B'} \approx \sin \theta \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right)$$

$$\sin^2 \theta' \approx \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

Тогда представим поправку к фазе в виде

$$\Delta \phi \approx -Re \int dt \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) F(\omega, \theta, \Omega)$$

$S(\Omega)$  - четная, значит,

$$F(\omega, \theta, \Omega) \approx \frac{\sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right)}{2 \left( \Omega - B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{2B^2} \right) + i0 \right)} \approx$$

$$\approx \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B + i0)} \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right) \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{\Omega - B + i0} + \frac{\omega^2 \cos^2 \theta}{(\Omega - B + i0)^2} + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{2B(\Omega - B + i0)} \right) \quad (3.1)$$

Получим

$$F(\omega, \theta, \Omega) \approx \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B + i0)} (1 + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \dots), \quad (3.2)$$

$$\beta = \frac{(3B - 2\Omega) \cos \theta}{B(\Omega - B + i0)}, \quad \gamma = \frac{4 \cos^2 \theta - 1}{B^2} +$$

$$+ \frac{\cos^2 \theta}{(\Omega - B + i0)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{2B(\Omega - B + i0)}.$$

При интегрировании по времени член не зависящий от частоты даст аналог динамического вклада, линейный по частоте даст независящий от времени вклад (поправку к фазе Берри в точности такую же, как была получена в [5]), а последующие члены дадут поправку к адиабатическому случаю, которые уже не будут геометрическими.

Если рассмотреть действительную часть (2.5), можно найти скорость дефазировки (скорость релаксации компоненты спина, ортогональной эффективному магнитному полю). Получим выражение для времени релаксации поперечной компоненты (время дефазировки состояния)

$$\frac{1}{T_2} = Re \left( i \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2 \theta'}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \theta'}{2(\Omega - B' + i0)} \right] \right)$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2}S(0) \cos^2 \theta' + \frac{1}{4}S(B') \sin^2 \theta' \quad (3.3)$$

Если опять же рассмотреть случай круговой эволюции и разложиться по  $\omega/B$ , то получим (см. приложение [C])

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_2} \approx & \frac{1}{2}S(0) \cos^2 \theta + \frac{1}{4}S(B) \sin^2 \theta + \frac{\omega}{B} \cos \theta \sin^2 \theta \left[ S(0) + \frac{S'(B)B}{4} - \frac{1}{2}S(B) \right] + \\ & + \frac{\omega^2}{B^2} \left( \frac{1}{2}S(0) \sin^2 \theta [1 - 4 \cos^2 \theta] + \frac{\sin^2 \theta}{4} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{1}{2}S''(B)B^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}S'(B)B(1 - 4 \cos^2 \theta) + (4 \cos^2 \theta - 1)S(B) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для нахождения времени затухания продольной (вдоль эффективного поля) компоненты спина понадобится уравнение на диагональные элементы матрицы плотности [13] (задают динамику заселенности уровней и не зависят от фазы). Получим (см. приложение [B])

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\sin^2 \theta'}{2}S(B'). \quad (3.5)$$

Для него разложение в случае простой эволюции дает (см. приложение [C])

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} \approx & \frac{\sin^2 \theta}{2}S(B) + \frac{\omega}{B} \cos \theta \sin^2 \theta \left( \frac{S'(B)B}{2} - 2S(B) \right) + \\ & + \frac{\omega^2}{2B^2} \left( \frac{1}{2}S''(B)B^2 \cos^2 \theta + S(B)(4 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2}S'(B)B(1 - 4 \cos^2 \theta) \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

## Глава 4

# Квазистационарный шум.

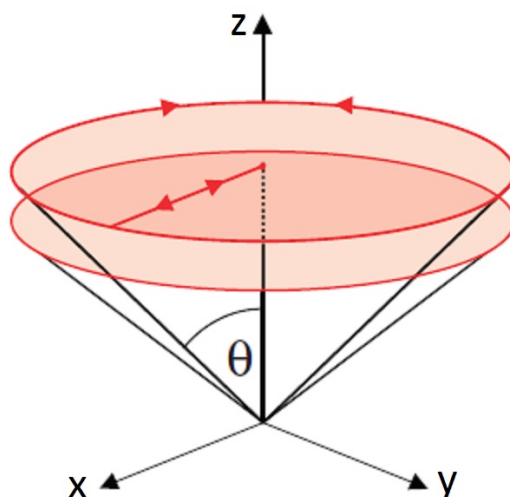


Рис. 4.1: Траектории состояния для квазистационарного анизотропного шума по оси  $z$

Мы разобрали влияние коротко-коррелированных (высокочастотных) шумов на двухуровневые системы. Однако, в некоторых случаях доминирующими оказываются шумы на других частотах, например,  $1/f$  шум. Такой шум может быть вызван в системах с Джозефсоновскими зарядовыми кубитами "фоновыми флуктуациями заряда" и может быть представлен в виде эффективного шума в напряжении [7],[13]. Экспериментально такие шумы исследовались в [7] методом спинового эха.

В таком случае шум имеет очень большое корреляционное время ( $\tau_c \gg 1/\omega$ ), тогда можно считать, что в течении одного цикла поправка к полю постоянна. Значит, в этом случае нужно усреднить по мно-

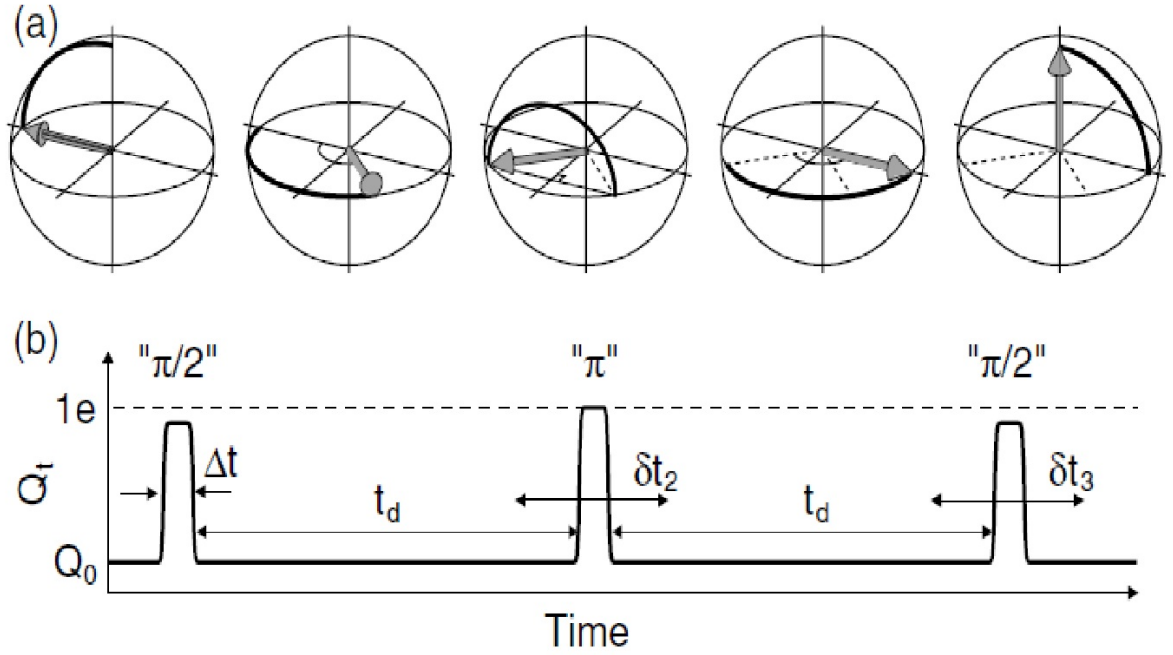


Рис. 4.2: Метод спинового эха, используемый [7] для исследования влияния шума на затухание состояния

гим циклам. Это делается усреднением экспоненты от  $i \int |\mathbf{B}' + \mathbf{X}| dt$  по  $X$ . Разложим выражение под интегралом до второго порядка по  $\mathbf{X}$ :  $|\mathbf{B}' + \mathbf{X}| \approx B' + X_{\parallel} + (X_{\perp}^2/2B')$ . Тогда поправка к фазе будет определяться как раз усреднением члена второго порядка

$$\delta\Phi = \frac{T}{2B'} \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta' \quad (4.1)$$

Как и для коротко-коррелированного шума можно разложить для случая простой эволюции по частоте и получить разделение на динамический, геометрический и неадиабатический вклады (см. приложение [D])

$$\delta\Phi = \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (7 \cos^2 \theta - 3/2) \right)$$

Дефазировка же находится усреднением действительной части разложения экспоненты.

$$e^{-D} \quad , \quad D = \frac{1}{2} T^2 \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta' . \quad (4.2)$$

Для случая простой эволюции по кругу запишем разложение по  $\frac{\omega}{B}$  (см. приложение [D])

$$D \approx \frac{1}{2} T^2 \langle X^2 \rangle \left( \cos^2 \theta + \frac{2\omega \cos \theta}{B} \sin^2 \theta - \frac{\omega^2}{B^2} (\sin^2 \theta - \sin^2 2\theta) \right)$$



Что так же дает разделение на динамическую, геометрическую и неадиабатическую дефазировку.

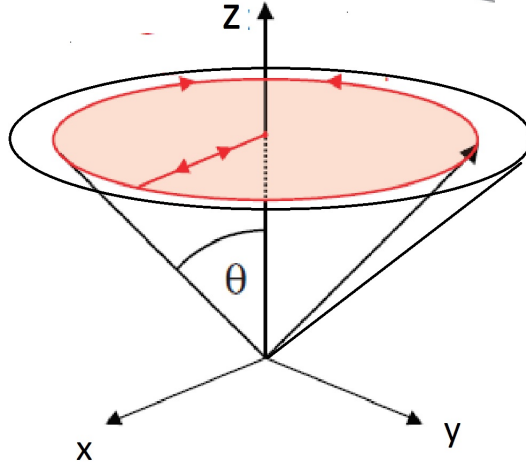


Рис. 4.3: Траектории состояния для квазистационарного радиального шума

Если рассмотреть случай радиального шума ( $\mathbf{X} = X (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$ ) [6], то получим результат, аналогичный предыдущему (получается заменой  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ , так как теперь во вращающейся системе координат, шум  $X$  направлен по оси  $x$ ). Т.е. поправка к фазе определяется

$$\delta\Phi = \frac{T}{2B'} \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta' \quad (4.3)$$

Запишем, как и для других случаев, разложение по  $\omega/B$  в случае эволюции вокруг оси  $z$  с постоянной  $\omega$  (см. приложение [D])

$$\delta\Phi \approx \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{\omega}{B} \frac{3 \cos^2 \theta - 2}{\cos \theta} - \frac{\omega^2}{B^2} \left( \frac{9}{2} + 3 \sin \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \right)$$

А коэффициент дефазировки

$$D = \frac{1}{2} T^2 \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta' \quad (4.4)$$

Интересно снова рассмотреть случай простой эволюции по кругу с постоянной скоростью, получить разложение по  $\omega/B$  (см. приложение [D]) и сравнить с результатом в [6], где изучалось влияние шума (искусственно

создаваемого в эксперименте) на дефазировку.

$$D = \frac{1}{2}T^2\langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \times \left[ 1 - \frac{2\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2}(4 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (4.5)$$

В работе [6] эффективное поле  $|\mathbf{B}' + \mathbf{X}|$  было разложено до первого порядка по частоте, и было получено  $D = \frac{1}{2}T^2\langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \cos^2 \theta \right]$ . Сразу видно отличие с нашим результатом во втором порядке. Вместо  $\cos^2 \theta$  у нас  $4 \cos^2 \theta - 1$ , так как мы разложили  $|\mathbf{B}' + \mathbf{X}|$  до второго порядка, что дает дополнительный вклад в член второго порядка в коэффициенте дефазировки. Экспериментальный результат хорошо согласуется с предсказаниями в нулевом и первом порядке, но сильно расходится во втором. Коэффициенты получались фитированием по заданным формулам, возможно, результат был бы лучше, если учесть добавки от второго порядка разложения  $|\mathbf{B}' + \mathbf{X}|$ .

## Глава 5

# Заключение.

В работе исследовалось влияние разного вида шумов на динамику двухуровневой системы. Была найдена неадиабатическая поправка к наблюдаемой за время циклической эволюции фазе, посчитаны времена дефазировки и декогеренции  $T_2$  и  $T_1$ . Результаты были получены как для коротко-коррелированного шума, так и для квазистационарного ( $1/f$ ) шума.

Отдельно был рассмотрен случай радиального шума, приведенный в экспериментальной статье [6]. Было показано отличие от теоретического предсказания в статье, что как раз может служить причиной расхождения с экспериментальным результатом.

# Приложение А

## Фаза Ааронова-Анадана без шума.

Рассмотрим фазу Ааронова-Анадана. Гамильтониан любой двухуровневой системы можно заменить Гамильтонианом спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле

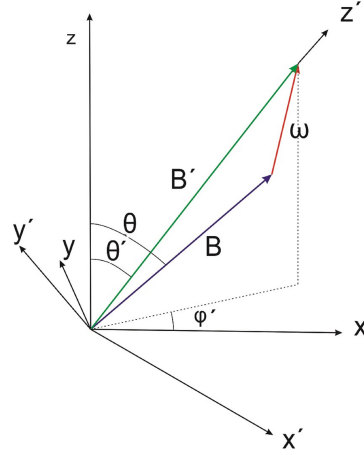
$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma \quad (\text{A.1})$$

Считаем, что поле меняется по некоторой траектории. Оператор эволюции унитарен, значит, для него существует два собственных вектора с собственными значениями, равными по модулю 1.

$$U\psi_{1,2} = \exp(i\phi_{1,2})\psi_{1,2}$$

Тогда существует два спинора, которые по завершении эволюции вернуться в исходное состояние с точностью до фазы. Можно перейти в базис, в котором оператор эволюции будет диагонален. В нем собственными векторами будут  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (их и используем в качестве базисных на протяжении эволюции). Значит, волновые функции этих спиноров взаимно ортогональны. Из чего можно сделать вывод, что это два состояния, когда вектор спина направлен коллинеарно какой-то оси (стационарному направлению), возвращающейся в исходное положение по завершении эволюции. Значит, аналогично случаю Берри (адиабатическому случаю)

Рис. А.1: СК



есть два противоположно направленных спина, которые возвращаются в исходное состояние, набрав некоторую фазу.

Рассмотрим систему координат, связанную со стационарным направлением. Ось  $z'$  направим по направлению. Для определенности возьмем ось  $y'$  лежащей в исходной плоскости  $xy$ . Тогда по завершении эволюции СК вернется в исходное положение. Обозначим углами  $\theta'$  и  $\varphi^{prime}$  полярный и азимутальный углы в лабораторной СК  $(xyz)$  (Нештрихованные углы используются, как в адиабатическом случае для обозначения угла между самим полем и осью  $z$ ). Скорость вращения новой СК

$$\omega = \theta'_t \vec{e}_{y'} + \varphi'_t \vec{e}_z$$

Тогда в новой СК  $\omega = (-\varphi_t \sin \theta', \theta'_t, \varphi_t \cos \theta')$ .

А Гамильтониан

$$H = U H_s U^{-1} + i U U^{-1} \quad (\text{A.2})$$

где матрица перехода

$$U = \exp\left(i \frac{\theta'}{2} \sigma_{y'}\right) \exp\left(i \frac{\varphi'}{2} \sigma_{z'}\right)$$

Получим,

$$H = -\frac{1}{2} (B(t) + \omega) \sigma \quad (\text{A.3})$$

Значит, можно ввести в новой СК эффективное поле  $B'(t) = B(t) + \omega$ .

Так как в этой СК выбранный спин покоится, то  $B'(t)$  имеет в ней только  $z'$  компоненту.

$$B' = B_{z'} + \omega_{z'}$$

Можно показать, что разность фаз спина вдоль эффективного поля и против равна углу поворота для спина в перпендикулярной эффективному полю плоскости. Угловая скорость вращения спинового пространства в новой системе координат равна  $|B'|$ .

Значит, набегает разность фаз

$$\alpha = \oint B' dt = \oint B_{z'} dt + \oint \omega_{z'} dt \quad (\text{A.4})$$

Первую часть фазы определим, как динамическую.

Рассмотрим оставшуюся фазу

$$\beta = \alpha - \oint B_{z'} dt = \oint \omega_{z'} dt = \oint d\varphi \cos \theta' = 2\pi - W \quad (\text{A.5})$$

где  $W$  - телесный угол, заметаемый эффективным полем (спином, возвращающимся в исходное состояние). Значит,  $\beta$  выражается через геометрические характеристики (телесный угол) траектории в пространстве состояний.

# Приложение В

## Диаграммная техника.

Для спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле с флуктуирующей частью в виде слабого коротко-коррелированного шума Гамильтониан имеет вид

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma - \frac{1}{2}X\sigma_z + H_{env}(X) \quad (\text{B.1})$$

После перехода в новую вращающуюся систему координат (подбирается так, чтобы в бесшумовом случае средний вектор спина, совершающего циклическую эволюцию, покоился) гамильтониан примет вид

$$H = -\frac{1}{2}(B(t) + \omega)\sigma_{z'} - \frac{1}{2}X(\cos\theta'\sigma_{z'} - \sin\theta'\sigma_{x'}) + H_{env} \quad (\text{B.2})$$

Гамильтониан взаимодействия

$$H_{int} = -\frac{1}{2}X(\cos\theta'\sigma_{z'} - \sin\theta'\sigma_{x'}) \quad (\text{B.3})$$

Тогда эволюция матрицы плотности в представлении взаимодействия имеет вид

$$\rho(t) = T_K \left[ \exp\left(-i \int_{t_0}^t H_{int}(t') dt'\right) \rho(t_0) \exp\left(i \int_{t_0}^t H_{int}(t') dt'\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

где  $T_K$  - Келдышевское упорядочение (прямое для первой экспоненты и обратное для второй).

Предполагаем, что в некий начальный момент времени (потом будет показано, что нас не интересует в какой именно) момент матрица плотности факторизована.

Рис. В.1: Уравнение Дайсона для пропагатора

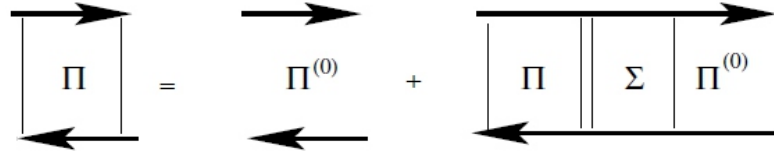
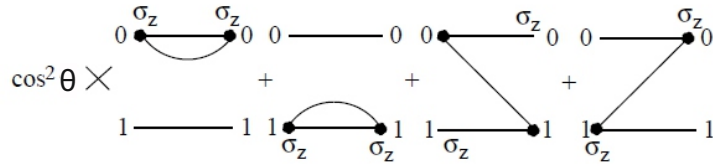


Рис. В.2: Продольный вклад



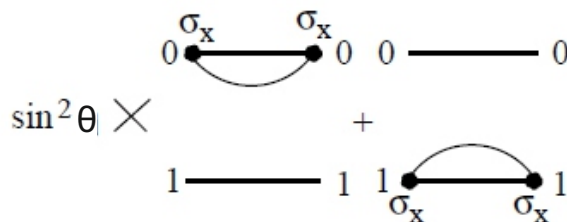
$$\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_{env}$$

Тогда для спиновой матрицы плотности получим пропагатор по теории возмущений.

$$\rho_s(t) = \Pi(t, 0) \rho_s(0)$$

В общем случае эволюция матрицы плотности нелокальна (само уравнение зависит от значения в начальный момент). Но в случае слабого коротко-коррелированного шума все определяется временами корреляции  $\tau_c$  и дефазировки  $T_1$  и  $T_2$ . В результате можно считать эволюцию

Рис. В.3: Поперечный вклад





Марковской (локальной во времени).

Пропагатор можно представить в виде диаграммного ряда. Верхняя линия любой диаграммы содержит вершины от первой упорядоченной по времени экспоненты в уравнении В.4, а нижняя - вершины от обратнo-упорядоченной экспоненты (вторая экспонента уравнения В.4). Воспользуемся теоремой Вика и представим все средние, как сумму произведений попарных средних. Тогда пропагатор удовлетворяет уравнению Дайсона, а кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = i[\rho_s(t), H_0] + \int_0^t dt' \sum(t-t')\rho_s(t') \quad (\text{В.5})$$

где  $\sum(t-t')$  - собственно энергетическая часть, определяемая, как сумма неприводимых диаграмм. В данном случае это оператор в пространстве матриц плотности (т.е. тензор четвертого ранга).

Введем оператор Лапласа

$$L_s\rho_s = i[\rho_s, H_0]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \int_0^t dt' \sum(t-t')\rho_s(t') \quad (\text{В.6})$$

Если корреляционное время  $\tau_c$  мало по сравнению со временем дефазировки и затухания, то собственно энергетической частью (первый порядок которой пропорционален коррелятору шума) быстро убывает с ростом  $t-t'$  (зануляется на временах больше  $\tau_c$ ). Тогда во второе слагаемое правой части уравнения (9) можно подставить  $\rho_s(t') \approx \exp(-L_s(t-t'))\rho_s(t)$  (приближение Блоха-Редфилда).

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \int_0^\infty d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \rho_s(t)$$

Введем тензор Блоха-Редфилда

$$\Gamma = \int_0^\infty d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \quad (\text{В.7})$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \Gamma\rho_s(t) \quad (\text{B.8})$$

Для удобства записи положим  $\sum(t < 0) = 0$ , тогда

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \quad (\text{B.9})$$

Так как  $[L_s]_{nn'\leftarrow nn'} = i(E_{n'} - E_n) = i(n' - n)B'$  (обозначим 0 состояние спина по эффективному полю, 1 - против).

В случае слабой диссипации, если динамику матрицы плотности можно считать мало отличной от невозмущенной, спектральный вес  $\rho_{nn'}$  расположен вблизи частот  $\omega = E_n - E_{n'} = \omega_{nn'}^0$ . Поэтому для недиагональных элементов матрицы плотности можно оставить только соответствующие им компоненты тензора, т.е. в  $\rho_{01}$  основной вклад дает  $\Gamma_{01\leftarrow 01}$  (приближение вращающейся волны).

Диаграммы первого порядка дадут продольный (содержит  $\sigma_z$ ) и поперечный (содержит  $\sigma_x$ ) вклады

$$\sum_{01\rightarrow 01} = -\frac{\sin^2\theta'}{2}S(t-t') - \cos^2\theta'S(t-t')\exp(iB'(t-t')) \quad (\text{B.10})$$

$$[L_s]_{01\leftarrow 01} = iB'$$

Тогда

$$\Gamma_{01\rightarrow 01} = -\int_{-\infty}^t dt_1 S(t-t_1) * \left[ \cos\theta'(t)\cos\theta'(t') + \frac{1}{2}\sin\theta'(t)\sin\theta'(t')\exp\left(-i\int_{t_1}^t B'(\tau)d\tau\right) \right] \quad (\text{B.11})$$

где

$$S(t-t') = \frac{1}{2}(\langle X(t)X(t') \rangle + \langle X(t')X(t) \rangle)$$

симметризованный коррелятор шума. Для каждой диаграммы с членом вида  $\langle X(t), X(t') \rangle$ , есть симметричная диаграмма, т.е. содержащая  $\langle X(t'), X(t) \rangle$ , поэтому в первом неисчезающем порядке по шуму поправки содержат только слагаемые линейные по симметризованным корреляторам и не содержат не симметричных членов. Значит, нам не важно коммутируют ли  $\langle X(t), X(t') \rangle$  и  $\langle X(t'), X(t) \rangle$ .

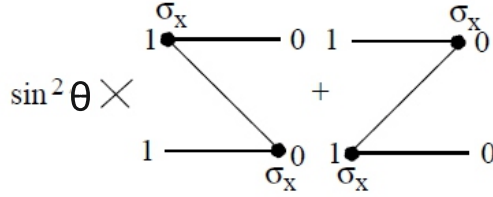
Для нахождения  $T_1$  можно опять же воспользоваться диаграммной техникой. Результат получится такой же, как и в статье [13].

Собственно энергетическая часть имеет вид

$$\sum_{00 \leftarrow 11} = \frac{\sin^2 \theta'}{4} [\langle X(t), X(t') \rangle \exp(iB'(t-t')) + c.c.] \quad (\text{B.12})$$

Компонента оператора Лиувилля равна нулю  $[L_s]_{00 \leftarrow 11} = 0$ .

Рис. В.4:  $\sum_{00 \leftarrow 11}$



Тогда

$$\Gamma_{00 \leftarrow 11} = \text{Re} \left[ \frac{i \sin^2 \theta'}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\langle X^2(\Omega) \rangle}{\Omega + B' + i0} \right] = \frac{\sin^2 \theta'}{4} \langle X^2(-B') \rangle \quad (\text{B.13})$$

Аналогично

$$\Gamma_{11 \leftarrow 00} = \frac{\sin^2 \theta'}{4} \langle X^2(B') \rangle$$

Тогда получим

$$\frac{1}{T_1} = \Gamma_{11 \leftarrow 00} + \Gamma_{00 \leftarrow 11} = \frac{\sin^2 \theta'}{2} S(B') \quad (\text{B.14})$$

# Приложение С

## Дефазировка в случае коротко-коррелированного шума.

Время дефазировки

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2}S(0) \cos^2 \theta' + \frac{1}{4}S(B') \sin^2 \theta'$$

Разложим по  $\omega/B$ . Для этого выразим эффективное поле через поле в лабораторной системе отсчета, а угол  $\theta'$  между эффективным полем и лабораторной осью  $z$  через угол  $\theta$  между самим полем и осью  $z$

$$\begin{aligned} B' &= \sqrt{B^2 \sin^2 \theta + (B \cos \theta + \omega)^2} = \sqrt{B^2 + 2B\omega \cos \theta + \omega^2} \approx \\ &\approx B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} - \frac{\omega^2 \cos^2 \theta}{2B^2} \right) = \\ &= B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

$$\sin \theta' = \frac{B \sin \theta}{B'} \approx \sin \theta \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right)$$

$$\sin^2 \theta' \approx \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta' &= \frac{B \cos \theta + \omega}{B'} \approx \left( \cos \theta + \frac{\omega}{B} \right) \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) \approx \\
&\approx \cos \theta \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) + \frac{\omega}{B} - \frac{\omega^2 \cos \theta}{B^2} = \\
&= \cos \theta \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} - \frac{3\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) + \frac{\omega}{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta' &\approx \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - 3 \frac{\omega^2}{B^2} \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \cos^2 \theta \right) + \\
&\quad + 2 \cos \theta \left( \frac{\omega}{B} - \frac{\omega^2 \cos \theta}{B^2} \right) + \frac{\omega^2}{B^2} = \\
&= \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2}
\end{aligned}$$

Коррелятор в представлении Фурье тоже можно разложить, пользуясь малостью  $\omega/B$

$$\begin{aligned}
S(B') &\approx S(B) + S'(B)(B' - B) + \frac{1}{2}S''(B)(B' - B)^2 \approx \\
&\approx S(B) + S'(B)B \left( \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}S''(B)B^2 \left( \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right)^2 \approx \\
&\approx S(B) + S'(B)B \left( \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}S''(B)\omega^2 \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

Тогда скорость релаксации поперечной компоненты с точностью до второго порядка по  $\omega/B$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_2} &= \frac{1}{2}S(0) \left( \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{4} \left( S(B) + S'(B)B \left( \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}S''(B)\omega^2 \cos^2 \theta \right) \sin^2 \theta \times \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) = \\
&= \frac{1}{2}S(0) \cos^2 \theta + \frac{1}{4}S(B) \sin^2 \theta + \frac{\omega}{B} \cos \theta \sin^2 \theta \left[ S(0) + \frac{S'(B)B}{4} - \frac{1}{2}S(B) \right] + \\
&\quad + \frac{\omega^2}{B^2} \left( \frac{1}{2}S(0) \sin^2 \theta [1 - 4 \cos^2 \theta] + \frac{\sin^2 \theta}{4} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \frac{1}{2}S''(B)B^2 \cos^2 \theta + S'(B)B \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \right) + (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) S(B) \right] \right)
\end{aligned}$$

Для продольной компоненты имеем

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\sin^2 \theta'}{2} S(B')$$

Тогда аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &\approx \frac{1}{2} \left( S(B) + S'(B) B \left( \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} S''(B) \omega^2 \cos^2 \theta \right) \sin^2 \theta \times \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) = \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{2} S(B) + \frac{\omega}{B} \cos \theta \sin^2 \theta \left( \frac{S'(B) B}{2} - 2S(B) \right) + \\ &+ \frac{\omega^2}{2B^2} \left( \frac{1}{2} S''(B) B^2 \cos^2 \theta + S(B) (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + S'(B) B \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \right) \right) \end{aligned}$$

# Приложение D

## Поправка к фазе и дефазировка в случае квазистационарного шума.

Рассмотрим случай квазистационарного шума.

### Шум по оси $z$

Поправка к фазе

$$\delta\Phi = \frac{T}{2B'} \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta'$$

Перепишем выражения для простой эволюции вокруг оси  $z$  и разложим по  $\omega/B$ . Для этого опять воспользуемся выражением

$$\begin{aligned} B' &= \sqrt{B^2 \sin^2 \theta + (B \cos \theta + \omega)^2} = \sqrt{B^2 + 2B\omega \cos \theta + \omega^2} \approx \\ &\approx B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} - \frac{\omega^2 \cos^2 \theta}{2B^2} \right) = B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right) \\ \sin^2 \theta' &\approx \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &\approx \frac{T}{2} \langle X^2 \rangle \frac{\sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right)}{B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right)} = \\
&= \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right) \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \cos 2\theta \right) = \\
&= \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{B^2} (7 \cos^2 \theta - 3/2) \right)
\end{aligned}$$

Дефазировка определяется, как

$$e^{-D} \quad , \quad D = \frac{1}{2} T^2 \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta' .$$

Воспользуемся

$$\cos^2 \theta' \approx \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \quad (\text{D.2})$$

и получим

$$D = \frac{1}{2} T^2 \langle X^2 \rangle \left( \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \right)$$

## Радиальный шум

Аналогичным образом можно поступить и в случае радиального квази-стационарного шума ( $\mathbf{X} = X (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$ )

$$\delta\Phi = \frac{T}{2B'} \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta'$$

Воспользуемся D.2 и получим

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &\approx \frac{T}{2} \langle X^2 \rangle \frac{\cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2}}{B \left( 1 + \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \sin^2 \theta \right)} = \\
&= \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \left( \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{2\omega \cos \theta}{B} - \frac{\omega^2}{B^2} (4 \sin^2 \theta + 1) \right) + 2 \frac{\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{\omega \cos \theta}{B} + \frac{\omega^2}{2B^2} \cos 2\theta \right) = \\
&= \frac{T}{2B} \langle X^2 \rangle \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{\omega}{B} \frac{3 \cos^2 \theta - 2}{\cos \theta} - \frac{\omega^2}{B^2} \left( \frac{9}{2} + 3 \sin \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \right)
\end{aligned}$$



Для дефазировки имеем

$$D = \frac{1}{2}T^2 \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta'$$

Воспользуемся D.1

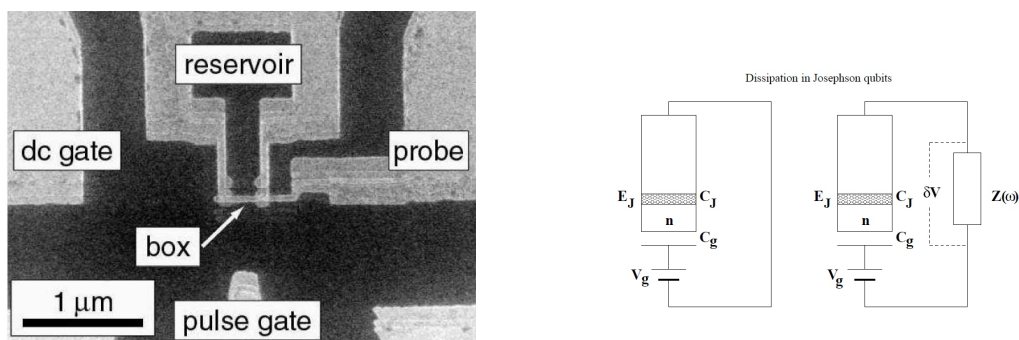
$$D = \frac{1}{2}T^2 \langle X^2 \rangle \sin^2 \theta \times \left[ 1 - \frac{2\omega}{B} \cos \theta + \frac{\omega^2}{B^2} (4 \cos^2 \theta - 1) \right].$$

Результат отличается от теоретического предсказания [6] во втором порядке по  $\omega/B$ .

# Приложение Е

## Джозефсоновский зарядовый кубит.

Рис. Е.1: 1) SEM micrograph of typical Cooper-pair device [14] 2)Схема Джозефсоновского кубита



Джозефсоновский зарядовый кубит представляет из себя сверхпроводящий островок, который включен в цепь при помощи Джозефсоновского контакта. Меняя напряжение, можно менять количество электронных пар на островке (переход отдельных электронов на островок подавлен большой сверхпроводящей щелью  $\Delta$ ). Такую систему можно описать при помощи следующего Гамильтониана [13]

$$H = 4E_c \left( n - \frac{C_g V_g}{2e} \right) - E_J \cos \theta$$

где  $E_c = \frac{e^2}{2(C_J + C_g)}$ .

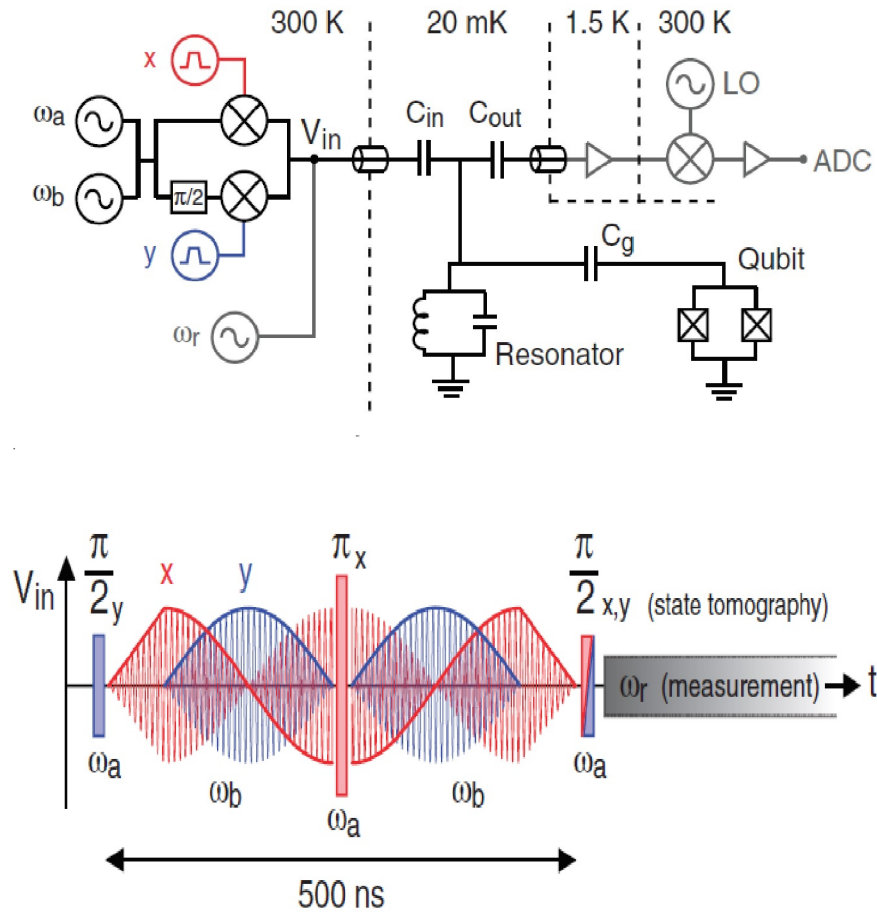
В качестве базисных состояний берутся два состояния, различающихся наличием лишней электронной пары.

Сделав замену  $B_z = \frac{2e}{C_J+C_g} (e - C_g V_g) = E_c \left(1 - \frac{Q_g}{e}\right)$ ,  $B_x = E_J$  можно перейти к Гамильтониану вида

$$H = -\frac{1}{2} (B_z \sigma_z + B_x \sigma_x) \quad (\text{E.1})$$

Можно увидеть, что шум в напряжении будет пересчитан в шум магнитного поля вдоль оси  $z$ . Аналогичный результат может быть получен и для более сложных систем (например, два контакта в контуре, через который проходит управляющий магнитный поток), но шум в напряжении опять же можно будет пересчитать в виде шума магнитного поля по одной оси.

Рис. E.2



В реальных экспериментах используются системы из резонатора и кубита, на которые подается управляющее напряжение. Например, в одной из первых работ, где на зарядовом кубите была измерена фаза Берри, а так же изучали влияние на нее шумов при помощи метода спинового

эха [15]. Подаются три сигнала. Один с частотой кубита ( $\omega_a$ ), другой с частотой смещения ( $\omega_b$ ) и последний с частотой резонатора ( $\omega_r$ ). Частота смещения задает осцилляции  $x$  компоненты в уравнении E.1

$$H = -\frac{1}{2} (\omega_a \sigma_z + \Omega_R \cos(\omega_b t + \varphi) \sigma_x)$$

( $\Omega_R$  - амплитуда взаимодействия кубита и поля частоты  $\omega_b$ ) Удобно перейти во вращающуюся с угловой скоростью  $\omega_b$  систему отсчета, тогда если пренебречь членом, осциллирующим с частотой  $2\omega_b$ , получим

$$H_{RF} = -\frac{1}{2} ((\omega_a - \omega_b) \sigma_z + \Omega_R \cos \varphi \sigma_x + \Omega_R \sin \varphi \sigma_y)$$

# Глава 6

## Список литературы

- [1] Y. Aharonov and J. Anandan, Phase change during a cyclic quantum evolution, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 1593, 1987.
- [2] M. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 392, p. 45, 1984.
- [3] D. Suter, K. Mueller, and A. Pines, Study of the Aharonov-Anandan quantum phase by NMR interferometry, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 1218, 1988.
- [4] S.V. Syzranov and Yu. Makhlin, In: *Electron Transport in Nanosystems*, pp. 301–314, eds. J. Bonca and S. Kruchinin, Springer, 2008
- [5] R. S. Whitney, Y. Makhlin, A. Shnirman, and Y. Gefen, Geometric nature of the environment-induced Berry phase and geometric dephasing, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 070407, 2005.
- [6] S. Berger, M. Pechal, P. Kurpiers, A.A. Abdumalikov, C. Eichler, J.A. Mlynek, A. Shnirman, Y. Gefen, A. Wallraff, and S. Filipp, *Nature Comm.* **6**, 8757 (2015)
- [7] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto<sup>1</sup> and J. S. Tsai<sup>1</sup>, Charge Echo in a Cooper-Pair Box, *Phys. Rev. Lett.* 88, 047901, 2002.
- [8] A. Tomita and R. Y. Chiao, Observation of Berry's topological phase by use of an optical ber, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, p. 937, 1986.

- [9] R. Tycko, Adiabatic rotational splitting and Berry's phase in nuclear quadrupole resonance, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2281, 1987.
- [10] D. Suter, G. C. Chingas, R. A. Harris, and A. Pines, Berry's phase in magnetic resonance, *Mol. Phys.*, vol. 61, p. 1327, 1987.
- [11] S. Berger, M. Pechal, A. A. Abdumalikov, Jr., C. Eichler, L. Steffen, A. Fedorov, A. Wallraff and S. Filipp, Exploring the Effect of Noise on the Berry Phase, *Phys. Rev. A* 87, 060303(R), 26 June 2013.
- [12] Schoeller, H. and G. Schön, Mesoscopic quantum transport: resonant tunneling in the presence of strong Coulomb interaction, *Phys. Rev. B* 50, 18436, 1994.
- [13] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, Alexander Shnirman, Dissipation in Josephson qubits, *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards Nanoscience) NATO Science Series*, volume 125, pp 197-224, 2003.
- [14] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin and J. S. Tsai, Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box, *Nature* 398, 786-788, 1999.
- [15] P. J. Leek, J. M. Fink, A. Blais, R. Bianchetti, M. Göppl, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, A. Wallraff, Observation of Berry's Phase in a Solid-State Qubit, *Science* 318, 1889, 2007