Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

#### СТАТИСТИКА СВЕРХТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

(магистерская диссертация)

Студент: Зуев Олег Борисович

(подпись студента)

Научный руководитель: Скворцов Михаил Андреевич, д-р физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2024

# Аннотация

Исследовано влияние неоднородностей на протекание сверхтока в сверхпроводящих плёнках. Неоднородности рассматривались в модели короткодействующих вмороженных флуктуаций «локальной температуры перехода». В низшем порядке по неоднородностям найдены средние по образцу поправки к параметру порядка и сверхтоку в зависимости от средней сверхтекучей скорости. Выяснено, что в приближении среднего поля неоднородности приводят к изменению температуры фазового перехода. Показано, что при наличии неоднородности критический ток смещается вниз. Также рассчитаны пространственные флуктуации сверхтекучего тока. Произведена численная симуляция параметра порядка и тока в первом порядке по неоднородностям.

# Оглавление

Оглавление	2
1 Введение	3
2 Неоднородный сверхпроводник вблизи критической темпер	оатуры 7
2.1 Модель Гинзбурга—Ландау	7
2.2 Однородный сверхтекучий ток	10
3 Теория возмущений по неоднородностям $lpha_1({f r})$	12
3.1 Уравнения n-ого порядка теории возмущений	12
3.2 Флуктуационный пропагатор	14
3.3 Определение членов $\Delta_1$ и $\Delta_2$	
$3.4$ Среднее значение $ \Delta ^2$ и ренормировка $T_c$	
4 Статистика сверхтока	25
4.1 Средний ток	
4.1.1 Средний ток в 3D	
4.1.2 Средний ток в 2D	
4.2 Флуктуации тока	
5 Численная симуляция параметра порядка и сверхтекучего	тока 33
6 Список литературы	39

## Глава 1

## Введение

Одной из областей практического применения сверхпроводимости, возникшей в последние десятилетия, является детектирование микроволнового излучения [1], [2]. Этот метод основан на том, что поглощение фотона с достаточно высокой энергией может локально разрушить сверхпроводящее состояние. В результате, у сверхпроводника появляется конечное сопротивление, регистрация которого позволяет создавать высокочувствительные детекторы одиночных фотонов.

Для реализации этой идеи используется сверхпроводящий провод, через который пропускается сверхтекучий ток, близкий к критическому. Близость к критическому току определяет барьер, который необходимо преодолеть для разрушения сверхпроводящего состояния, а следовательно, и энергию фотонов, которые возможно задетектировать. Качественно, сложная кинетика электронной и фононной подсистем при попадании высокоэнергетичного фотона может быть описана с помощью увеличения температуры в области «горячего пятна». Если эта температура превышает критическую температуру при заданном токе, данный участок становится нормальным, вызывая импульс напряжения, который и является измеряемым сигналом. Схематично процесс развития «горячего пятна» показан на Рис. [1.] В реальных детекторах после перехода части сверхпроводящего провода в нормальное состояние ток перераспределяется по шунтирующему пути с малым, но конечным сопротивлением, что приводит к быстрому охлаждению провода и возврату к исходному полностью сверхпроводящему состоянию. В этом и состоит принцип работы сверхпроводникового фотодетектора.



Рис. 1.1: Принцип работы сверхпроводникового детектора: возникновение «горячего пятна» и переход участка провода со сверхтоком обратно в нормальное состояние (из работы 3).

Наличие большой кинетической индуктивности (и как следствие, низкая плотность сверхтекучих электронов) является важным технологическим требованием к сверхпроводящим материалам для микроволновых детекторов. В связи с этим, используемые сверхпроводники не просто грязные (параметр  $T_c \tau/\hbar \ll 1$ ), но сильно грязные, приближающимися к порогу локализации (параметр  $E_F \tau/\hbar$  не сильно превосходит 1) [4]. Для таких достаточно сильно неупорядоченных материалов возникает конкуренция между сверхпроводимостью и локализацией Андерсона, что приводит к заметной неоднородности сверхпроводящего состояния. На Рис. [1.2] показана зависимость энергетической щели в TiN от координаты, измеренная с помощью сканирующего туннельного микроскопа [5].

Спонтанная неоднородность сверхпроводящих свойств приводит к тому, что барьер для локального разрушения сверхтекучего состояния меняется в разных точках образца. В результате, энергетический порог детектора становится размытым: фотон с определенной энергией может, поглотившись, вызвать отсчёт в одной части провода, но не вызвать его в другой, что ухудшает характеристики прибора.

Размытию барьера детектирования могут способствовать и другие процессы, не связанные с неоднородностью материала, такие как флуктуации фактора Фано (доли энергии, остающейся в электронной подсистеме после первой стадии поглощения фотона) [6],



Рис. 1.2: Томография энергетической щели сверхпроводника TiN, измеренная с помощью сканирующего туннельного микроскопа (из работы 5).

локальные флуктуации температуры 🚺, и краевые эффекты 🔕.

Попытки описать влияние пространственной неоднородности на работу сверхпроводящих детекторов были предприняты в работе [9], где использовалась простая, но достаточно искусственная модель неоднородности. Микроскопический подход к данной задаче нам не известен.

В последние годы большой интерес был посвящен исследованию сверхпроводимости вблизи перехода в локализованную фазу (переход сверхпроводник-изолятор) [4, 10, 11]. В случае сильной локализации электронных состояний происходит образование псевдощелевой фазы, описание которой развивалось в работах Фейгельмана с соавторами на основе полуколичественных и численных методов [12, 13, 14, 15]. В рамках численного анализа модели Хаббарда с притяжением возникновение неоднородного сверхпроводящего состояния в присутствии точечного беспорядка исследовалась в работах [16, 17]. Сверхтекучая плотность в неоднородных сверхпроводниках изучалась в работе [18], также численно.

Используемые же в настоящее время материалы для фотонных детекторов являются умеренно неоднородными сверхпроводниками, в которых модуляция параметра порядка  $\delta\Delta/\langle\Delta\rangle \ll 1$ . В этой связи возможным и крайне актуальным представляется построение аналитической теории протекания тока в таких материалах, которая на сегодняшний

момент отсутствует. Данная задача и решается в нашей работе.

Мы будем работать вблизи критической температуры  $T_c$ , используя формализм функционала Гинзбурга-Ландау. Неоднородность вводится феноменологически как вмороженные гауссовы флуктуации локальной температуры перехода (коэффициент  $\alpha$ , обращающийся в нуль при критической температуре) с малым радиусом корреляций [19]. К этой модели сводятся разные полуфеноменологические модели неоднородного сверхпроводящего состояния [20], [21]. Для случая мезоскопических флуктуаций она была выведена микроскопически в работе [22].

Отметим, что поведение вихревой структуры в искусственно созданном периодически меняющемся профиле коэффициента диффузии *D* исследовалось в работе [23].

Первые попытки построить теорию сверхтокового состояния при наличии неоднородностей были предприняты в дипломной работе [24].

## Глава 2

# Неоднородный сверхпроводник вблизи критической температуры

#### 2.1 Модель Гинзбурга—Ландау

Описание неоднородного сверхпроводника вблизи критической температуры начинается с разложениия плотности свободной энергии Гинзбурга—Ландау (ГЛ) по степеням параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r})$ :

$$\frac{F}{\nu} = \xi_0^2 |\nabla \Delta|^2 + [\alpha + \alpha_1(\mathbf{r})] |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4.$$
(2.1)

Здесь  $\nu$  - плотность состояний на энергии Ферми, а коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi_0$  зависят от величины беспорядка. В рассматриваемом грязном пределе ( $T_c \tau \ll \hbar, \tau$  - время упругого рассеяния) эти коэффициенты были впервые вычислены Горьковым [25]:  $\alpha = (T_{c0} - T)/T_{c0}$ ,  $\beta = 7\zeta(3)/8\pi^2 T_{c0}^2$ , и  $\xi_0^2 = \pi \hbar D/8T_{c0}$ , где D - коэффициент диффузии. Коэффициент  $\alpha$  обращается в нуль при  $T = T_{c0}$ , которая является среднеполевой температурой перехода в *однородной системе*. Константа  $\xi_0$  представляет собой (с точностью до численного коэффициента) длину когерентности сверхпроводника при нулевой температуре. Сравнение квадратичных слагаемых в уравнении (2.1) даёт выражение для зависящей от температуры длины когерентности, расходящейся в точке перехода:

$$\xi(T) = \xi_0 / \sqrt{\alpha} = \xi_0 \sqrt{T_{c0} / (T_{c0} - T)}.$$
(2.2)

Неоднородность естественным образом вводится как флуктуация коэффициента  $\alpha$ .



Рис. 2.1: Типичный вид корреляционной функции  $f_{\alpha}(\mathbf{r})$ .

Именно этот коэффициент проходит через ноль в теории фазовых переходов Ландау. Коэффициенты  $\beta$  и  $\xi_0^2$  остаются конечными при фазовом переходе второго рода, потому мы считаем их постоянными. Предполагается, что случайное поле  $\alpha_1(\mathbf{r})$  является гауссовой случайной величиной с нулевым средним и корреляционной функцией [вид корреляционной функции схематично представлен на Рис. 2.1] :

$$\langle \alpha_1(\mathbf{r})\alpha_1(\mathbf{r}')\rangle = f_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.3}$$

Неоднородность характеризуется локальной величиной флуктуаций,  $\langle \alpha_1^2 \rangle = f_\alpha(r=0)$ , и корреляционным радиусом  $r_c$ , определяемым масштабом затухания функции  $f_\alpha(r)$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что неоднородность коэффициента  $\alpha$  является малой по сравнению с длиной когерентности:

$$r_c \ll \xi. \tag{2.4}$$

Такая ситуация реализуется, например, для мезоскопических флуктуаций [22], когда соотношение (2.4) выполнено вблизи перехода.

Модель (2.1) часто называют сверхпроводником «с локально флуктуирующим  $T_c$ ». Однако такое название может вести в заблуждение, когда выполняется неравенство (2.4). В этом случае не существует областей с чётко определенным локальным  $T_c(\mathbf{r})$ , и возникающая неоднородность  $\Delta(\mathbf{r})$  является коллективным эффектом многих локально флуктуирующих областей размером порядка  $r_c$ .

При расчете плотности свободной энергии Гинзбурга—Ландау (2.1) мы пренебрегаем вкладом магнитного поля  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , как внешнего, так и индуцированного. В частности,

мы предполагаем отсутствие внешнего магнитного поля и то, что магнитное поле, создаваемое сверхтоком, достаточно слабое. Последнее справедливо для тонкой плёнки (d её толщина), если её ширина w в направлении, перпендикулярном току, намного меньше Пирловской длины [26],  $\lambda_{\text{Pearl}} = \lambda^2/d$ , где  $\lambda = (\hbar c/e)\sqrt{\beta/32\pi\nu\xi_0^2\alpha}$  — объемная глубина проникновения в объём сверхпроводника:

$$w \ll \lambda_{\text{Pearl.}}$$
 (2.5)

В таком случае экранирование пренебрежимо, и сверхтекучий ток (в отсутствие неоднородности) протекает равномерно по всему образцу.

В отсутствие магнитного поля все ещё нужно ввести векторный потенциал **A** в качестве чистой калибровки, добавив в градиентный член уравнения (2.1) длинную производную:

$$|\nabla\Delta|^2 \to |(\nabla + i\mathbf{A})\,\Delta|^2 \tag{2.6}$$

Тогда выражение для плотности сверхтока будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{j} = \eta \left( |\Delta|^2 \mathbf{A} + \frac{\Delta^* \nabla \Delta - \Delta \nabla \Delta^*}{2i} \right), \tag{2.7}$$

где  $\eta = 4e\nu\xi_0^2/\hbar$ . Записанное через модуль и фазу параметра порядка,  $\Delta = |\Delta|e^{i\phi}$ , выражение для тока принимает вид:

$$\mathbf{j} = \eta |\Delta|^2 \mathbf{v},\tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \mathbf{A} \tag{2.9}$$

— калибровочно-инвариантный фазовый градиент, пропорциональный сверхтекучей скорости. Выбор конкретной калибровки зависит от удобства и будет рассмотрен ниже.

В приближении среднего поля параметр порядка  $\Delta(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению ГЛ:

$$-\xi_0^2 (\nabla + i\mathbf{A})^2 \Delta - [\alpha + \alpha_1(\mathbf{r})] \Delta + \beta |\Delta|^2 \Delta = 0, \qquad (2.10)$$

которое при наличии случайного  $\alpha_1(\mathbf{r})$  превращается в стохастическое нелинейное дифференциальное уравнение. Сверхток  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , определенный уравнением (2.7), также становится случайной величиной.

Ниже мы проанализируем статистические свойства неоднородного сверхтока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в присутствии неоднородности  $\alpha_1(\mathbf{r})$ , описываемой корреляционной функцией (2.3) с малым радиусом корреляции  $r_c$  [см. уравнение. (2.4)]. Мы рассмотрим как толстые плёнки (трёхмерный случай,  $\xi \ll d \ll \lambda_{\text{Pearl}}$ ), так и тонкие плёнки (двумерный случай,  $d \ll \xi$ ,  $\lambda_{\text{Pearl}}$ ).

#### 2.2 Однородный сверхтекучий ток

Скорость накрутки фазы в формуле (2.8) определяется калибровкой. Среди множества возможных калибровок следует выделить две. Первый вариант — линейная накрутка фазы:  $\phi(x) = \Phi x/L$ , где  $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  — разность фаз на краях сверхпроводника, при этом векторный потенциал приравнивается к нулю. Второй вариант — установить разность фаз на краях сверхпроводника константой (для простоты - нулём), определив при этом векторпотенциал  $\mathbf{A} = \mathbf{e_x}(\Phi_2 - \Phi_1)/L$ ,  $\mathbf{e_x}$  — единичный вектор вдоль оси x. В этом случае в  $\Delta$ нет накрутки фазы. Согласно формуле (2.8), эти две калибровки эквивалентны. В данной работе мы выбираем второй вариант с вектор-потенциалом.

Уравнение Гинзбурга—Ландау тогда выглядит следующим образом:

$$-\xi_0^2 (\nabla + i\mathbf{A})^2 \Delta - \alpha \Delta + \beta |\Delta|^2 \Delta = 0.$$
(2.11)

Из уравнения (2.11) следует, что в однородном случае значение параметра порядка без сверхтока (при  $\mathbf{A} = 0$ ) равно:

$$\Delta_0^2 = \alpha/\beta, \tag{2.12}$$

а при наличии сверхтока (при  $\mathbf{A} \neq 0$ ):

$$\Delta_0^2(\mathbf{A}) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\xi_0^2}{\beta} \mathbf{A}^2 = \Delta_0^2 \left( 1 - \xi^2 \mathbf{A}^2 \right).$$
(2.13)

Формула (2.13) демонстрирует подавление сверхпроводимости протекающим током.

Таким образом, при отсутствии каких-либо неоднородностей плотность тока равна:

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{A}) = \eta \Delta^2 \mathbf{A} \tag{2.14}$$

Определим безразмерный вектор-потенциал как

$$a = \xi A \tag{2.15}$$

Теперь мы можем переписать (2.14) следующим образом [27]:

$$j_0(a) = j_0 a (1 - a^2),$$
 (2.16)

где  $j_0 = \eta_{\beta \frac{\alpha}{\xi}}^{\frac{1}{\xi}}$ . Значения  $a < a_c = 1/\sqrt{3}$  являются физически реализуемыми, а значения  $a > 1/\sqrt{3}$  — неустойчивыми, а потому нефизичными.

Средние поправки к этой зависимости с учётом неоднородностей вычислены в параграфах 4.1.1 и 4.1.2 для трёхмерного и двумерного случаев соответственно.

# Глава 3

# Теория возмущений по неоднородностям $\alpha_1(\mathbf{r})$

### 3.1 Уравнения n-ого порядка теории возмущений

Будем решать задачу нахождения пространственно неоднородного параметра порядка по теории возмущений. Разложим параметр по порядка в ряд по степеням неоднородности:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 + \Delta_1(\mathbf{r}) + \Delta_2(\mathbf{r}) + \dots, \qquad (3.1)$$

где  $\Delta_n$  пропорциональна *n*-ой степени  $\alpha_1$ .

Подставляя разложение (3.1) в уравнение ГЛ (2.10) и его сопряженное выражение, составляя из  $\Delta_1$  и  $\Delta_1^*$  двумерный вектор и выделяя одинаковые степени  $\alpha_1$ , мы получаем последовательность уравнений для  $\Delta_n(\mathbf{r})$ :

$$L^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_n(\mathbf{r}) \\ \Delta_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \Pi_n(\mathbf{r}), \qquad (3.2)$$

где обратный *флуктуационный пропагатор*  $L^{-1}$  — дифференциальный оператор, определяющийся матрицей:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi_0^2 (\nabla^2 + 2i\mathbf{A}\nabla) + \beta\Delta_0^2 & \beta\Delta_0^2 \\ \beta\Delta_0^2 & -\xi_0^2 (\nabla^2 - 2i\mathbf{A}\nabla) + \beta\Delta_0^2 \end{pmatrix}$$
(3.3)



Рис. 3.1: Все древовидные диаграммы для параметра порядка в первом, втором и третьем порядке теории возмущений по неоднородностям  $\alpha_1$ . Линией обозначается флуктуационный пропагатор L, точкой — неоднорнодность  $\alpha_1$ . Коэффициенты кратности здесь не посчитаны.

а векторы  $\Pi_n(\mathbf{r})$  содержат только  $\alpha_1(\mathbf{r})$  и  $\Delta_k(\mathbf{r})$  с k < n. Первые два вектора задаются следующими выражениями:

$$\Pi_1 = \Delta_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \Delta_1 - \beta \Delta_0 (\Delta_1^2 + 2\Delta_1 \Delta_1^*) \\ \alpha_1 \Delta_1^* - \beta \Delta_0 (\Delta_1^{*2} + 2\Delta_1 \Delta_1^*) \end{pmatrix}.$$
(3.5)

Решая уравнения шаг за шагом, можно определить все члены в теории возмущений по величине неоднородности α<sub>1</sub>. Графически эта процедура соответствует суммированию древовидных диаграмм. Все диаграммы до третьего порядка включительно представлены на Рис. 3.1.

Отсутствие петель соответствует пренебрежению тепловыми флуктуациями. Это позволяет ввести флуктуационный пропагатор без стандартного теплового коэффициента T (который компенсируется коэффициентами 1/T от вершин).

### 3.2 Флуктуационный пропагатор

Ключевым объектом теории возмущений является флуктуационный пропагатор L, который есть резольвента дифференциального оператора  $L^{-1}$ , определенного в уравнении (3.3). В реальном пространстве  $L(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  является интегральным ядром, зависящим от разности координат. В пространстве импульсов он принимает вид:

$$L(\mathbf{q}) = \frac{1}{D(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} \xi_0^2(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{A}\mathbf{q}) + \beta\Delta_0^2 & -\beta\Delta_0^2 \\ -\beta\Delta_0^2 & \xi_0^2(\mathbf{q}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{q}) + \beta\Delta_0^2 \end{pmatrix},$$
(3.6)

где  $D(\mathbf{q}) = \det L^{-1}(\mathbf{q})$  задается формулой

$$D(\mathbf{q}) = \xi_0^4 [q^4 - 4(\mathbf{A}\mathbf{q})^2] + 2\beta \Delta_0^2 \xi_0^2 q^2.$$
(3.7)

Отметим, что одномерный аналог флуктуационного пропагатора (3.6) встречался в работе [28] [формула (2.24)] при изучении флуктуаций на фоне интантонного решения Лангера-Амбегаокара [29].

В отсутствие сверхтока ( $\mathbf{A} = 0$ ) приведенный выше определитель раскладывается на множители:  $D(\mathbf{q}) = \xi_0^2 q^2 (\xi_0^2 q^2 + 2\alpha)$ . Это соответствует разделению массивных флуктуаций модуля параметра порядка и безмассовых флуктуаций фазы параметра порядка (Голдстоуновская мода). Моды изотропного флуктуационного пропагатора задаются, соответственно,

$$L_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\xi_0^2 q^2 + 2\alpha}, \qquad L_{\perp}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\xi_0^2 q^2}.$$
(3.8)

В координатном представлени<br/>и $L^{(0)}_{\parallel}({\bf r})$ — это потенциал Юкавы:

$$L_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} K_0(\sqrt{2}r/\xi)/2\pi\xi_0^2, & 2\mathrm{D}, \\ \exp(-\sqrt{2}r/\xi)/4\pi\xi_0^2r, & 3\mathrm{D}, \end{cases}$$
(3.9)

где  $K_0$  — функция Макдональда.

Флуктуационный пропагатор на фоне однородного сверхтокового состояния с  $\mathbf{A} \neq 0$ описывает нетривиальное смешивание амплитудной и фазовой мод. Физически это связано с сохранением тока, которое учитывается уравнениями ГЛ. Следовательно, в режиме сверхтока любое изменение модуля параметра порядка должно компенсироваться соответствующим изменением его фазы, чтобы ток сохранялся.



Рис. 3.2: Собственные значения флуктуационного пропагатора  $L(q_x, q_{\perp} = 0)$  для тока меньше критического (две синии линии), равному критическому (две оранжевые линии) и больше критического (две зелёные линии). Видно, что зелёная линия уходит в отрицательные значения, что говорит о неустойчивости системы.

Это смешивание мод можно увидеть, посчитав собственные значения матрицы  $L^{-1}(\mathbf{q})$ :

$$\Lambda_{\pm}(\mathbf{q}) = \alpha \left[ q'^2 + 1 - a^2 \pm \sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2 q'^2_x} \right], \qquad (3.10)$$

где  $a = \xi A$  - безразмерный векторный потенциал, введенный в уравнение (2.15), а

$$\mathbf{q}' = \xi \mathbf{q} \tag{3.11}$$

— безразмерный импульс. Предполагается, что ток (пропорционален **A**) течёт в направлении x. Для ненулевых значений **A** зависимость собственных значений  $\Lambda_{\pm}(\mathbf{q})$  становится существенно анизотропной. При отсутствии сверхтока значения  $\Lambda_{+}(\mathbf{q})$  и  $\Lambda_{-}(\mathbf{q})$  соответствуют амплитудной и фазовой модам соответственно. Заметим, что для  $\Lambda_{-}(\mathbf{q})$  остается Голдстоуновская мода, стремящаяся к нулю при  $q \rightarrow 0$ . Её характер отличается для  $a < a_c$ и  $a > a_c$ . В физичной ветке ( $a < a_c$ ),  $\Lambda_{-}(\mathbf{q}) > 0$  для всех конечных импульсов. Тогда как на нефизичной ветке ( $a > a_c$ ) функция  $\Lambda_{-}(\mathbf{q}) > 0$  становится отрицательной в некоторой области импульсного пространства (вдоль оси x) вблизи  $\mathbf{q} = 0$ , что говорит нам о неустрйчивости системы. Собственные числа флуктуационного пропагатора представлены на рисунке 3.2

Для того, чтобы наглядно представить пространственную структуру флуктуационного

пропагатора, имеет смысл определить следующую линейную комбинацию его элементов:

$$\mathcal{L} = (L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22})/2, \qquad (3.12)$$

которая определяет отклик *модуля* параметра порядка на пространственные изменения коэффициента  $\alpha$  (то есть играет роль функции Грина) [см. уравнения (3.23) и (3.24) ниже]. В импульсном представлении эта линейная комбинация выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \frac{\xi_0^2 q^2}{D(\mathbf{q})} = \frac{q'^2}{\alpha \left(q'^4 + 2(1 - a^2)q'^2 - 4a^2 q'^2_x\right)}.$$
(3.13)

На рисунке 3.3 показан  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  в двумерном случае для близкой к критической сверхтекучей скорости,  $a/a_c = 0.95$ . На наименьших масштабах,  $r \ll \xi$ , флуктуационный пропагатор  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  соответствует пределу нулевого тока амплитудного режима  $L_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{r})$ , заданного уравнением (3.9). Мы обнаруживаем, что при конечных **A** и в пределе больших **r** [для точного определения смотрите уравнение (3.21)] флуктуационный пропагатор не затухает экспоненциально, а демонстрирует гораздо более медленную *степенную зависимость с показателем, равным размерности пространства d*:

$$\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r}) \approx \frac{a^2}{2\pi\alpha} \frac{\lambda_d(a,\theta)}{r^d},\tag{3.14}$$

где  $\theta$  — угол, который вектор **r** образует с осями x (направление **A**). Степенное поведение модуля отклика  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  является следствием перемешивания массивной и безмассовой мод флуктуационного пропагатора на нулевом токе [уравнение (3.10)] при наличии ненулевого **A**.

Асимптотическое поведение (3.14) получается путем пренебрежения членом четвёртой степени в знаменателе уравнения (3.13). Далее мы знаменатель отправляем в экспоненту с помощью дополнительного интегрирования (преобразование Лапласа),

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} (d^{d}\mathbf{q}') \, q'^{2} \, e^{-t\left(q'' + 2(1-a^{2})q'^{2} - 4a^{2}q'^{2}\right)} e^{-i\mathbf{q'r}/\xi} \tag{3.15}$$

далее берем интеграл Гаусса по **q**' и выполняем окончательное элементарное интегрирование. Таким образом, мы получаем для двумерного и трёхмерного случаев:

$$\lambda_2(a,\theta) = \frac{1 - 3a^2 - 2(1 - 2a^2)\cos^2\theta}{\sqrt{(1 - a^2)(1 - 3a^2)}(1 - 3a^2 + 2a^2\cos^2\theta)^2},\tag{3.16}$$

$$\lambda_3(a,\theta) = \frac{1 - 3a^2 - (3 - 5a^2)\cos^2\theta}{2\sqrt{1 - a^2}(1 - 3a^2 + 2a^2\cos^2\theta)^{5/2}}.$$
(3.17)



Рис. 3.3: Пространственная зависимость двумерного флуктуационного пропагатора  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ (в единицах  $1/2\pi\alpha\xi^2$ ) для  $a/a_c = 0.95$ . Изотропный пик при  $r \ll \xi$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{r}) \approx \ln(1/r)/2\pi$ , переходит в анизотропный степенной спад при  $r \gg \xi$ .

Обе функции отрицательны для  $0 \le \theta < \theta_d(a)$  и положительны для  $\theta_d(a) < \theta \le \pi/2$  [см. рис. 3.3]. Угол  $\theta_d(a)$ , разделяющий два режима, определяется как (d = 2, 3)

$$\cos^2 \theta_d(a) = \frac{1 - 3a^2}{d - (d+2)a^2}.$$
(3.18)

При приближении к критическому току,  $a \to a_c$ , этот угол приближается к  $\pi/2$ , что указывает на то, что в дальней асимптотике (3.14) пропагатор везде отрицательный, за исключением небольшого сектора вблизи оси y (для параметров на рис 3.3,  $\theta_2(a) = 0.77 \pi/2$ ). В то же время узкий пик  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  в направлении, перпендикулярном течению, намного выше, чем аналогичный максисмум вдоль течения,  $\lambda_d(\pi/2)/|\lambda_d(0)| \sim (a_c - a)^{-d/2}$ .

Непосредственно при критическом значении ( $a = a_c$ ) флуктуационный пропагатор  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ в двумерном случае может быть вычислен точно. Чтобы осуществить данное вычисление заметим, что его преобразование Фурье может быть записано как  $\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \alpha^{-1} \operatorname{Re} 1/(q'^2 + 2iq'_y/\sqrt{3})$ . Записывая это с помощью преобразования Лапласа, мы получаем гауссово интегрирование по q, и после некоторого количества вычислений мы получаем:

$$\mathcal{L}_{2D}^{\text{crit}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\alpha\xi^2} K_0\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3\xi^2}}\right) \cosh\frac{y}{\sqrt{3\xi}}.$$
(3.19)

Примечательно, что зависимость  $\mathcal{L}_{2D}^{\text{crit}}(\mathbf{r})$  вдоль оси протекания тока (x) совпадает (с точностью до масштабирования координат в  $\sqrt{6}$  раз) с зависимостью  $\mathcal{L}_{2D}$  при  $\mathbf{A} = 0$  [Уравнение (3.9)], показывающее экспоненциальное затухание при  $x \gg \xi$ . Однако убывание корреляций *перпендикулярно* к оси протекания тока (y) является только степенным:  $\mathcal{L}_{2D}^{\text{crit}}(0, y) \propto y^{-1/2}$ .

В трёхмерном случае пропагатор при критическом значении тока не может быть вычислен в явном виде. Его логарифмический хвост содержит сложную комбинацию гипергеометрических функций, поэтому мы представляем только его асимптотическое поведение вдоль главных осей:

$$\mathcal{L}_{3D}^{\text{crit}}(\mathbf{r}) \approx \begin{cases} -\frac{3}{4\pi\alpha} \frac{1}{x^3}, & x \to \infty, \\ \frac{0.025}{\alpha\xi^{3/2}} \frac{1}{y^{3/2}}, & y \to \infty. \end{cases}$$
(3.20)

[Число в последней строке соответствует точному выражению  $3^{1/4}\Gamma(3/4)/2^{5/2}\pi\Gamma(1/4)$ .]

В заключение этого раздела обсудим, как и когда различные асимптотические режимы, упомянутые выше, переходят друг в друга.

Для малых токов,  $a \ll a_c$ , флуктуационный пропагатор  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  соответствует потенциалу Юкавы (3.9) вплоть до  $r/\xi \sim \ln(1/a) \gg 1$ , где его экспоненциальное затухание переходит в степенное поведение  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$ , заданное уравнением (3.14).

Для почти критических токов,  $a_c - a \ll a_c$ , дальняя асимптотика  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  [получена путем пренебрежения  $q^4$  в уравнении (3.13)] работает для  $r \gg r_c(\theta)$  (как в 2D, так и в 3D), при этом расстояние сильно зависит от направления:

$$r_c(\theta) \sim \xi \left[ (a_c - a) \cos^2 \theta + a_c^{-3} (a_c - a)^2 \sin^2 \theta \right]^{-1/2}.$$
 (3.21)

В трехмерном случае существует чёткая сшивка между  $\mathcal{L}^{\text{crit}}(\mathbf{r})$  при малом r и  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  при большом r, происходящая при  $r \sim r_c(\theta)$  [обратите внимание, что различные значения  $r_c(\theta)$  в зависимости от  $a_c - a$  вдоль осей x и y согласуется со степенными асимптотиками (3.20)]. Напротив, в двумерном случае появляется новая промежуточная асимптотическая

область между асимптотиками на больших и малых r. Флуктуационный пропагатор имеет следующие асимптотики на различных масштабах:  $\mathcal{L}^{\text{crit}}(\mathbf{r})$  при  $r \ll r_2(\theta)$ ,  $\mathcal{L}^{\text{int}}(\mathbf{r})$  в  $r_2(\theta) \ll$  $r \ll r_c(\theta)$  и  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  в  $r_c(\theta) \ll r$ , где  $r_2(\theta) = -\frac{\xi}{2(1-\sin\theta)} \ln (a_c - a)$ , что работает для  $0 \leq \theta \leq \theta_c$ . Если мы приравняем эти масштабы,  $r_c(\theta) = r_2(\theta)$ , то получим критическое значение угла  $\theta_c = \pi/2 - \sqrt{a_c - a} \ln \frac{1}{a_c - a}$ . Для лучшего понимания все зоны, где какая асимптотика  $\mathcal{L}_{2D}(\mathbf{r})$ находится, нарисованы на рис. **3.4** 





Рис. 3.5: Контур интегрирования в комплексной плоскости по  $q'_x$  после деформации и положение разрезов.

Рис. 3.4: Зоны со всеми асимптотиками  $\mathcal{L}_{2D}(\mathbf{r})$ .  $\varepsilon = a_c - a$ . Нарисована только одна четверь, так как остальные четверти идентичны.

Чтобы вычислить  $\mathcal{L}_{2D}(\mathbf{r})$  в промежуточной зоне (где  $r_c \ll r \ll r_c$  и  $\theta < \theta_c$ ), мы сначала берём интеграл по  $q'_y$ . В оставшемся интеграле мы получаем затухающий показатель степени по x и мнимый показатель степени по y. Для начала рассмотрим случай  $\theta = 0$ 

(то же самое, что y = 0). Рассмотрим аналитическую структуру оставшегося интеграла по  $q'_x$ . Подынтегральное выражение имеет особые точки 0,  $q'^{(1\pm)}_x = \pm i \sqrt{2(1-3a^2)}$  и  $q'^{(2\pm)}_x = \pm i(1-a^2)/2a$ . Разрезы идут от  $q'^{(1-)}_x$  до  $q'^{(1+)}_x$  и от  $q'^{(2\pm)}_x$  до  $\pm i\infty$  соответственно. Следовательно, числовая прямая пересекает разрез. Деформируя контур интегрирования, мы получаем два вклада в  $\mathcal{L}(x)$ , которые претендуют на роль основных. Деформированный контур можно увидеть на рис. 3.5. Первый, который является основным для  $\mathcal{L}^{\text{far}}(\mathbf{r})$  и  $\mathcal{L}^{\text{int}}(\mathbf{r})$ , набирается с интервала от 0 до  $q'^{(1+)}_x$ . Мы получаем  $\mathcal{L}^{\text{far}}(x)$ , если  $r \gg 1/\sqrt{a_c - a}$  или  $\mathcal{L}^{\text{int}}(\mathbf{r})$ , если  $r \ll 1/\sqrt{a_c - a}$ . Основным членом  $\mathcal{L}^{\text{int}}(x)$  является константа  $\sim \sqrt{a_c - a}$ . Второй вклад, который является основным для  $\mathcal{L}^{\text{crit}}(\mathbf{r})$ , лежит в интервале от  $q_x'^{(2+)}$  до  $+i\infty$  и экспоненциально мал для  $x\gg 1$  или логарифмически большой для  $x \ll 1$ . Наконец, мы просто сравниваем эти два вклада и выбираем наибольший из них. Если  $a = a_c$ , то  $q'^{(1\pm)}_x = 0$ , мы получаем явно  $\mathcal{L}^{\operatorname{crit}}(\mathbf{r})$ . Метод, упомянутый выше, может быть обобщен для  $0 < \theta < \theta_c$ . Единственное различие заключается в коэффициенте  $\cos\left(\sqrt{a_c^{-3}(a_c-a)}q'_x\sqrt{1-x_c^2q'^2_x}y\right)$ , где  $x_c \sim 1/\sqrt{a_c-a}$ . Как и в промежуточной зоне  $y < r_2(\theta_c) \sin \theta_c \sim -1/((a_c - a) \ln (a_c - a)),$ аргумент косинуса равен « 1 для любого  $q'_x < q'^{(1+)}_x$ , и, следовательно, это не изменяет постоянный член  $\mathcal{L}^{\text{int}}(\mathbf{r})$ :

$$\mathcal{L}_{2D}^{\text{int}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\alpha\xi^3} \frac{3^{3/4} \sqrt{a_c - a}}{2\pi}.$$
(3.22)

#### **3.3** Определение членов $\Delta_1$ и $\Delta_2$

Теперь перейдем к пошаговому определению членов  $\Delta_n$  в пертурбативном разложении (3.1) по степеням  $\alpha_1$ . Решая уравнение (3.2) для n = 1 с  $\Pi_1$ , заданным уравнением (3.4), мы получаем для члена первого порядка теории возмущений по  $\alpha_1$ :

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(\mathbf{q}) \\ \Delta_1^*(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \Delta_0 \begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) \\ M(-\mathbf{q}) \end{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{q}),$$
(3.23)

где  $M(\mathbf{q}) = L_{11}(\mathbf{q}) + L_{12}(\mathbf{q}) = L_{21}(-\mathbf{q}) + L_{22}(-\mathbf{q})$  задается через

$$M(\mathbf{q}) = \frac{\xi_0^2(q^2 - 2\mathbf{A}\mathbf{q})}{D(\mathbf{q})}.$$
 (3.24)

Значение модуля параметра порядка,  $|\Delta(\mathbf{r})|$ , определяется значением  $\mathcal{L}(\mathbf{q}) = [M(\mathbf{q}) + M(-\mathbf{q})]/2$ , см. уравнение (3.12).

Здесь стоит отметить, что все парные корреляционные функции  $\Delta_1$  и  $\Delta_1^*$  сходятся в ультрафиолетовом пределе, что является следствием быстрого затухания  $M(\mathbf{q}) \propto 1/q^2$  на больших импульсах.

Аналогичным образом член второго порядка теории возмущений по  $\alpha_1$ ,  $\Delta_2(\mathbf{r})$ , может быть получен из рекурсивного уравнения (3.2), где  $\Pi_2$  задается уравнением (3.5) и  $\Delta_1$ взяты из уравнения (3.23). Поскольку мы собираемся изучать корреляционные функции сверхтока низшего порядка по неоднородности, нам понадобится только среднее значение второй поправки  $\langle \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$ .

Эта поправка определяется уравнением (3.2) с пространственно-независимым  $\langle \Pi_2(\mathbf{r}) \rangle$  в правой части. Полученное уравнение для  $\langle \Delta_2 \rangle$  следует решать с осторожностью. Попытка сделать это в импульсном пространстве путём обращения  $L^{-1}$  потерпит неудачу, поскольку  $L(\mathbf{q})$  плохо определен при  $\mathbf{q} = 0$ . Вместо этого мы рассмотрим уравнение (3.2) для  $\langle \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$ в реальном пространстве, что позволяет нам прояснить происхождение вышеупомянутой неопределённости.

Во-первых, отметим, что две составляющие вектора  $\langle \Pi_2 \rangle$  равны друг другу. Во-вторых, мы ограничиваем  $\langle \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$  и  $\langle \Delta_2^*(\mathbf{r}) \rangle$  классом функций, которые являются константами или линейными в **r**, поскольку другие варианты противоречат однородности пространства. Пренебрегая второй производной, мы представляем уравнение (3.2) для  $\langle \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$  в виде

$$\mathbf{A}\nabla \langle \operatorname{Re} \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle = 0, \qquad (3.25a)$$

$$\xi_0^2 \mathbf{A} \nabla \langle \operatorname{Im} \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle + \beta \Delta_0^2 \langle \operatorname{Re} \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle = \langle \Pi_2 \rangle / 2.$$
(3.25b)

Эта система уравнений говорит нам, что  $\langle \operatorname{Re} \Delta_2 \rangle$  постоянна в пространстве, но не фиксирует её значение, которое зависит от  $\nabla \langle \operatorname{Im} \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$ , что имеет смысл дополнительной накрутки фазы параметра порядка.

Следовательно, неоднозначность в определении  $\langle \Delta_2(\mathbf{r}) \rangle$  связана с тем фактом, что наивная теория возмущений в  $\alpha_1$  оставляет среднее значение сверхтекучей скорости неопределенным до тех пор, пока не будет наложено граничное условие на фазу. Граничное условие — наша свобода, и мы выбираем его, требуя, чтобы средняя сверхтекучая скорость  $\langle \mathbf{v} \rangle$  не требовала перенормировки при наличии неоднородности и по-прежнему задавалась через **A** (см. уравнение (2.11)). Для слагаемоего второго порядка теории возмущений это означает:

$$\langle \Delta_2 \rangle = \langle \Delta_2^* \rangle = \langle \Pi_2 \rangle / 2\beta \Delta_0^2. \tag{3.26}$$



Рис. 3.6: Однопетлевая диаграмма, отвечающая за перенормировку T<sub>c</sub>.

## 3.4 Среднее значение $|\Delta|^2$ и ренормировка $T_c$

Рассмотрим среднее значение  $|\Delta(\mathbf{r})|^2$ , вычисляемое по формуле:

$$\langle |\Delta|^2 \rangle = \Delta_0^2 + \Delta_0 \langle \Delta_2 + \Delta_2^* \rangle + \langle \Delta_1^* \Delta_1 \rangle + \dots, \qquad (3.27)$$

где  $\Delta_0$  — параметр порядка при наличии сверхтока [см. уравнение (2.13)]. С помощью уравнений (3.5) и (3.26) мы получаем в низшем порядке по  $f_{\alpha}$ :

$$\langle |\Delta|^2 \rangle = \Delta_0^2 + \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle / \beta \Delta_0 - \langle \Delta_1^2 \rangle - \langle \Delta_1^* \Delta_1 \rangle + \dots$$
(3.28)

В то время как последние два слагаемых здесь определяются большими масштабами (см. обсуждение выше, например (3.24)), слагаемое  $\langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle$  расходится в ультрафиолетовом пределе. Именно этот член отвечает за сдвиг критической температуры  $T_c$  из-за вмороженного беспорядка в коэффициенте  $\alpha$ . Влияние неоднородностей на критическую температуру учитывается путем одновременной (i) замены простого и ненаблюдаемого значения  $T_{c0}$  на фактическое  $T_c$  и (ii) ренормировки всех ультрафиолетовых корреляционных функций в соответствии с

$$\langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle \to \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle^{\text{reg}} \equiv \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle - \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle_{\mathbf{A}=0,\alpha=0}.$$
 (3.29)

Аналогичная проблема в тепловых флуктуациях решается вычитанием из собственноэнергетической части её значения при критической температуре [30]:

$$\Sigma^{(1)}(a) - \Sigma^{(1)}(T_c, q = 0) = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{a + bq^2} - \frac{1}{bq^2}\right)$$
(3.30)

Соответствующая диаграмма представлена на рис. 3.6. Для случая вмороженных флуктуаций мы делаем то же самое. Используя уравнение (3.23) и усредняя с помощью уравнения (2.3), получаем:

$$\langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle^{\text{reg}} = \Delta_0 \int (d\mathbf{q}) f_\alpha(\mathbf{q}) \left[ \frac{\xi_0^2 q^2}{D(\mathbf{q})} - \frac{1}{\xi_0^2 q^2} \right] = \Delta_0 f_\alpha(0) \int (d\mathbf{q}) \frac{4\xi_0^2 (\mathbf{A}\mathbf{q})^2 - 2\beta \Delta_0^2 q^2}{q^2 D(\mathbf{q})}.$$
 (3.31)

Тут уместно поговорить про знак сдвига критической температуры  $T_c$ . Теория Гинзбурга— Ландау не работает на слишком малых масштабах (меньше  $\xi_0$ ), а значит и на слишком больших импульсах (больше  $1/\xi_0$ ). Если  $r_c > \xi_0$ , то обрезка вклада  $\langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle_{\mathbf{A}=0,\alpha=0}$  на больних импульсах происходит контролируемо, и тогда сдвиг  $T_c$  положительный,  $\delta T_c > 0$ . Если верно обратное неравенство  $r_c < \xi_0$ , то теория ГЛ перестаёт работать раньше обрезки на  $1/r_c$ , и тогда сказать что-либо о величине и знаке сдвига  $T_c$  нельзя.

В дальнейшем будет предполагаться, что вышеуказанная регуляризация была сделана. Поскольку после вычитания контрчлена интегрирование по импульсу уже сходится в ультрафиолетовом пределе, мы заменяем  $f_{\alpha}(\mathbf{q})$  на  $f_{\alpha}(0)$  и выносим этот множитель за знак интеграла. Поскольку в теории нет других ультрафиолетовых расходимостей, в дальнейшем будет использоваться только значение  $f_{\alpha}(0)$ .

В результате мы получим среднее значение квадрата модуля параметра порядка:

$$\langle |\Delta|^2 \rangle = \Delta_0^2 + \frac{f_\alpha(0)}{\beta} \int (d\mathbf{q}) \left[ \frac{\xi_0^2 q^2}{D(\mathbf{q})} - \frac{1}{\xi_0^2 q^2} - \frac{2\beta \Delta_0^2 \xi_0^4 q^4}{D^2(\mathbf{q})} \right].$$
(3.32)

Чтобы проиллюстрировать эффект неоднородности, полезно изучить  $\langle |\Delta(\mathbf{r})|^2 \rangle$  в отсутствие сверхтока ( $\mathbf{A} = 0$ ):

$$\langle |\Delta|^2 \rangle_{\mathbf{A}=0} = \frac{\alpha}{\beta} \left[ 1 - 4f_{\alpha}(0) \int \frac{(d\mathbf{q})(\xi_0^2 q^2 + \alpha)}{\xi_0^2 q^2 (\xi_0^2 q^2 + 2\alpha)^2} \right].$$
 (3.33)

В трёхмерном случае интеграл набирается на  $q \sim 1/\xi$  (единственный пространственный масштаб равен  $\xi$ ), и мы получаем

$$\frac{\langle |\Delta|^2 \rangle_{\mathbf{A}=0}^{(3D)}}{\alpha/\beta} = 1 - \sqrt{\frac{\alpha_*^{(3D)}}{\alpha}}$$
(3.34)

где

$$\alpha_*^{(3D)} = \left(\frac{3f_\alpha(0)}{2^{5/2}\pi\xi_0^3}\right)^2.$$
(3.35)

Мы видим, что при наличии вмороженного беспорядка в коэффициенте  $\alpha$  среднее значение  $\langle |\Delta(\mathbf{r})|^2 \rangle$  подавляется по сравнению с его среднеполевым значением (уже после перенормировки  $T_c$ ). Параметр  $\alpha_*$  определяет размытость теплового перехода в неоднородной системе и аналогичен числу Гинзбурга-Леванюка Gi для тепловых флуктуаций. Параметр порядка при  $\alpha_* \gtrsim \alpha$  демонстрирует сильные пространственные флуктуации, изменяющие характер перехода. В случае, если мы значительно удалены от (перенормированного)  $T_c$ , при  $\alpha_* \ll \alpha$ , эти флуктуации слабы, и их возмущающее влияние на среднее значение  $\langle |\Delta(\mathbf{r})|^2 \rangle$ определяется уравнением (3.34).

Двумерный случай является маргинальным. Здесь интеграл по импульсу в уравнении (3.33) логарифмически расходится в инфракрасном пределе [что является артефактом регуляризации (3.29)] и должен быть обрезан на некотором большом масштабе  $L_*$ . Правильный выбор  $L_*$  обсуждался как в контексте тепловых флуктуаций в однородных системах [30, 31], так и флуктуаций, вызванных беспорядком, в неоднородных системах [32]. В обоих случаях величина обрезки  $L_*$  обозначается как длина когерентности на границе области флуктуаций. При этом  $\delta T_c/T_c$  равна соответствующему числу Gi для  $\alpha_*$ . Таким образом, мы получаем:

$$\frac{\langle |\Delta|^2 \rangle_{\mathbf{A}=0}^{(2D)}}{\alpha/\beta} = 1 - \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha_*^{(2D)}},\tag{3.36}$$

где величина размытия перехода из-за неоднородности имеет вид

$$\alpha_*^{(2D)} = \frac{f_\alpha(0)}{4\pi\xi_0^2}.$$
(3.37)

Уравнение (3.37), записанное с логарифмической точностью, справедливо за пределами области флуктуаций, для  $\alpha_*^{(2D)} \ll \alpha$ .

## Глава 4

## Статистика сверхтока

#### 4.1 Средний ток

Теперь мы переходим к вычислению среднего сверхтока в зависимости от средней сверхтекучей скорости  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{A}$ . В соответствии с уравнением (2.7), протекающий ток — это сумма двух вкладов,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ . При усреднении первого члена получается  $\langle \mathbf{j}_1 \rangle = \eta \langle |\Delta|^2 \rangle \mathbf{A}$ , где  $\langle |\Delta|^2 \rangle$  задается уравнением (3.32). Для второго члена получаем

$$\langle \mathbf{j}_2 \rangle = \eta \Delta_0^2 f_\alpha(0) \int (d\mathbf{q}) \mathbf{q} M^2(\mathbf{q}).$$
(4.1)

Подставляя  $M(\mathbf{q})$  из уравнения (3.24), мы видим, что результирующий вектор сонаправлен с **A**. Получаем:

$$\langle \mathbf{j}_2 \rangle = -4\eta \Delta_0^2 f_\alpha(0) \mathbf{A} \int (d\mathbf{q}) \frac{\xi_0^4 q^2 q_x^2}{D^2(\mathbf{q})}.$$
(4.2)

Суммируя эти два члена, мы приходим к следующему выражению для среднего сверхтока:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \eta \left[ \Delta_0^2 + \frac{f_\alpha(0)}{\beta} \int (d\mathbf{q}) K(\mathbf{q}) \right] \mathbf{A}, \tag{4.3}$$

где

$$K(\mathbf{q}) = \frac{\xi_0^2 q^2}{D(\mathbf{q})} - \frac{1}{\xi_0^2 q^2} - \frac{2\beta \Delta_0^2 \xi_0^4 q^2 (q^2 + 2q_x^2)}{D^2(\mathbf{q})}.$$
(4.4)

Уравнение (4.3) описывает поправку первого порядка к среднему току, которая учитывает как изменение модуля параметра порядка, так и перераспределение его фазы.

#### 4.1.1 Средний ток в 3D

В трёхмерном случае интеграл по импульсам (4.3) без проблем вычисляется в сферических координатах, и мы получаем:

$$\langle j \rangle = \frac{\eta \alpha^{3/2}}{\xi_0 \beta} \left[ a(1-a^2) + \sqrt{\frac{\alpha_*^{(3D)}}{\alpha}} R_3(a) \right], \qquad (4.5)$$

где в уравнении введён параметр  $\alpha_*^{(3D)}$ , количественно определяющий степень неоднородности (3.35). Безразмерная функция  $R_3(a)$  определяется как:

$$R_3 = \frac{(1-3a^2)^{3/2}}{6a} - \frac{(1-a^2)(1+3a^2)\arcsin\sqrt{\frac{2a^2}{1-a^2}}}{6\sqrt{2}a^2}.$$
(4.6)

Функция  $R_3(a)$  отрицательна для всех физически реализуемых градиентов фазы,  $0 < a < a_c$ , что указывает на подавление протекания тока вмороженными неоднородностями. В пределе малых значений *a* можно найти  $R_3(a) \approx -11a/9$ , что приводит к уменьшению сверхтекучей плотности:

$$\frac{\delta n_s}{n_s} = -\frac{11}{9} \sqrt{\frac{\alpha_*^{(3D)}}{\alpha}}.$$
(4.7)

При  $a \to a_c$  функция  $R_3(a)$  ведёт себя корневым образом,  $R_3(a) \approx -\pi/3\sqrt{2} + 2^{1/2}3^{-1/4}\sqrt{a_c - a}$ .

Зависимость среднего тока от среднего градиента фазы в трехмерном случае, полученая из уравнения (4.5) для  $\alpha_*^{(3D)}/\alpha = 0.01$ , отображена на рисунке 4.1 оранжевой линией.

Сдвиг критического тока (максимального тока, который может течь через образец) в трёхмерном случае отрицательный для любой величины неоднородности.

Непосредственно в окрестности точки  $a_c$  формула (4.5) не применима. Длину интервала, в котором эта формула не применима, можно найти по порядку величины сравнив стандартный вклад  $a(1 - a^2)$  и корневую поправку  $\sim \sqrt{\frac{\alpha_*^{(3D)}}{\alpha}} \sqrt{a_c - a}$ . В итоге получаем величину интервала неприменимости:

$$a_c - a \sim \left(\frac{\alpha_*^{(3D)}}{\alpha}\right)^{1/3}.$$
(4.8)



Рис. 4.1: Синяя линия — стандартная зависимость тока от сверхтекучей скорости в однородном сверхпроводнике. Оранжевая линия — зависимость среднего тока в неоднородном сверхпроводнике в трёхмерном случае для  $\alpha_*^{(3D)}/\alpha = 0.01$ . Оранжевая линия всегда ниже синей — неоднородности подавляют протекание тока.

#### 4.1.2 Средний ток в 2D

В двумерном случае параметр неоднородности определяется по-другому (см. (3.37)):

$$\alpha_*^{(2D)} = f_\alpha(0) / 4\pi \xi_0^2. \tag{4.9}$$

Из малых импульсов возникает инфракрасный вклад  $j_{\rm IR}$ , пропорциональный величине неоднородности. Его можно оценить в интервале температур, где  $\alpha_*^{\rm (2D)} \ll \alpha$ :

$$j_{\rm IR} = 4\pi a \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha_*^{(2D)}/\alpha}}^1 (d^2 q') \left(-\frac{1}{q'^2}\right) = -a \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_*^{(2D)}}\right)$$
(4.10)

Этот вклад имеет отрицательный знак (демонстрирующий подавление сверхтока) и превосходит все остальные вклады, связанные с неоднородностью, по логарифмически большому параметру  $\ln \left( \alpha / \alpha_*^{(2D)} \right)$ .

Далее мы вычисляем оставшуюся зависимость тока от векторного потенциала. Это превышение точности по сравнению с предыдущим логарифмическим вкладом, так как обрезка логарифма определяется лишь по порядку величины. Тем не менее посчитаем и этот вклад для определения интервала неприменимости формулы для среднего сверхтока выше.

$$\frac{\langle j \rangle}{j_0} = \left( a \left( 1 - a^2 \right) - \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \left( a \ln \left( \frac{\alpha}{\alpha_*^{(2D)}} \right) + a \left( 2 \ln \left( \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - 3a^2} \right) - \ln 2 \right) + \frac{1 - a^2}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)(1 - 3a^2)}} - 1 \right) \right) \right)$$
(4.11)

Формула (4.11) имеет следующие асимптотики:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_*^{(2D)}}\right)\right) a, \quad a \to 0\\ a(1 - a^2) - \frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha} \frac{1}{3^{1/4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a\right)^{1/2}}, \quad a \to \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$
(4.12)

Зависимость среднего тока в зависимости от среднего градиента фазы в двумерном случае, полученая из уравнения (4.10) для  $\alpha_*^{(2D)}/\alpha = 0.01$ , отображена на рисунке 4.2 зелёной линией.

Сдвиг критического тока (максимального тока, который может течь через образец) в двумерном случае отрицательный, как и в трёхмерном.

Непосредственно в окрестности точки  $a_c$  формула (4.10) не применима. Длину интервала, в котором эта формула не применима, можно найти по порядку величины сравнив стандартный вклад  $a(1-a^2)$  и корневую поправку  $\sim \left(\alpha_*^{(2D)}/\alpha\right)/\sqrt{a_c-a}$ . В итоге получаем величину интервала неприменимости:

$$a_c - a \sim \left(\frac{\alpha_*^{(2D)}}{\alpha}\right)^{2/5}.$$
(4.13)

### 4.2 Флуктуации тока

Чтобы описать флуктуации тока в первом порядке по величине неоднородности, рассмотрим поправку к однородному току,  $\delta \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Подставляя разложение (3.1) в уравнение (2.7), мы получаем:

$$\delta \mathbf{j} = \eta \Delta_0 \left[ \mathbf{A} (\Delta_1 + \Delta_1^*) + \frac{\nabla \Delta_1 - \nabla \Delta_1^*}{2i} \right].$$
(4.14)



Рис. 4.2: Синяя линия — стандартная зависимость тока от сверхтекучей скорости в однородном сверхпроводнике. Зелёная линия — зависимость среднего тока в неоднородном сверхпроводнике в двумерном случае для  $\alpha_*^{(2D)}/\alpha = 0.01$ . Зелёная линия всегда ниже синей — неоднородности подавляют протекание тока.

С помощью уравнения (3.23) мы получаем для *i*-ой компоненты  $\delta \mathbf{j}(\mathbf{q})$ :

$$\frac{\delta j_i(\mathbf{q})}{j_0(a)} = \frac{2\alpha_1(\mathbf{q})}{\alpha} \frac{q'^2 \delta_{ix} - q'_i q'_x}{q'^4 + 2(1 - a^2)q'^2 - 4a^2 q'^2_x},\tag{4.15}$$

где  $j_0(a) = j_0 a(1 - a^2)$  — ток в однородной системе и  $\mathbf{q}'$  — это безразмерный импульс, введенный в уравнение (3.11).

Усредняя по неоднородностям получаем корреляционную функцию флуктуаций тока:

$$\frac{\langle \delta j_i(0)\delta j_j(\mathbf{r})\rangle}{j_0^2(a)} = \frac{f_\alpha(0)}{\alpha^2\xi^d}C_{ij}(\mathbf{r}),\tag{4.16}$$

где тензор  $C_{ij}(\mathbf{r})$  определяется как

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = 4 \int (d\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}/\xi} \frac{(q'^2\delta_{ix} - q'_iq'_x)(q'^2\delta_{jx} - q'_jq'_x)}{[q'^4 + 2(1 - a^2)q'^2 - 4a^2q'^2_x]^2}.$$
(4.17)

Для произвольного **r** все компоненты  $C_{ij}(\mathbf{r})$  отличны от нуля и не могут быть получены в явном виде. Ниже мы приводим аналитические результаты для корреляторов в совпадающих точках и их дальнюю асимптотику.

В совпадающих точках тензор  $C_{ij}(0)$  является диагональным и цилиндрически симметричным относительно оси x. В результате вычислений (4.17) для  $\mathbf{r} = 0$  получаем явную зависимость. В двумерном случае:

$$C_{xx}^{2D}(0) = \frac{1}{8\pi a^2} \left[ (1 - 3a^2) \sqrt{\frac{1 - 3a^2}{1 - a^2}} - 1 + 4a^2 \right], \tag{4.18}$$

$$C_{yy}^{2D}(0) = \frac{1}{8\pi \left[1 - 2a^2 + \sqrt{(1 - a^2)(1 - 3a^2)}\right]},$$
(4.19)

в то время как в трёхмерном случае

$$C_{xx}^{3D}(0) = \frac{(3 - 22a^2 + 51a^4)\arctan\sqrt{2a^2/(1 - 3a^2)} - 3(1 - 5a^2)\sqrt{2a^2(1 - 3a^2)}}{128\pi a^5}, \qquad (4.20)$$

$$C_{yy}^{3D}(0) = \frac{(3-7a^2)\sqrt{2a^2(1-3a^2)} - (3-14a^2+11a^4)\arctan\sqrt{2a^2/(1-3a^2)}}{256\pi a^5},$$
 (4.21)

Очевидно, что  $C_{zz}^{3D}(0) = C_{yy}^{3D}(0)$ . Уравнения (4.18)–(4.21) описывают плавные возрастающие функции, принимающие конечные положительные значения как при a = 0, так и при  $a = a_c$ .

Применяя тот же метод вычисления с помощью преобразования Лапласа, который мы использовали в (3.16), мы получаем асимптотику  $\langle \delta j_x(0) \delta j_x(\mathbf{r}) \rangle$  и  $\langle \delta j_y(0) \delta j_y(\mathbf{r}) \rangle$  на больших r в 2D:

$$C_{xx}^{2D}(\mathbf{r}) = \frac{(1-3a^2)^{1/2} \left(-(1-3a^2)^2 - 4(1-3a^2)\cos^2\theta + 4(2-6a^2+3a^4)\cos^4\theta\right)}{4\pi (r/\xi)^2 (1-a^2)^{3/2} (1-3a^2+2a^2\cos^2\theta)^3}$$
(4.22)

$$C_{yy}^{2D}(\mathbf{r}) = \frac{-(1-3a^2)^2 + 4(2-9a^2+9a^4)\cos^2\theta - 4(2-8a^2+7a^4)\cos^4\theta}{4\pi(r/\xi)^2(1-a^2)^{1/2}(1-3a^2)^{1/2}(1-3a^2+2a^2\cos^2\theta)^3}$$
(4.23)

И то же самое для  $\langle \delta j_x(0) \delta j_x(\mathbf{r}) \rangle$  и  $\langle \delta j_{\perp}(0) \delta j_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle$  в 3D (для краткости мы пишем результаты для  $C_{xx}$  и  $C_{\perp}$ , где  $\perp$  обозначает произвольную компоненту в плоскости yz. Зависимость от угла  $\varphi$  определяется тривиальным поворотом координат, поэтому приводим



Рис. 4.3: Корреляционные функции а) продольных токов  $\langle \delta j_x(0) \delta j_x(\mathbf{r}) \rangle$  б) поперечных токов  $\langle \delta j_y(0) \delta j_y(\mathbf{r}) \rangle$  в двумерном случае [в единицах  $(\alpha_*^{(2D)}/\alpha) j_0^2(a)$ ] для  $a/a_c = 0.95$ .

результаты только для  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  во избежание слишком огромных формул:

$$C_{xx}^{3D}(\mathbf{r}) = \frac{(1-3a^2)\left(-(1-3a^2)^2 - 2(3-10a^2+3a^4)\cos^2\theta + (15-42a^2+23a^4)\cos^4\theta\right)}{8\pi(r/\xi)^3(1-a^2)^{3/2}(1-3a^2+2a^2\cos^2\theta)^{7/2}}$$
(4.24)

$$C_{\perp,\varphi=0}^{3\mathrm{D}}(\mathbf{r}) = \frac{-2(1-3a^2)^2 + (15-68a^2+69a^4)\cos^2\theta - (15-60a^2+53a^4)\cos^4\theta}{8\pi (r/\xi)^3 (1-a^2)^{1/2} (1-3a^2+2a^2\cos^2\theta)^{7/2}}$$
(4.25)

$$C_{\perp,\varphi=\pi/2}^{3\mathrm{D}}(\mathbf{r}) = \frac{(1-3a^2)^2 + (-3+16a^2-21a^4)\cos^2\theta + 2a^2(-3+5a^2)\cos^4\theta}{8\pi(r/\xi)^3(1-a^2)^{1/2}(1-3a^2+2a^2\cos^2\theta)^{7/2}}$$
(4.26)

На рисунке (4.3) мы видим пространственную зависимость двумерных корреляторов  $\langle \delta j_x(0) \delta j_x({f r}) \rangle$  и  $\langle \delta j_y(0) \delta j_y({f r}) \rangle$ для  $a/a_c=0.95$ . Асимптотика первого графика положительна для  $\theta < 0.68 \pi/2$  и отрицательна в противном случае. На втором графике мы наблюдаем сильно анизотропную картину, с отрицательной асимптотикой вдоль осей x и y, но положительной для промежуточного интервала углов  $\theta \in (0.53 \pi/2, 0.90 \pi/2).$ 

На графике  $\langle j_x(0)j_x(\mathbf{r})\rangle$  масштаб центральной точки (расстояние между нулевой точкой и нулевой изолинией) не зависит от a при  $a \to a_c$ . На графике  $\langle j_y(0) j_y(\mathbf{r}) \rangle$  x-масштаб центрального пятна ~  $\ln\left(1/(a_c-a)\right), a \to a_c, a y$ -масштаб ~  $1/\sqrt{a_c-a}, a \to a_c$ .

Результаты численного симулирования сверхтока и модуля параметра порядка для  $a/a_c \to 0$  и  $a/a_c = 0.95$  представлены в следующей главе.

# Глава 5

# Численная симуляция параметра порядка и сверхтекучего тока

В ходе работы мы получили все формулы, неодходимые для численного моделирования протекания тока через сверхпроводящую плёнку. Рассмотрим именно двумерный случай, как практически более важный. Для простоты мы проведём симуляцию с точностью до первого порядка теории возмущений.

Алгоритм численной симуляции параметра порядка следующий: 1) генерируем случайную реализацию неоднородности  $\alpha_{k,l}$ ; 2) делаем с этой реализацией дискретное преобразование Фурье, получаем  $\alpha_{p,q}$ ; 3) вычисляем импульсную компоненту поправки к параметру порядка  $\Delta_{p,q}$ ; 4) делаем обратное дискретное преобразование Фурье и строим трёхмерный график поправки к параметру порядка  $\Delta_{k,l}$ .

Теперь осуществим озвученную выше схему. Исходные уравнения следующие:

$$\begin{cases} \left(-\xi_0^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2iA\partial_x) + \beta\Delta_0^2\right)\Delta_1(\mathbf{r}) + \beta\Delta_0^2\Delta_1^*(\mathbf{r}) = \Delta_0\alpha_1(\mathbf{r}),\\ \left(-\xi_0^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2iA\partial_x) + \beta\Delta_0^2\right)\Delta_1^*(\mathbf{r}) + \beta\Delta_0^2\Delta_1(\mathbf{r}) = \Delta_0\alpha_1(\mathbf{r}). \end{cases}$$
(5.1)

Дискретизуем задачу на сетке  $n \times n$  с единичным размером сетки  $r_c$  (корреляционным радиусом) по правилу:  $\Delta_1(\mathbf{r}) \to \Delta_{k,l}, \, \alpha_1(\mathbf{r}) \to \alpha_{k,l}, \, \Delta_{k+n,l} \equiv \Delta_{k,l+n} \equiv \Delta_{k,l}, \, k, l \in \overline{1, n}.$ 

$$\begin{cases} -\xi_0^2 \left( \frac{\Delta_{k-1,l} + \Delta_{k+1,l} + \Delta_{k,l-1} + \Delta_{k,l+1} - 4\Delta_{k,l}}{r_c^2} + 2iA \frac{\Delta_{k+1,l} - \Delta_{k-1,l}}{2r_c} - \frac{\beta \Delta_0^2}{\xi_0^2} \Delta_{k,l} \right) + \beta \Delta_0^2 \Delta_{k,l}^* = \Delta_0 \alpha_{k,l}, \\ -\xi_0^2 \left( \frac{\Delta_{k-1,l}^* + \Delta_{k+1,l}^* + \Delta_{k,l+1}^* + \Delta_{k,l+1}^* - 4\Delta_{k,l}^*}{r_c^2} + 2iA \frac{\Delta_{k+1,l}^* - \Delta_{k-1,l}^*}{2r_c} - \frac{\beta \Delta_0^2}{\xi_0^2} \Delta_{k,l}^* \right) + \beta \Delta_0^2 \Delta_{k,l} = \Delta_0 \alpha_{k,l}. \end{cases}$$

$$(5.2)$$

Дискретное преобразование Фурье записывается следующим образом:

$$\Delta_{p,q} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_{k,l} e^{-\frac{2\pi i}{n}(kp+lq)}, \quad \alpha_{p,q} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{k,l} e^{-\frac{2\pi i}{n}(kp+lq)}.$$
 (5.3)

Делая дискретное преобразование Фурье получаем уравнения на импульсные компоненты  $\Delta_{pq}$  и  $\Delta_{pq}^*$ :

$$\begin{cases} -\xi_0^2 \left( \frac{-4(\sin^2 \frac{\pi p}{n} + \sin^2 \frac{\pi q}{n})}{r_c^2} - A \frac{2\sin \frac{2\pi p}{n}}{r_c} - \frac{\beta \Delta_0^2}{\xi_0^2} \right) \Delta_{p,q} + \beta \Delta_0^2 \Delta_{p,q}^* = \Delta_0 \alpha_{p,q}, \\ -\xi_0^2 \left( \frac{-4(\sin^2 \frac{\pi p}{n} + \sin^2 \frac{\pi q}{n})}{r_c^2} + A \frac{2\sin \frac{2\pi p}{n}}{r_c} - \frac{\beta \Delta_0^2}{\xi_0^2} \right) \Delta_{p,q}^* + \beta \Delta_0^2 \Delta_{p,q} = \Delta_0 \alpha_{p,q}. \end{cases}$$
(5.4)

Решая систему из двух уравнений получаем явную формулу для  $\Delta_{p,q}$ :

$$\Delta_{p,q} = \frac{\Delta_0}{2} \frac{2\frac{\xi^2}{r_c^2} (\sin^2 \frac{\pi p}{n} + \sin^2 \frac{\pi q}{n}) - \frac{a\xi}{r_c} \sin \frac{2\pi p}{n}}{4\left(\frac{\xi^2}{r_c^2} (\sin^2 \frac{\pi p}{n} + \sin^2 \frac{\pi q}{n})\right)^2 + 2(1 - a^2)\frac{\xi^2}{r_c^2} (\sin^2 \frac{\pi p}{n} + \sin^2 \frac{\pi q}{n}) - \left(\frac{a\xi}{r_c} \sin \frac{2\pi p}{n}\right)^2} \frac{\alpha_{p,q}}{\alpha}.$$
(5.5)

Теперь займёмся симуляцией сверхтекучего тока. Для поправки к току в первом порядке для 2D воспользуемся формулой (4.15):

$$\begin{pmatrix} \delta j_x(\mathbf{q}) \\ \delta j_y(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = j_0(a) \begin{pmatrix} \frac{2q_y'^2}{q'^4 + 2(1-a^2)q'^2 - 4a^2q_x'^2} \frac{\alpha(\mathbf{q})}{\alpha} \\ \frac{-2q_x'q_y'}{q'^4 + 2(1-a^2)q'^2 - 4a^2q_x'^2} \frac{\alpha(\mathbf{q})}{\alpha} \end{pmatrix}.$$
(5.6)

Для более точного построения линий тока необходимо ввести вектор-потенциал  $\Psi(\mathbf{r})$ , через который можно записать поправку первого порядка к току следующим образом:

$$\delta \mathbf{j} = j_0(a) \cdot \xi \operatorname{rot} \Psi(\mathbf{r}). \tag{5.7}$$

Изолинии функции  $\Psi(\mathbf{r})$  являются линиями сверхтекучего тока. Этот вектор-потенциал можно ввести, так как изначально уравнения Гинзбурга-Ландау учитывают сохранение тока (бездивергентное течение). В импульсном представлении получаем вектор-потенциал:

$$\Psi(\mathbf{q}) = \frac{-2iq'_y}{q'^4 + 2(1-a^2)q'^2 - 4a^2q'^2_x} \frac{\alpha(\mathbf{q})}{\alpha},$$
(5.8)

а формула для поправки к току:

$$\delta \mathbf{j}(\mathbf{q}) = j_0(a) \cdot i \begin{pmatrix} q'_y \\ -q'_x \end{pmatrix} \Psi(\mathbf{q}).$$
(5.9)



Рис. 5.1: Численное моделирование профиля локального параметра порядка  $|\Delta(\mathbf{r})|$  (цветовая карта) и сверхтока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  (линии тока) для неоднородного двумерного сверхпроводника при а) инфинитиземальном токе и б) токе, близком к критическому,  $a/a_c = 0.95$ . Обе картинки получены для одного и того же короткодействующего беспорядка с корреляционной длиной  $r_c = \xi/10$  на сетке  $128 \times 128$  (в единицах  $r_c$ ). Цветовая шкала модуля параметра порядка нормирована на величину  $\Delta_0$ . Используются периодические граничные условия. Отчётливо видно, что с увеличением тока амплитуда флуктуаций  $|\Delta(\mathbf{r})|$  растёт, и их корреляции заметно усиливаются вдоль направления тока. В то же время структура сверхтока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  становится более неоднородной.

Выполняя дискретизацию, получаем:

$$\Psi_{p,q} = \frac{-2i\frac{a\xi}{r_c}\sin\frac{2\pi p}{n}}{4\left(\frac{\xi^2}{r_c^2}\left(\sin^2\frac{\pi p}{n} + \sin^2\frac{\pi q}{n}\right)\right)^2 + 2(1-a^2)\frac{\xi^2}{r_c^2}\left(\sin^2\frac{\pi p}{n} + \sin^2\frac{\pi q}{n}\right) - \left(\frac{a\xi}{r_c}\sin\frac{2\pi p}{n}\right)^2}\frac{\alpha_{p,q}}{\alpha}.$$
 (5.10)

За единицу размера сетки везде берётся  $r_c$ , именно на таком масштабе неоднопродность скоррелирована. В каждой ячейке  $r_c \times r_c$  генерируем значение неоднородности  $\alpha_{k,l}$ . Результаты симуляции для различных параметров представлены на рисунках (5.1), (5.2). Рисунки отличаются между собой реализацией вмороженного беспорядка и размером сетки (128 × 128 и 256 × 256 соответственно). Величина  $\xi$  отвечает за характерный размер пятна. При увеличении размера сетки относительный размер пятен уменьшается, поэтому



Рис. 5.2: Аналогичные картинки с другой реализацией вмороженного беспорядка на а) инфинитиземальном токе и б) токе, близком к критическому,  $a/a_c = 0.95$ , для  $r_c = \xi/10$ , только теперь на сетке  $256 \times 256$  (в единицах  $r_c$ ).

на картинка становится более детализированной.

Из проделанных численных симуляций можно сделать следующие выводы, что при увеличении значения протекающего тока:

- амплитуда флуктуаций  $|\Delta(\mathbf{r})|$  растёт. Это видно из обезразмеренной на  $\Delta_0$  шкалы.
- корреляции  $|\Delta(\mathbf{r})|$  усиливаются в направлении  $\langle \mathbf{j} \rangle$ . Картинка становится явно вытянутой в горизонтальном направлении.
- сверхток  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  становится более неоднородным. На это указывает формула 4.19, функция  $C_{yy}^{2\mathrm{D}}(0)$  монотонно растёт по a.

Интересно заметить, что результат симуляции (на малых токах) качественно похож на экспериментальные результаты из работы [5], представленные на рис. [1.2]. И в том, и в другом случае характерный размер пятен порядка  $\xi$ .

## Заключение

Рассмотрено протекание тока по сверхпроводящей плёнке с вмороженными неоднородностями в модели гауссовых флуктуаций коэффициента α в теории Гизбурга—Ландау. Исследован флуктуационный пропагатор на фоне однородного сверхтока, выяснены его свойства, главное из которых — медленное степенное затухание (дальнодействие). Посчитана зависимость среднего тока, протекающего через сверхпроводник, от средней сверхтекучей скорости в низшем порядке теории возмущений. Показано, что неоднородность всегда подавляет средний ток. Вычислены корреляционные функции различных компонент тока. По мере увеличения средего тока флуктуации растут и становятся скоррелированными вдоль направления протекания. Проведена численная симуляция параметра порядка и сверхтекучего тока.

Данная работа закладывает основы рассмотрения сверхтоковых состояний в неоднородных сверхпроводниках. Одним из дальнейших направлений исследований может быть обобщение теории на произвольные температуры. В этом случае уравнение Гинзбурга-Ландау не применимо, и необходимо использовать уравнение Узаделя на квазиклассическую функцию Грина квазичастиц. В отсутствии тока это сделано в работе [19], а при конечном токе вопрос остается открытым. Кроме того — и это наиболее перспективное направление развития теории — большой интерес представляет изучение статистики «слабых мест», где за счет неоднородностей вероятность рождения теплового проскальзывания фазы оказывается выше, чем в среднем по образцу. Понимание распределения таких мест определяет темновой предел работы детекторов одиночных фотонов [7].

# Благодарности

Автор работы выражает благодарность Михаилу Андреевичу Скворцову за научное руководство в течение трёх лет. Также автор выражает благодарность Владимиру Валентиновичу Лебедеву за помощь в решении вопроса, связанного с ренормировкой критической температуры. Работа была поддержана грантами РНФ 23-12-00297 и грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## Глава 6

## Список литературы

- [1] A. D. Semenov, G. N. Gol'tsman, and A. A. Korneev, Quantum detection by current carrying superconducting film, Physica C: Superconductivity **351**, 349 (2001).
- [2] A. E. Dane, Superconducting Photodetectors, Nanowires, and Resonators, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology (2019).
- [3] C. Natarajan, M. Tanner, and R. Hadfield, Superconducting nanowire single-photon detectors: physics and applications, Supercond. Sci. Technol. 25, 063001 (2012).
- [4] B. Sacépé, M. Feigel'man, and T. M. Klapwijk, Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials, Nature Physics 16, 734 (2020).
- [5] B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition, Phys. Rev. Lett. 101, 157006 (2008).
- [6] A. G. Kozorezov, C. Lambert, F. Marsili, M. J. Stevens, V. B. Verma, J. P. Allmaras, M. D. Shaw, R. P. Mirin, and S. W. Nam, Fano fluctuations in superconducting-nanowire single-photon detectors, Phys. Rev. B 96, 054507 (2017).
- [7] A. D. Semenov, M. Sidorova, M. A. Skvortsov, A. Kuzmin, K. Ilin, and M. Siegel, Local thermal fluctuations in current-carrying superconducting nanowires, Physical Review B 102, 184508 (2020).

- [8] A. N. Zotova and D. Y. Vodolazov, Intrinsic detection efficiency of superconducting nanowire single photon detector in the modified hot spot model, Supercond. Sci. Technol. 27, 125001 (2014).
- [9] Y. Cheng, C. Gu and X. Hu, Inhomogeneity-induced timing jitter of superconducting nanowire single-photondetectors, Appl. Phys. Lett. 111, 062604 (2017).
- [10] В. Ф. Гантмахер и В. Т. Долгополов, Квантовый фазовый переход сверхпроводникизолятор, УФН 180, 3–53 (2010).
- [11] A. Kapitulnik, S. Kivelson, and B. Z. Spivak, "Anomalous metals: Failed superconductors," Rev. Mod. Phys. 91, 011002 (2019).
- [12] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan, "Eigenfunction Fractality and Pseudogap State near the Superconductor-Insulator Transition," Phys. Rev. Lett. 98, 027001 (2007).
- [13] M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas, "Fractal superconductivity near localization threshold," Annals of Physics **325**, 1390 (2010).
- [14] M. V. Feigel'man and L. B. Ioffe, "Superfluid density of a pseudogapped superconductor near the superconductor-insulator transition," Phys. Rev. B 92, 100509 (2015).
- [15] A. V. Khvalyuk, T. Charpentier, N. Roch, B. Sacépé, and M. V. Feigel'man, Near power-law temperature dependence of the superfluid stiffness in strongly disordered superconductors, Phys. Rev. B 109, 144501 (2024).
- [16] A. Ghosal, M. Randeria, and N. Trivedi, "Role of Spatial Amplitude Fluctuations in Highly Disordered s-Wave Superconductors," Phys. Rev. Lett. 81, 3940 (1998).
- [17] A. Ghosal, M. Randeria, and N. Trivedi, "Inhomogeneous pairing in highly disordered s-wave superconductors," Phys. Rev. B 65, 014501 (2001).
- [18] G. Seibold, L. Benfatto, C. Castellani, and J. Lorenzana, Superfluid Density and Phase Relaxation in Superconductors with Strong Disorder, Phys. Rev. Lett. 108, 207004 (2012).

- [19] А. И. Ларкин и Ю. Н. Овчинников, "Влияние неоднородностей на свойства сверхпроводников", ЖЭТФ 61, 1221 (1971).
- [20] Л.Б. Иоффе и А.И. Ларкин, Свойства сверхпроводников с размытой температурой перехода, ЖЭТФ, 81 (2), 707-718 (1981).
- [21] M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, "Subgap states in disordered superconductors", ЖЭΤΦ 144, 560 (2013).
- [22] M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, Superconductivity in Disordered Thin Films: Giant Mesoscopic Fluctuations, Physical Review Letters 95, 057002 (2005).
- [23] A. A. Kopasov, I. M. Tsar'kov, and A. S. Mel'nikov, Disorder-induced trapping and antitrapping of vortices in type-II superconductors, Phys. Rev. B 107, 174505 (2023).
- [24] D. Fazlizhanova, Inhomogeneous current distribution in superconductors, Master's thesis, Skolkovo Institute of Science and Technology, 2021.
- [25] Л.П. Горьков, Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга-Ландау в теории сверхпроводимости, ЖЭТФ, 36(6), 1918-1923 (1959).
- [26] J. Pearl, Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids, Appl. Phys. Lett. 5, 65 (1964).
- [27] M. Tinkham, Introduction to superconductivity (McGraw-Hill, New York, 1996).
- [28] D. E. McCumber and B. I. Halperin, Time Scale of Intrinsic Resistive Fluctuations in Thin Superconducting Wires, Phys. Rev. B 1, 1054 (1970).
- [29] J. S. Langer and V. Ambegaokar, "Intrinsic resistive transition in narrow superconducting channels", Phys. Rev. 164, 498 (1967).
- [30] А.А. Варламов и А.И. Ларкин, Теория флуктуаций в сверхпроводниках, М. : Добросвет : КДУ, 2007.
- [31] A. Cappellaro and L. Salasnich, Shift of the critical temperature in superconductors: a self-consistent approach, Sci. Rep. 10, 9088 (2020).

[32] M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, Universal Broadening of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Coherence Peak of Disordered Superconducting Films, Phys. Rev. Lett. 109, 147002 (2012).