
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

**ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ДИОДНЫЙ ЭФФЕКТ В
АСИММЕТРИЧНЫХ СКВИДАХ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ТОК-
ФАЗОВЫМ СООТНОШЕНИЕМ**

(магистерская диссертация)

Студент:

Селезнев Глеб Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Фоминов Яков Викторович,
д-р физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию джозефсоновского диодного эффекта в асимметричном СКВИДе, состоящем из контактов с нетривиальными (несинусоидальными) ток-фазовыми соотношениями.

В первой части работы мы анализируем влияние емкостей контактов и температурных флуктуаций на силу и характер проявления диодного эффекта в рамках резистивно-емкостной модели. Мы показываем, что наличие емкости приводит к асимметрии гистерезиса вольт-амперной характеристики СКВИДа, в частности, к возможности наблюдения эффекта одностороннего гистерезиса (только при одном направлении тока). Тепловые флуктуации, в свою очередь, вызывают появление конечного времени выхода системы из стационарного состояния и асимметрии токов переключения.

Вторая часть работы посвящена теоретическому объяснению особенностей диодного эффекта, наблюдаемого в эксперименте группы В. С. Столярова с асимметричным СКВИДом, содержащим сверхпроводящий наномостик с многозначной ток-фазовой характеристикой. Для этого случая мы предсказываем появление дополнительного механизма диодного эффекта, связанного с многозначностью ток-фазового соотношения наномостика. Мы показываем, что этот механизм приводит к появлению значительной асимметрии ступеней Шапиро, которая в данной системе наблюдается на фоне слабой асимметрии критических токов.

Содержание

Аннотация	2
Введение	5
1 Теоретическая модель	7
1.1 Асимметричный СКВИД	7
1.2 Резистивная и резистивно-емкостная модели	9
1.3 Происхождение ДДЭ в асимметричном СКВИДе	11
2 Джозефсоновский диодный эффект в резистивно-емкостной модели	13
2.1 Минимальная модель	13
2.2 ВАХ для минимальной модели	14
2.2.1 Асимметрия критических токов	15
2.2.2 Подавление диодного эффекта емкостью	16
2.2.3 Асимметрия токов возврата	17
2.2.4 Односторонний гистерезис	18
2.3 ДДЭ при воздействии микроволнового излучения	20
2.3.1 Асимметрия критических токов при $j_{ac} \neq 0$	20
2.3.2 Асимметрия резонансных частот при синхронизации с внешним сигналом	22
2.3.3 Асимметрия ступеней Шапиро в минимальной модели	23
2.4 Влияние тепловых флуктуаций на ДДЭ	25
2.4.1 Асимметрия времен вылета частицы	25
2.4.2 Связь времен вылета и асимметрий ВАХ	27
2.5 Управление состоянием джозефсоновского диода	30
3 Диодный эффект в СКВИДе со сверхпроводящим наномостиком	32
3.1 Асимметричный СКВИД с наномостиком	32
3.1.1 Джозефсоновские контакты	32
3.1.2 Эффективное ток-фазовое соотношение	34
3.2 Асимметрии ВАХ при наличии наномостика	36
3.2.1 Асимметрия критических токов	36
3.2.2 Измерение асимметрии ступеней Шапиро	40
3.2.3 Метод медленно меняющейся фазы для описания асимметрии ступеней Шапиро	42
3.2.4 Анализ асимметрии ступеней Шапиро в рамках одногармонического приближения	46
3.2.5 Особенности диодного эффекта при наличии наномостика	47
4 Заключение	49

A	Оценка индуктивности петли СКВИДа (приложение к разделу 3.1)	52
B	Температурная зависимость параметров перехода (приложение к разделу 3.2.1)	52
C	Сдвиг ступеней Шапиро (приложение к разделу 3.2.2)	53
D	Вычисление R_{\pm} в одногармоническом приближении (приложение к разделу 3.2.4)	54
E	Зависимость глубин ступеней Шапиро от мощности внешнего облучения (приложение к разделу 3.2.4)	55

Введение

Традиционно, диодом называется элемент электрической цепи, позволяющий току течь только в одном направлении. Его полупроводниковые реализации, основанные на р-п переходах, широко используются в различных приложениях, что делает их незаменимыми компонентами современной электроники [1]. В последнее время наблюдается стремительный рост интереса к сверхпроводящим диодам, обусловленный как фундаментальным вопросом реализации диодного эффекта в сверхпроводящих системах, так и потенциальными приложениями в сверхпроводящей электронике [2, 3].

Ключевой характеристикой сверхпроводящего диодного эффекта является асимметрия величины критического тока $I_{c+} \neq I_{c-}$ в зависимости от направления его протекания (здесь и далее “+” обозначает положительное, а “-” отрицательное направление тока). Большинство подходов, позволяющих достичь этой асимметрии, основаны на нарушении симметрии по обращению времени и симметрии инверсии в некоторой системе. Это может достигаться в материалах со спин-орбитальным взаимодействием при приложении к ним внешнего магнитного поля или, например, в топологических и нецентросимметричных материалах [4, 5, 6, 7, 8, 9].

Сверхпроводящий диодный эффект, в частности, можно наблюдать в системах, состоящих из джозефсоновских контактов. Такой диодный эффект принято называть джозефсоновским диодным эффектом (ДДЭ) [10, 11, 12, 13]. Простейшими системами для его наблюдения являются асимметричные сверхпроводящие интерферометры (СКВИДы), где сила и знак диодного эффекта контролируются значением магнитного потока через петлю интерферометра [14, 15]. Однако, необходимым условием для наблюдения ДДЭ в этом случае является наличие старших джозефсоновских гармоник (пропорциональных $\sin n\varphi$ с $n > 1$) в ток-фазовом соотношении (ТФС) асимметричного СКВИДа (при пренебрежении индуктивностью петли СКВИДа). Для получения старших гармоник можно использовать как чисто синусоидальные контакты, соединяя их в цепочки и массивы [16, 17], так и используя контакты с несинусоидальными ТФС [14, 15, 18, 19]. К последним, например, относятся сверхпроводящие наномостики, обладающие почти линейными, многозначными ТФС [20, 21, 22], сильно отличающимися их от привычных однозначных синусоидальных контактов. Несмотря на обширные исследования асимметричных СКВИДов, содержащих сверхпроводящие наномостики [23, 24, 25, 26], потенциал использования этих систем в качестве джозефсоновских диодов до сих пор не обсуждался в литературе.

Другим интересным направлением исследования сверхпроводящего диодного эффекта является изучение асимметрий, отличных от асимметрии критических токов. Хотя асимметрия критических токов и является наиболее ярким проявлением ДДЭ, другие части вольт-амперной характеристики (ВАХ) также демонстрируют асимметричное поведение. Так, например, при наличии зарядовых эффектов может наблюдаться асимметрия токов возврата [27, 28, 29]. В то же время при внешнем облучении системы на ВАХ появляются особенности, известные как ступеньки Шапиро, возникающие за счет синхронизации внутренних колебаний напряжения с внешним переменным сигналом [30, 31, 32]. Эти осо-

бенности также могут быть асимметричными, демонстрируя наличие ДДЭ [33, 34, 35, 36]. Хотя для наблюдения этих особенностей требуются специальные условия, такие как наличие емкости или внешнего переменного сигнала, они, в то же время, могут содержать информацию об особенностях рассматриваемой системы. Поэтому их асимметрии могут демонстрировать довольно сложное поведение, а их изучение может предоставить ценную информацию о свойствах исследуемой системы.

Стоит отметить, что несмотря на активное изучение диодного эффекта в последние время, многие вопросы все также остаются без ответа. Так, например, неясно, приводит ли наличие емкости к усилению диодного эффекта или же наоборот к его ослаблению. Непонятно также, какое влияние оказывают тепловые флуктуации на ДДЭ в асимметричных СКВИДах. Кроме того, недавний эксперимент по исследованию асимметрии ступеней Шапиро в асимметричном СКВИДе со сверхпроводящим наномостиком, выполненный в группе В. С. Столярова в МФТИ [37], выявил новые особенности диодного эффекта, не наблюдавшиеся ранее в схожих системах без сверхпроводящего наномостика [33, 34, 35, 36].

Таким образом, цель данной работы заключается в теоретическом исследовании различных механизмов ДДЭ в асимметричных СКВИДах, содержащих контакты с нетривиальными (несинусоидальными) ТФС, при наличии: (i) конечной емкости контактов и тепловых флуктуаций, (ii) контакта с многозначной ток-фазовой характеристикой. Работа построена следующим образом. В вводной главе 1 мы опишем общие свойства ДДЭ в асимметричном СКВИДе и приведем используемые в дальнейших частях работы основные уравнения. В главе 2 мы изучим влияние емкости и тепловых флуктуаций на силу и характер проявления ДДЭ. Эта часть является продолжением работы, начатой в бакалавриате [38], и основывается на результатах, приведенных в работе [39]. В главе 3 мы обсудим и приведем теоретическую модель, объясняющую особенности диодного эффекта в асимметричном СКВИДе, содержащем сверхпроводящий наномостик с многозначным ТФС. При этом наш рассказ будет основан на результатах совместной работы с экспериментаторами из группы В. С. Столярова в МФТИ [37]. Наконец, в главе 4 мы приведем основные выводы нашей работы. При этом некоторые вспомогательные материалы, не вошедшие в основную часть работы, представлены в приложении.

1 Теоретическая модель

В этой вводной главе мы опишем общие характеристики, присущие ДДЭ в асимметричном СКВИДе, и приведем основные уравнения, которые мы будем анализировать в дальнейших частях нашей работы. При этом наши рассуждения будут следовать работам [14, 39].

1.1 Асимметричный СКВИД

В нашей работе мы будем изучать ДДЭ в асимметричном СКВИДе, наиболее общий вид которого показан на рисунке 1. Будем считать, что в одном из его рукавов находится контакт с ТФС — $I_a(\varphi)$, а в другом рукаве контакт с другим ТФС — $I_b(\varphi)$. СКВИД будет рассматриваться под действием внешнего магнитного поля, создающего поток Φ через его петлю (при этом мы пренебрегаем индуктивностью петли СКВИДа, считая ее размеры достаточно малыми). Сверхпроводящий ток, текущий через всю систему $I_s =$

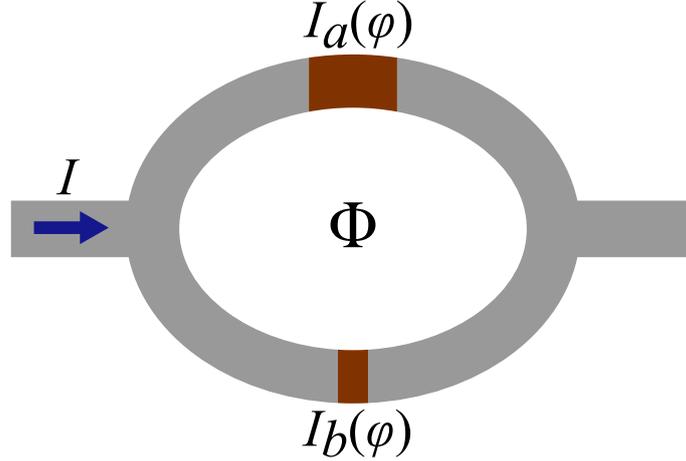


Рис. 1: Асимметричный СКВИД с двумя различными джозефсоновскими контактами в рукавах, имеющими разные ток-фазовые характеристики $I_a(\varphi)$ и $I_b(\varphi)$.

$I_a(\varphi_a) + I_b(\varphi_b)$. При этом, из-за наличия потока Φ , разности фаз на контактах а и б будут связаны соотношением

$$\varphi_a - \varphi_b = \phi, \quad \phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (1.1.1)$$

Определяя общий скачок фазы как $\varphi = (\varphi_a + \varphi_b)/2$ получаем

$$I_s(\varphi) = I_a(\varphi + \phi/2) + I_b(\varphi - \phi/2). \quad (1.1.2)$$

Полезно сразу отметить общие особенности, следующие из выражения (1.1.2) для ток-фазового соотношения СКВИДа. Во-первых, если оба контакта обладают синусоидальной ток-фазовой характеристикой, то ТФС всего СКВИДа тоже будет синусоидальным:

$$I_s(\varphi) = I_{a1} \sin(\varphi + \phi/2) + I_{b1} \sin(\varphi - \phi/2) = I_1(\phi) \sin(\varphi + \gamma), \quad (1.1.3)$$

где $I_1(\phi)$ и γ определяются из соотношений

$$\begin{cases} I_1(\phi) = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{b1}^2 + 2I_{a1}I_{b1} \cos \phi} \\ \tan \gamma = \frac{I_{a1} - I_{b1}}{I_{a1} + I_{b1}} \tan \frac{\phi}{2}. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

В этом случае джозефсоновского диодного эффекта не будет, так как γ будет просто определять общий сдвиг фазы и не приведет к изменению максимальных и минимальных значений токов, то есть $I_{c+} = I_{c-}$. Соответственно, как уже было упомянуто ранее, для наблюдения диодного эффекта необходимо, чтобы хотя бы один из контактов имел старшие гармоники в ТФС. Во-вторых, если оба контакта обладают одинаковыми ТФС: $I_a(\varphi) = I_b(\varphi)$, то диодного эффекта в системе также не будет, как видно из уравнения (1.1.2), которое в этом случае приводит к равенству $I_s(\varphi) = -I_s(-\varphi)$. Наконец, легко заметить, что при $\phi = \pi n$ с целым n диодного эффекта в системе также не будет.

Таким образом, можно сформулировать следующие необходимые условия для наблюдения ДДЭ в асимметричном СКВИДе без учета индуктивности петли интерферометра [14, 15]: (i) различие контактов в рукавах: $I_a(\varphi) \neq I_b(\varphi)$, (ii) наличие старших гармоник в ТФС: $I_s(\varphi) = \sum_{n=1} \sin n\varphi$ с $n > 1$, (iii) наличие нетривиального магнитного потока через петлю СКВИДа: $\phi \neq \pi n$. В этом случае ТФС перестает быть симметричным: $I_s(\varphi) \neq -I_s(-\varphi)$, а в системе возникает ДДЭ (к примеру, наблюдается асимметрия критических токов).

Отметим, что в общем случае $I_s(\varphi)$ зависит от свойств контактов в рукавах СКВИДа и может быть довольно сложной функцией фазы. В частности, она может содержать целый ряд ненулевых гармоник в ТФС. Кроме того, $I_s(\varphi)$ может быть как однозначной, так и многозначной функцией фазы [21, 22]. В последнем случае при одном значении фазы может наблюдаться сразу несколько значений сверхпроводящего тока, которые соответствуют различным веткам ТФС. Несмотря на то, что условия наблюдения диодного эффекта оказываются одинаковыми в обоих случаях (однозначных и многозначных ТФС), и диодный эффект в обоих случаях возникает за счет интерференции ТФС двух различных контактов, между ними имеется важное отличие. В случае контактов с однозначной ток-фазовой характеристикой, технически, диодный эффект возникает из конкуренции джозефсоновских гармоник с различными номерами, которые оказываются сдвинутыми относительно друг друга по фазе за счет наличия магнитного потока через петлю интерферометра. При этом вид ток-фазового соотношения не зависит от направления тока. Такой механизм диодного эффекта мы будем называть фазовым. В то же время в случае наличия контактов с многозначной ток-фазовой характеристикой, как будет показано в разделе 3.1.2, помимо фазового возникает еще дополнительный (амплитудный) механизм диодного эффекта, заключающийся в том, что сам вид ток-фазового соотношения начинает зависеть от направления тока (амплитуды джозефсоновских гармоник в ТФС зависят от направления тока).

1.2 Резистивная и резистивно-емкостная модели

В нашей работе мы будем рассматривать поведение СКВИДа, находящегося под воздействием постоянного тока амплитуды I_{dc} и переменного тока амплитуды I_{ac} с частотой Ω . В большинстве случаев мы будем считать температуру T контактов конечной. В этом случае система также подвергается воздействию тепловых флуктуаций тока – I_f .

Мы будем изучать проявления ДДЭ на вольт-амперной характеристике СКВИДа. Существуют две наиболее простые модели, в рамках которых можно вычислить ВАХ джозефсоновского контакта: резистивная (RSJ) и резистивно-емкостная модели (RCSJ) [31, 32], эффективные электрические схемы которых показаны на рисунке 2. В рамках

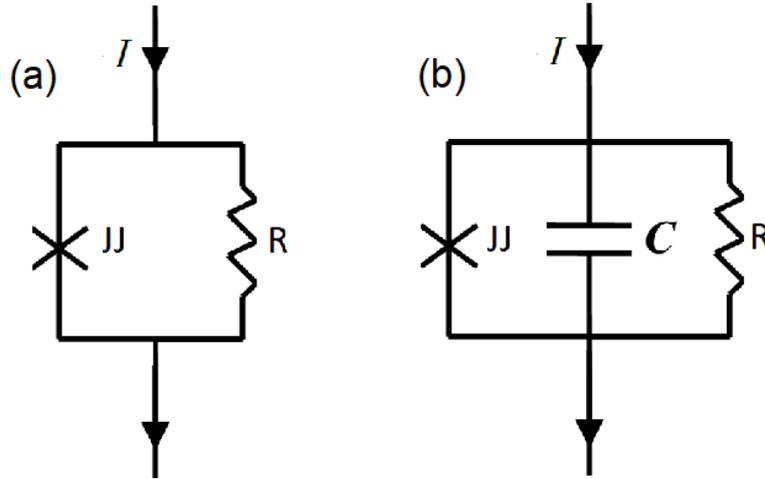


Рис. 2: Эффективные схемы джозефсоновского контакта в рамках (a) резистивной (RSJ) модели и (b) резистивно-емкостной (RCSJ) модели.

резистивной модели предполагается, что полный ток на контакте $I = I_{dc} + I_{ac} + I_f$ течет в двух независимых каналах: сверхпроводящем, характеризующимся ТФС $I_s(\varphi)$, и резистивном, характеризующимся сопротивлением R :

$$I_s(\varphi) + V/R = I, \quad (1.2.1)$$

где V — напряжение на контакте.

В рамках резистивно-емкостной модели учитывается также дополнительный емкостной канал, описываемый параллельно подключенным конденсатором с емкостью C :

$$I_s(\varphi) + V/R + C\dot{V} = I. \quad (1.2.2)$$

В обоих случаях напряжение на контакте связано с производной фазы по времени соотношением Джозефсона:

$$V = \frac{\hbar\dot{\varphi}}{2e}, \quad (1.2.3)$$

где e — заряд электрона, \hbar — приведенная постоянная Планка. При этом уравнение (1.2.1) является частным случаем уравнения (1.2.2) с $C = 0$.

В дальнейшем мы будем работать с уравнениями (1.2.1) и (1.2.2), записанными в безразмерных единицах. Обезразмеривание при этом можно провести несколькими способами. Первый, который мы будем называть β представлением, оказывается удобным для рассмотрения эффектов в нестационарном (резистивном или R) состоянии с ненулевым средним напряжением. В нем за единицу измерения времени берется период осцилляций напряжения в R состоянии. При этом в уравнении, описывающем динамику фазы, возникает параметр МакКамбера β :

$$\beta = (2e/\hbar)I_{\text{norm}}R^2C, \quad \tau = \omega_J t, \quad \omega_J = (2e/\hbar)I_{\text{norm}}R, \quad (1.2.4)$$

где ω_J — джозефсоновская частота, а I_{norm} — некая нормировочная амплитуда тока. Параметр МакКамбера определяет силу емкостных эффектов (чем он больше, тем они сильнее). Отметим, что случай $\beta = 0$ соответствует RSJ модели [уравнение (1.2.1)]. Уравнения (1.2.2) и (1.2.3) в этих единицах принимают следующий вид

$$\beta \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{d\varphi}{d\tau} + J_s(\varphi) = j_{\text{dc}} + j_{\text{ac}} \cos(\omega\tau + \delta) + \xi(\tau), \quad (1.2.5)$$

$$v = d\varphi/d\tau, \quad (1.2.6)$$

где $J_s(\varphi)$ — нормированный сверхпроводящий ток из уравнения (1.1.2), $j_{\text{dc/ac}} = I_{\text{dc/ac}}/I_{\text{norm}}$ — безразмерные постоянный и переменный токи, $v = V/I_{\text{norm}}R$ — безразмерное напряжение, $\omega = \Omega/\omega_J$ — безразмерная частота и δ — начальная фаза переменного тока. Тепловые флуктуации тока в уравнении (1.2.1) мы будем рассматривать как белый шум: $\langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle = 2\mathcal{T}\delta(\tau - \tau')$, где $\mathcal{T} = 2eT/\hbar I_{\text{norm}} = T/E_J$ — безразмерная температура системы, а $E_J = \hbar I_{\text{norm}}/2e$ — джозефсоновская энергия.

Другой способ обезразмеривания, который мы будем в дальнейшем называть ε представлением, оказывается удобным для описания свойств системы в сверхпроводящем (S) состоянии с нулевым средним напряжением. В этом случае за единицу измерения времени берется период осцилляций напряжения в S состоянии. При этом в уравнениях, описывающих динамику фазы, возникает другой параметр:

$$\varepsilon = 1/\sqrt{\beta}, \quad \tilde{\tau} = \omega_p t, \quad \omega_p = \sqrt{2eI_{\text{norm}}/\hbar C}, \quad (1.2.7)$$

где ω_p — плазменная частота, а ε играет роль коэффициента трения в системе. При этом уравнения (1.2.2) и (1.2.3) принимают следующий вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\tilde{\tau}^2} + \varepsilon \frac{d\varphi}{d\tilde{\tau}} + J(\varphi) = j_{\text{dc}} + j_{\text{ac}} \cos(\tilde{\omega}\tilde{\tau} + \delta) + \xi(\tilde{\tau}), \quad (1.2.8)$$

$$v = \varepsilon d\varphi/d\tilde{\tau}, \quad (1.2.9)$$

где $\tilde{\omega} = \Omega/\omega_p$, а коррелятор шумов: $\langle \xi(\tilde{\tau})\xi(\tilde{\tau}') \rangle = 2\theta\varepsilon\delta(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}')$. В этом представлении RSJ

модели соответствует предел $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Уравнения (1.2.5) и (1.2.6) вместе с выражением для ток-фазовой характеристики СКВИДа (1.1.2) (или соответственно уравнения (1.2.8), (1.2.9) и (1.1.2)) полностью определяют ВАХ системы, которая в безразмерных единицах задается как $\langle \bar{v}(j_{dc}) \rangle$, где $\overline{\dots}$ подразумевает усреднение по времени, а $\langle \dots \rangle$ усреднение по тепловым флуктуациям.

Главное отличие между ВАХами, полученными в рамках RSJ и RCSJ моделей, заключается в наличии или отсутствии гистерезиса ВАХ. Так, в резистивной модели ВАХ получается безгистерезисной (из-за отсутствия емкостных эффектов), то есть не зависящей от истории изменения постоянного тока, подаваемого на контакт. Напротив, в резистивно-емкостной модели емкостные эффекты могут привести к возникновению гистерезиса ВАХ. Для иллюстрации рассмотрим обычный синусоидальный контакт: $I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi$ при $I_{ac} = 0$ и $T = 0$. В этом случае, при изменении тока от 0 до критического тока I_c , система находится в S состоянии с $\bar{V} = 0$. При дальнейшем увеличении тока, когда $I_{dc} > I_c$, система скачком переходит в R состояние с $\bar{V} \neq 0$. При уменьшении тока система возвращается обратно в S состояние лишь при токе возврата $I_r \leq I_c$. Таким образом, при токах $I_r < I_{dc} < I_c$ одновременно существуют две ветки ВАХ (S и R состояния), в то время как в RSJ модели всегда наблюдается только одна ветка ВАХ (либо S, либо R состояние).

Стоит отметить, что ДДЭ в рамках RSJ модели (при $\beta = 0$) был изучен ранее в работах [14, 15]. В частности, было продемонстрировано, что в этом случае ВАХ становится асимметричной. В то же время, как уже было упомянуто ранее, одной из целей данной работы является изучение особенностей ДДЭ при $\beta \neq 0$.

1.3 Происхождение ДДЭ в асимметричном СКВИДе

Для того чтобы качественно объяснить причину возникновения ДДЭ в нашей системе мы воспользуемся механической аналогией [31, 32]. Она будет также полезна нам в дальнейшем для качественного понимания процессов, происходящих в системе. Если пренебречь переменным током и тепловыми флуктуациями в уравнении (1.2.5), то оно примет вид уравнения Ньютона, описывающего движение частицы с массой β в среде с трением в потенциале “стиральной доски”, такого что: $-dU(\varphi)/d\varphi = j_{dc} - I_s(\varphi)$. Форма этого потенциала зависит от направления постоянного тока (то есть от знака j_{dc}), что проиллюстрировано на рисунке 3. Формально, это возникает из-за того, что ТФС перестает быть нечетной функцией фазы: $I_s(\varphi) \neq -I_s(-\varphi)$. В результате частица, двигаясь в разных направлениях движения (что соответствует разным направлениям постоянного тока), эффективно движется в двух различных потенциалах. Это приводит к тому, что характеристики движения частицы (например, ее средняя скорость \bar{v}) зависят от направления движения (тока), и поэтому в системе наблюдается диодный эффект.

Полезно отметить, какие характеристики потенциала могут войти в ответы для наблюдаемых и, соответственно, определяют силу диодного эффекта в системе. При наличии только одного минимума на период (по φ) у потенциала $U(\varphi)$ это: частоты осцилляций вблизи минимумов потенциала $\omega_{A\pm}$, кривизны (мнимые частоты) барьеров $\omega_{B\pm}$ и высо-

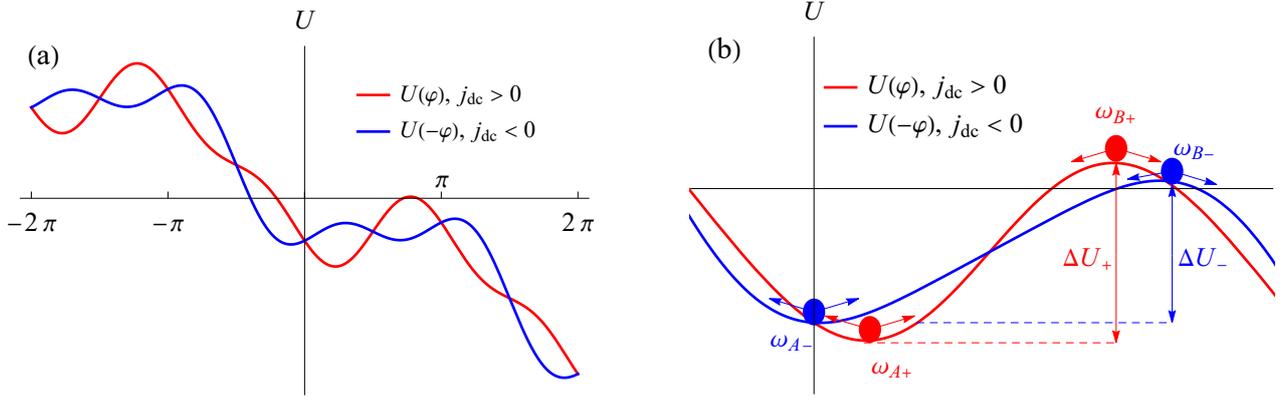


Рис. 3: (a) Потенциал стиральной доски $U(\varphi)$ для минимальной модели [смотри уравнение (2.1.2)] для $A = 1$, $\tilde{\phi} = \pi/2$ и $j_{dc} = \pm 0.5$. Форма потенциала, в частности количество максимумов и минимумов, зависит от направления тока. (b) Асимметрия характеристик потенциала $U(\varphi)$: частоты осцилляций возле дна потенциальной ямы $\omega_{A\pm}$, кривизны барьера $\omega_{B\pm}$, и высоты потенциального барьера ΔU_{\pm} .

ты потенциальных барьеров ΔU_{\pm} . Знак “ \pm ” в нижних индексах указывает на ветвь ВАХ (плюс для $j_{dc} > 0$ и минус для $j_{dc} < 0$). При этом мы будем измерять частоты в единицах плазменной частоты ω_p , а высоты потенциальных барьеров в джозефсоновских энергиях E_J . Асимметрии $\omega_{A\pm}$ и ΔU_{\pm} в зависимости от абсолютного значения постоянного тока показаны на рисунке 4.

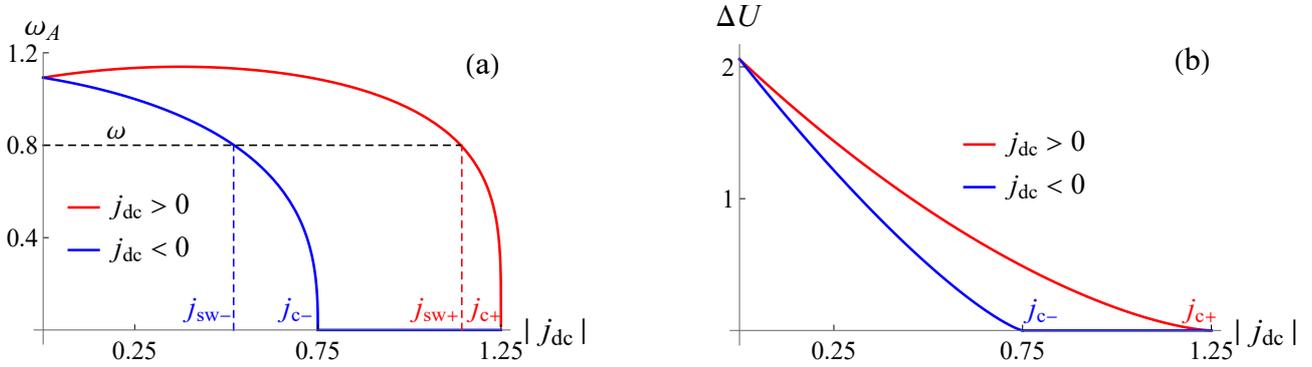


Рис. 4: (a) Асимметрия частот колебаний $\omega_{A\pm}$ и соответствующих токов переключения $j_{sw\pm}$, возникающих в результате синхронизации внутренних колебаний с внешним сигналом в S состоянии (смотри раздел 2.3.2), в рамках минимальной модели при $A = 0.25$ и $\tilde{\phi} = \pi/2$. (b) Асимметрия высот потенциальных барьеров ΔU_{\pm} в минимальной модели при $A = 0.25$ и $\tilde{\phi} = \pi/2$. Эта асимметрия ответственна за появление экспоненциально сильной асимметрии ВАХ в пределе низких температур.

2 Джозефсоновский диодный эффект в резистивно-емкостной модели

2.1 Минимальная модель

В предыдущей главе мы выписали общие уравнения, определяющие динамику фазы, и описали свойства диодного эффекта в асимметричном СКВИДе для произвольной ток-фазовой характеристики $I_s(\varphi)$. Теперь перейдем к описанию влияния емкости и тепловых флуктуаций на ДДЭ в асимметричном СКВИДе. Мы будем интересоваться новыми проявлениями диодного эффекта, которые возникают при ненулевых значениях этих величин, а также постараемся ответить на вопрос, каким образом они влияют на силу диодного эффекта. Для того чтобы это сделать нам придется конкретизировать модель и наложить дополнительные условия на $I_s(\varphi)$ [или, равносильно, на потенциал $U(\varphi)$]. В этой главе мы предположим, что: (i) $I_s(\varphi)$ является однозначной функцией фазы, (ii) $U(\varphi)$ имеет лишь один минимум на период. Этих условий окажется достаточно, чтобы получить часть ответов, описывающих асимметрии ВАХ, в общем виде. При этом, как мы увидим далее, они будут выражаться через $\omega_{A\pm}$, $\omega_{B\pm}$ и ΔU_{\pm} . В то же время, в качестве частного случая, мы будем рассматривать так называемую “минимальную модель”. Это простейшая модель асимметричного СКВИДа, которая удовлетворяет всем необходимым условиям, перечисленным ранее в разделе 1.1, и, соответственно, в которой возможно наблюдение диодного эффекта. В ней предполагается, что один из контактов обладает синусоидальным ТФС, а другой контакт имеет также дополнительную вторую гармонику в ТФС:

$$\begin{cases} I_a(\varphi) = I_{a1} \sin \varphi \\ I_b(\varphi) = I_{b1} \sin \varphi + I_{b2} \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Подставляя эти ТФС в (1.1.2) и, выбирая в качестве нормировочного тока амплитуду первой гармоники $I_{\text{norm}} = I_1$ [заданную формулой (1.1.4)], мы получаем

$$J_s(\varphi) = \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}), \quad (2.1.2)$$

где A и $\tilde{\phi}$ играют роль безразмерных амплитуды и фазы второй гармоники и даются следующими выражениями

$$A = \frac{I_{b2}}{I_1(\phi)} \quad B = \phi + 2\gamma(\phi). \quad (2.1.3)$$

При этом оказывается, что диодный эффект наблюдается в системе при $A \sin \tilde{\phi} \neq 0$. Как мы увидим в дальнейшем, эта комбинация является типичной для ответов, описывающих ДДЭ в пределе $A \ll 1$. Кроме того отметим, что значение A определяет число минимумов на период: при $A < 1/4$ потенциал имеет лишь один минимум на период, тогда как при $A > 1/4$ еще один дополнительный минимум появляется при определенных

значениях j_{dc} .

В дальнейшем нам пригодятся выражения для $\omega_{A\pm}$, $\omega_{B\pm}$ и ΔU_{\pm} . В случае минимальной модели они могут быть вычислены явно при $A \ll 1$:

$$\omega_{A\pm}^2 = \sqrt{1 - j_{dc}^2} \left(1 \pm A|j_{dc}| \frac{3 - 2j_{dc}^2}{1 - j_{dc}^2} \sin \tilde{\phi} \right) + 2A(1 - j_{dc}^2) \cos \tilde{\phi}, \quad (2.1.4)$$

$$\omega_{B\pm}^2 = \sqrt{1 - j_{dc}^2} \left(1 \pm A|j_{dc}| \frac{3 - 2j_{dc}^2}{1 - j_{dc}^2} \sin \tilde{\phi} \right) - 2A(1 - j_{dc}^2) \cos \tilde{\phi}, \quad (2.1.5)$$

$$\Delta U_{\pm} = 2j_{dc} \arcsin j_{dc} - \pi|j_{dc}| + 2\sqrt{1 - j_{dc}^2} \left(1 \pm A|j_{dc}| \sin \tilde{\phi} \right). \quad (2.1.6)$$

Отметим, что уравнения (2.1.4)-(2.1.6) применимы при токах меньше критических $|j_{dc}| < 1$ и $A \ll 1 - j_{dc}^2$.

Эти же величины также могут быть найдены в “точке максимальной асимметрии” $\tilde{\phi} = \pi/2$ (где $\sin \tilde{\phi} = 1$) без разложения по малой амплитуде второй гармоники:

$$\omega_{A\pm}^2 = \omega_{B\pm}^2 = \sqrt{4A(A - j_{dc}) + \sqrt{8A(A + j_{dc}) + 1} - 1} \times \left(\sqrt{8A(A + j_{dc}) + 1} \right) / 2\sqrt{2}A, \quad (2.1.7)$$

$$\Delta U_{\pm} = \sqrt{4A(A - j_{dc}) + \sqrt{8A(A + j_{dc}) + 1} - 1} \times \left(\sqrt{8A(A + j_{dc}) + 1} + 3 \right) / 4\sqrt{2}A - \pi|j_{dc}| + 2j_{dc} \arcsin \left(\frac{\sqrt{8A(A + j_{dc}) + 1} - 1}{4A} \right). \quad (2.1.8)$$

При этом вблизи критических токов ($\Delta j = j_{c\pm} - |j_{dc}| \ll j_{c\pm}$), они имеют следующие асимптотики

$$\Delta U_{\pm} = u_{c\pm}(\Delta j)^{3/2}, \quad u_{c\pm} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{1 \pm 4A}}, \quad (2.1.9)$$

$$\omega_{A\pm} = \omega_{B\pm} = \omega_{c\pm}(\Delta j)^{1/4}, \quad \omega_{c\pm} = 2(1 \pm 4A)^{1/4}. \quad (2.1.10)$$

2.2 ВАХ для минимальной модели

Мы изучим асимметрии (проявления ДДЭ) на различных участках ВАХ. Для начала мы положим $T = 0$ и $j_{ac} = 0$. В этом случае в β представлении уравнение (1.2.5) примет вид

$$\beta\ddot{\phi} + \dot{\phi} + \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}) = j_{dc}. \quad (2.2.1)$$

В то же время, в ε представлении:

$$\ddot{\phi} + \varepsilon\dot{\phi} + \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}) = j_{dc}. \quad (2.2.2)$$

В каждом из случаев подразумевается взятие производной по соответствующему безразмерному времени (τ и $\tilde{\tau}$ в β и ε представлениях, соответственно). Численные расчеты ВАХ при разных значениях β приведены на рисунке 5. На нем можно отметить следую-

щие характерные особенности: (i) асимметрия критических токов $j_{c\pm}$, (ii) подавление ДДЭ в R состоянии с ростом β , (iii) асимметрия токов возврата $j_{r\pm}$. В следующих разделах мы подробнее обсудим каждое упомянутое выше проявление ДДЭ.

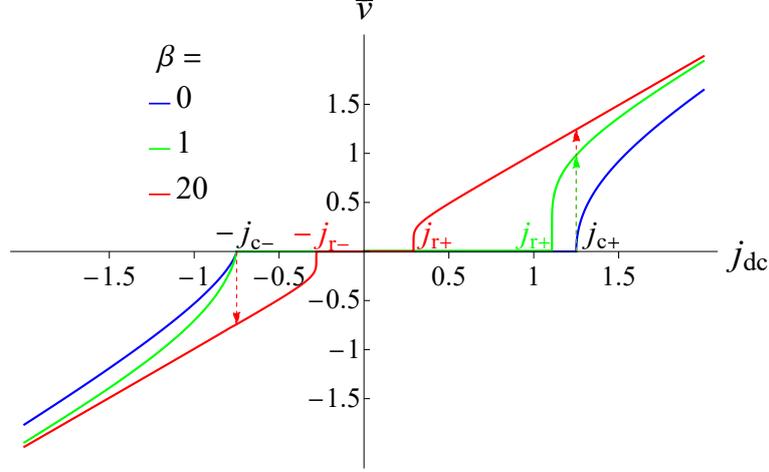


Рис. 5: Асимметричная ВАХ при $A = 0.25$, $\tilde{\phi} = \pi/2$ и различных значениях параметра МакКамбера β . Стрелками обозначаются переключения из S состояния в R состояние, происходящие при критических токах $j_{c\pm}$. С ростом емкости диодный эффект в R состоянии уменьшается, ВАХ становится более симметричной, и ДДЭ ослабевает.

2.2.1 Асимметрия критических токов

Асимметрия критических токов $j_{c+} \neq j_{c-}$ не зависит от значения параметра МакКамбера и присутствует даже при $\beta = 0$. Эта асимметрия была подробно изучена ранее в работах [14, 15]. Кратко просуммируем основные результаты. В минимальной модели эффективность диодного эффекта

$$\eta = \frac{|j_{c+} - j_{c-}|}{j_{c+} + j_{c-}} \quad (2.2.3)$$

достигает своего максимального значения $\eta = 1/3$ при $A = 0.5$ и $\tilde{\phi} = \pi/2$. В этом случае амплитуды критических токов отличаются в два раза: $j_{c+} = 1.5$ и $j_{c-} = 0.75$. То есть для максимальной силы диодного эффекта необходимо, чтобы амплитуды первой и второй гармоник СКВИДа были сравнимы между собой.

В пределе малой амплитуды второй гармоники $A \ll 1$ критические токи определяются следующим выражением

$$j_{c\pm} = 1 \pm A \sin \tilde{\phi}, \quad (2.2.4)$$

где асимметрия появляется за счет знака \pm перед слагаемым $A \sin \tilde{\phi}$.

Критические токи также могут быть получены явно при $\tilde{\phi} = \pi/2$, не предполагая

малой амплитуду второй гармоники:

$$j_{c+} = 1 + A, \quad j_{c-} = \begin{cases} 1 - A, & A < 1/4 \\ A + 1/8A, & A > 1/4. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Отметим, что смена режимов в уравнении (2.2.5) происходит при $A = 1/4$, когда у потенциала $U(\varphi)$ может появиться дополнительный минимум на период.

2.2.2 Подавление диодного эффекта емкостью

Одним из проявлений влияния емкости на диодный эффект является подавление его силы в R состоянии с ростом емкости, что продемонстрировано на рисунке 5. Чем больше становится β , тем симметричнее становится R ветка ВАХ. Ранее (в бакалаврском дипломе) нами уже был изучен этот эффект аналитически с помощью гармонической теории возмущений вблизи закона Ома [38]. Для полноты изложения мы кратко объясним основную идею этого метода и приведем основные результаты.

В общем случае решение $\varphi(t)$ может быть представлено в следующем виде

$$\varphi(\tau) = \bar{v}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\bar{v}\tau + b_n \sin n\bar{v}\tau), \quad (2.2.6)$$

где мы учли, что линейно растущее со временем слагаемое имеет наклон, в точности равный среднему напряжению \bar{v} . Остальная часть колеблется с частотами, кратными \bar{v} . Еще раз подчеркнем, что соотношение (2.2.6) является точным (в отсутствии тепловых флуктуаций) и использует лишь тот факт, что напряжение периодически колеблется во времени вокруг своего среднего значения \bar{v} . В то же время, чтобы найти коэффициенты a_n и b_n в уравнении (2.2.6), нужно решить сложную систему уравнений, что в общем случае можно сделать только численно. Однако в отдельных случаях это удается сделать аналитически в рамках теории возмущений:

$$\varphi(\tau) = j_{dc}\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}, \quad \bar{v} = j_{dc} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}^{(k)}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n^{(k)}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_n^{(k)},$$

где $\varphi^{(k)}$, $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ и $\bar{v}^{(k)}$ — поправки к фазе, амплитуде n -й гармоники и среднее напряжение в k -м порядке теории возмущений.

С помощью описанной выше гармонической теории возмущений можно найти ВАХ в двух предельных случаях: малых и больших емкостей. В пределе малых емкостей, когда $j_{dc} \gg 1$ и $\beta j_{dc} \ll 1$, ВАХ принимает следующий вид

$$\bar{v} = j_{dc} - (1 + A^2)/2j_{dc} - 3A \sin(\tilde{\phi})/4j_{dc}^2. \quad (2.2.7)$$

В пределе больших емкостей, когда $\beta j_{\text{dc}}^2 \gg 1$ и $\beta j_{\text{dc}} \gg 1$:

$$\bar{v} = j_{\text{dc}} - \frac{4 + A^2}{8\beta^2 j_{\text{dc}}^3} + \frac{16 + A^2 + 24A\beta \cos \tilde{\phi}}{32\beta^4 j_{\text{dc}}^5} - \frac{15A \sin \tilde{\phi}}{16\beta^4 j_{\text{dc}}^6}. \quad (2.2.8)$$

В обоих случаях последнее по счету слагаемое приводит к тому, что ВАХ перестает быть нечетной функцией: $\bar{v}(j_{\text{dc}}) \neq -\bar{v}(-j_{\text{dc}})$, то есть приводит к появлению диодного эффекта. Однако, как видно из уравнений (2.2.7) и (2.2.8), в пределе больших емкостей асимметричная поправка, приводящая к диодному эффекту, лежит в более высоком порядке теории возмущений, чем в пределе малых емкостей. Это аналитически иллюстрирует подавление диодного эффекта емкостью, наблюдаемое нами ранее численно на рисунке 5.

2.2.3 Асимметрия токов возврата

В двух предыдущих разделах мы изучили асимметрии, которые либо вообще не зависят от емкости (асимметрия критических токов), либо же, наоборот, подавляются емкостью (асимметрия R ветки ВАХ). Теперь мы изучим асимметрию, которая, напротив, наблюдается только при $\beta \neq 0$ — асимметрия токов возврата $j_{r+} \neq j_{r-}$. Аналитически ее удастся изучить в пределе малых коэффициентов трения $\varepsilon \ll 1$ (в этом случае ε представление оказывается более удобным для анализа) и малой амплитуды второй гармоники $A \ll 1$. В этом случае нам будет удобно ввести энергию системы E и переписать уравнение (1.2.8) в следующем виде

$$E[\varphi(t)] = E_0 - \varepsilon \int_{\varphi_{\text{in}}}^{\varphi} \dot{\varphi} d\varphi, \quad E_0 = \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi) \right) \Big|_{\varphi_{\text{in}}}, \quad (2.2.9)$$

где E_0 и φ_{in} — начальная энергия и фаза, соответственно. Последний член в уравнении (2.2.9) определяет потери энергии системы. Он оказывается параметрически мал в пределе $\varepsilon \ll 1$. При этом $j_{r\pm}$ также оказывается малым, как будет видно из уравнения (2.2.10).

Для нахождения $j_{r\pm}$ мы используем теорию возмущений по малому коэффициенту трения $\varepsilon \ll 1$ [40]. Ток возврата соответствует траектории-сепаратрисе $\varphi(t)$, которая соединяет два соседних максимума потенциала (φ_{max} и $\varphi_{\text{max}} \pm 2\pi$), задается нулевой начальной скоростью и в конечном состоянии имеет ту же энергию, что и в начальном (то есть потери энергии за один период колебаний равны 0):

$$j_{r\pm} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\varphi_{\text{max}}}^{\varphi_{\text{max}} \pm 2\pi} \dot{\varphi} d\varphi. \quad (2.2.10)$$

Теория возмущений строится итеративно и подразумевает последовательное выполнение следующих шагов (описанных нами ранее в бакалаврском дипломе [38]). Сначала мы определяем положения максимумов потенциала φ_{max} и соответствующие им начальные энергии E_0 . Затем выражаем $\dot{\varphi}$ из уравнения (2.2.9), в котором заменяем $\dot{\varphi}$ в члене с трением на его значение, полученное на предыдущем шаге итеративного процесса. Наконец, мы подставляем полученное выражение для $\dot{\varphi}$ в уравнение (2.2.10) и получаем $j_{r\pm}$. В результате

выражение для токов возврата принимает следующий вид

$$j_{r\pm} = \frac{4\varepsilon}{\pi} \left(1 - \frac{A \cos \tilde{\phi}}{3} \pm \frac{(\pi^2 - 6) \varepsilon A \sin \tilde{\phi}}{3\pi} \right). \quad (2.2.11)$$

Первый член в уравнении (2.2.11) воспроизводит известный результат для тока возврата в пределе большой емкости (малого трения) при $A = 0$ [31, 32, 40]. В то же время последнее слагаемое в уравнении (2.2.11) определяет асимметричную поправку к току возврата и приводит к диодному эффекту.

Для описания асимметрии токов возврата в общем случае (при произвольных ε и A) мы провели численные расчеты. Результаты показаны на рисунках 6 и 7.

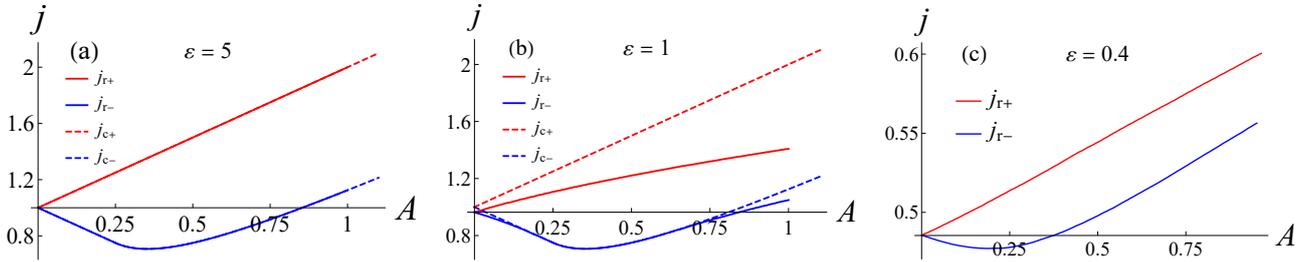


Рис. 6: Зависимость токов возврата $j_{r\pm}$ от амплитуды второй гармоники A при $\tilde{\phi} = \pi/2$ и различных значениях коэффициента трения $\varepsilon = 1/\sqrt{\beta}$. Пунктирные линии показывают зависимость $j_{c\pm}(A)$. (a) Токи возврата $j_{r\pm}(A)$ при $\varepsilon = 5$. В этом случае для обоих направлений тока в выбранном диапазоне A ВАХ безгистерезисная и $j_{r\pm} = j_{c\pm}$. (b) Токи возврата $j_{r\pm}(A)$ при $\varepsilon = 1$. В этом случае для положительного направления тока ВАХ всегда гистерезисная. При этом ВАХ для отрицательного направления тока может быть как гистерезисной, так и безгистерезисной в зависимости от значения A . В диапазоне $A \approx (0.25, 0.75)$ пунктирная синяя линия совпадает с синей линией, что указывает на безгистерезисную ВАХ. За пределами этого диапазона линии не совпадают, что означает, что ВАХ гистерезисная. (c) Токи возврата $j_{r\pm}(A)$ при $\varepsilon = 0.4$. В этом случае для обоих направлений тока ВАХ гистерезисная и $j_{r\pm} < j_{c\pm}$. Пунктирные линии находятся за пределами указанного диапазона.

Асимметрия токов возврата зависит как от A , так и от ε , как мы и ожидали. В случае сильного трения ($\varepsilon \gg 1$) токи возврата совпадают с критическими токами. Напротив, в пределе слабого трения ($\varepsilon \ll 1$) токи возврата сами по себе малы: $j_{r\pm} \ll j_{c\pm}$. В то же время асимметрия их значений слабая [смотри уравнение (2.2.11)]. Таким образом, наиболее интересным случаем является режим промежуточной силы трения ($\varepsilon \sim 1$), в котором токи возврата отличаются от критических (по крайней мере в одном направлении тока), а их асимметрия все еще сильная.

2.2.4 Односторонний гистерезис

Известно, что в RCSJ модели с синусоидальным ток-фазовым соотношением ВАХ становится гистерезисной ($j_r \neq j_c$) только если коэффициент трения меньше критического значения: $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \approx 1.18$ [32, 41, 42]. В минимальной модели это критическое значение зависит от направления тока: $\varepsilon_{cr+} \neq \varepsilon_{cr-}$. Это означает, что в диапазоне $\max(\varepsilon_{cr+}, \varepsilon_{cr-}) >$

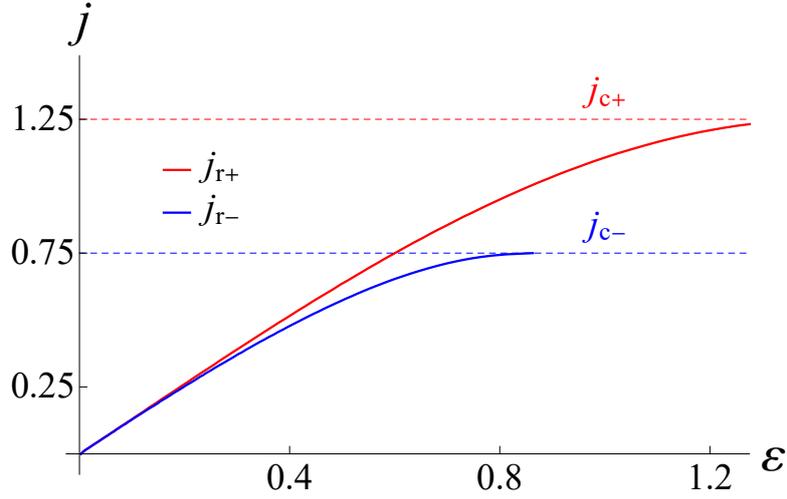


Рис. 7: Асимметрия токов возврата $j_{r\pm}$ при $\tilde{\phi} = \pi/2$ и $A = 0, 25$ для произвольных значений коэффициента трения $\varepsilon = 1/\sqrt{\beta}$. Пунктирные линии показывают значения критических токов $j_{c\pm}$. ВАХ для каждого направления тока меняет свое поведение с гистерезисного (при малых ε) на безгистерезисное (при больших ε), когда толстая линия пересекает пунктирную линию того же цвета. Точки пересечения различны для разных направлений тока.

$\varepsilon > \min(\varepsilon_{cr+}, \varepsilon_{cr-})$ гистерезис ВАХ существует только в одном направлении тока, тогда как в противоположном направлении ВАХ безгистерезисная. Такое поведение ВАХ (с гистерезисной ВАХ только при одном направлении тока) мы назвали “односторонним гистерезисом”. Его проявление можно увидеть на рисунках 5 и 6. На рисунке 5 зеленая кривая имеет нетривиальное значение тока возврата $j_{r+} \neq j_{c+}$ в положительном направлении тока и тривиальное значение в отрицательном направлении $j_{r-} = j_{c-}$. На рисунке 6(b) показан переход от гистерезисного поведения для обоих направлений тока к режиму одностороннего гистерезиса и обратно с ростом A .

Чтобы более подробно исследовать односторонний гистерезис, мы численно вычислили зависимость $\varepsilon_{cr\pm}(A)$. Результаты, представленные на рисунке 8, показывают, что в нашей системе можно наблюдать односторонний гистерезис в широком диапазоне ε (или β , соответственно).

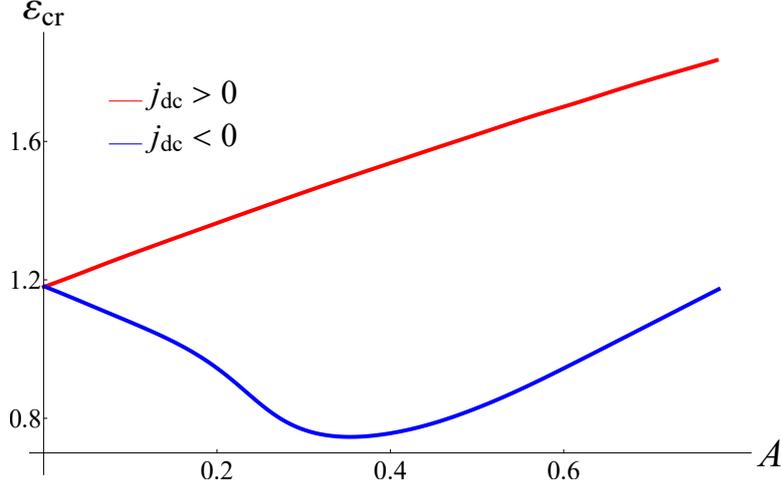


Рис. 8: Асимметрия критических значений коэффициента трения $\varepsilon_{cr} = 1/\sqrt{\beta_{cr}}$, определяющего границы между гистерезисной ($j_r \neq j_c$) и безгистерезисной ($j_r = j_c$) ВАХ, от A для различных направлений тока при $\tilde{\phi} = \pi/2$. Область между красной и синей кривой соответствует одностороннему гистерезису, когда гистерезис ВАХ присутствует только для положительного направления тока.

2.3 ДДЭ при воздействии микроволнового излучения

В предыдущем разделе мы изучали ДДЭ в случае отсутствия внешнего переменного тока амплитуды j_{ac} . Теперь мы его добавим и исследуем, каким образом он влияет на характер проявления ДДЭ. Для простоты везде в этой главе (кроме раздела 2.3.2) мы по-прежнему будем предполагать предел нулевых температур, когда $\xi = 0$. Уравнение, определяющее динамику фазы, в β представлении для этого случая принимает следующий вид

$$\beta\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}) = j_{dc} + j_{ac} \cos(\omega\tau + \delta). \quad (2.3.1)$$

2.3.1 Асимметрия критических токов при $j_{ac} \neq 0$

Сначала мы изучим, каким образом внешний переменный ток влияет на асимметрию критических токов. Аналитические результаты удастся получить в двух предельных случаях: квазистационарном и “бесселевом” режиме.

При $\omega \ll \omega_{A\pm}(j_{dc})/\sqrt{\beta}$ и $\omega \ll 1$ период колебаний вблизи дна потенциальной ямы и время релаксации системы намного меньше периода переменного сигнала. Это означает, что переменный ток изменяется очень медленно и в таком квазистационарном режиме играет роль лишь медленно меняющейся добавки к постоянному току [32, 43]. Таким образом, критические токи при наличии внешнего облучения $j_{mwc\pm}$ определяются простым выражением

$$j_{mwc\pm} = j_{c\pm} - j_{ac}. \quad (2.3.2)$$

При этом эффективность диодного эффекта (при наличии переменного сигнала) определяется выражением

$$\eta_{mw} = \frac{|j_{mwc+} - j_{mwc-}|}{j_{mwc+} + j_{mwc-}} = \frac{|j_{c+} - j_{c-}|}{j_{c+} + j_{c-} - 2j_{ac}}. \quad (2.3.3)$$

Как видно из уравнения (2.3.3), эффективность ДДЭ может быть увеличена внешним микроволновым облучением [43]. При этом она достигает максимально возможного значения $\eta_{\text{mw}} = 1$ при $j_{\text{ac}} = \min(j_{c+}, j_{c-})$ в квазистационарном режиме.

В случае неквазистационарной динамики для получения аналитических результатов мы предположим, что $J(\varphi) \ll j_{\text{ac}}$, и применим теорию возмущений относительно этой малости:

$$\varphi(\tau) = \varphi^{(0)}(\tau) + \varphi^{(1)}(\tau) + \dots \quad (2.3.4)$$

При этом, так как мы рассматриваем S состояние с $\bar{v} = 0$, φ не имеет линейно растущего со временем слагаемого.

В нулевом порядке теории возмущений сверхпроводящий ток и соответствующий ему постоянный ток в состоянии S малы, а фазовая динамика определяется только внешним переменным током:

$$\begin{aligned} \beta \ddot{\varphi}^{(0)} + \dot{\varphi}^{(0)} &= j_{\text{ac}} \cos(\omega\tau + \delta), \\ \varphi^{(0)}(\tau) &= \phi_0 + a \sin(\omega\tau + \tilde{\delta}), \\ a &= \frac{j_{\text{ac}}}{\omega \sqrt{(\beta\omega)^2 + 1}}, \quad \tilde{\delta} = \delta + \arctan \beta\omega, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где ϕ_0 — это (произвольная) начальная фаза.

Подставляя $\varphi^{(0)}(\tau)$ из уравнения (2.3.5) в выражение для сверхпроводящего тока (2.3.1), в первом порядке теории возмущений мы получаем

$$\begin{aligned} \beta \ddot{\varphi}^{(1)} + \dot{\varphi}^{(1)} + J(\tau) &= j_{\text{dc}}, \\ J(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n [J_n(a) \sin(\phi_0 - n\omega\tau - n\tilde{\delta}) \\ &+ AJ_n(2a) \sin(2\phi_0 - n\omega\tau - n\tilde{\delta} - \tilde{\phi})], \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

где J_n — функции Бесселя первого рода.

Осциллирующие слагаемые в уравнении (2.3.6) задают осциллирующие поправки к фазе, тогда как постоянная поправка [усредненный по времени ток $\bar{J}(\tau)$] соответствует постоянному току в S состоянии: $j_{\text{dc}} = \bar{J}(\tau)$. Это значение зависит от фазы ϕ_0 , и поэтому критические токи задаются как

$$j_{\text{mw}c\pm} = \left| \max_{\phi_0}(\min) [J_0(a) \sin \phi_0 + AJ_0(2a) \sin(2\phi_0 - \tilde{\phi})] \right|. \quad (2.3.8)$$

Как мы видим, уравнение (2.3.8) воспроизводит выражение для критических токов в рамках минимальной модели, но с перенормированными амплитудами первой и второй джозефсоновских гармоник, которые в данном режиме умножаются на соответствующие функции Бесселя. Уравнение (2.3.8) применимо, если $J_n(a)$ и $J_n(a)/\omega$ малы, что верно, например, в пределе больших частот $\omega \gg 1$.

Отметим, что несмотря на подавление абсолютных значений критических токов переменным током, эффективность диодного эффекта η_{mw} (как и в минимальной модели) определяется только соотношением между (перенормированными) амплитудами первой и второй гармоник. Так, она по-прежнему может достигать максимально возможного значения $\eta_{\text{mw}} = 1/3$ для минимальной модели при $\tilde{\phi} = \pi/2$ и выполнении условия $AJ_0(2a) = J_0(a)/2$.

2.3.2 Асимметрия резонансных частот при синхронизации с внешним сигналом

Переменный сигнал может синхронизоваться с внутренними колебаниями системы в S состоянии, что происходит при $\tilde{\omega} \simeq \omega_{A\pm}(j_{\text{dc}})$ (условие резонанса). В этом разделе мы изучим, как проявляет себя ДДЭ в этом случае.

Мы рассмотрим режим, когда частица находится вблизи дна потенциальной ямы при температуре $T \neq 0$. При этом мы будем считать, что переменный сигнал слабый и играет роль слабого возмущения на фоне броуновского движения частицы [44, 45]. В этом режиме происходит значительное усиление (в γ_{\pm} раз) частот вылета из S состояния в R состояние (из дна потенциальной ямы) за счет (джозефсоновского) резонанса с переменным сигналом в контактах с высокой добротностью $Q_{\pm}(j_{\text{dc}}) = \omega_{A\pm}(j_{\text{dc}})\omega_p RC \gg 1$:

$$\tau_{\text{mw}\pm}^{-1}(j_{\text{dc}}, \tilde{\omega}) = \gamma_{\pm}(j_{\text{dc}}, \tilde{\omega})\tau_{l\pm}^{-1}(j_{\text{dc}}), \quad (2.3.9)$$

где $\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}$ — это частота вылета частицы за счет тепловых флуктуаций при отсутствии переменного тока (смотри раздел 2.4.1), а $\tilde{\tau}_{\text{mw}\pm}^{-1}$ — частота вылета при его наличии. Из-за разницы в частотах колебаний $\omega_{A\pm}(j_{\text{dc}})$ коэффициенты усиления для разных направлений тока будут отличаться: $\gamma_+(j_{\text{dc}}, \tilde{\omega}) \neq \gamma_-(j_{\text{dc}}, \tilde{\omega})$. Это означает, что переходы из S состояния в R состояние при одном направлении тока (резонансном) будут происходить эффективнее, чем в другом направлении тока (нерезонансном).

Кроме того, известно, что за счет эффекта термоактивации джозефсоновский контакт может переключаться из S состояния в R состояние при токах ниже критических [31, 32]. При этом можно найти распределение соответствующих токов переключения, которые при отсутствии внешнего переменного облучения имеют пики при значениях теплового тока переключения. При наличии микроволнового облучения в распределении тока переключения появляются новые пики, обусловленные джозефсоновскими резонансами в S состоянии [46, 47]. Положения этих пиков определяются из условия появления резонанса с внешним сигналом: $\tilde{\omega} = \omega_{A\pm}(j_{\text{sw}\pm})$. В случае малой второй гармоники из уравнения (2.1.4) получаем

$$j_{\text{sw}\pm} = \sqrt{1 - \tilde{\omega}^4} + \frac{2A\tilde{\omega}^6 \cos \tilde{\phi}}{\sqrt{1 - \tilde{\omega}^4}} \pm A(1 + 2\tilde{\omega}^4) \sin \tilde{\phi}. \quad (2.3.10)$$

Уравнение (2.3.10) применимо в условиях применимости уравнения (2.1.4) и условия $A \ll 1 - \tilde{\omega}^4$.

Асимметрия токов переключения проиллюстрирована на рисунке 4(b). Значения токов переключения могут существенно отличаться для разных направлений тока при

наличии переменного облучения из-за разных значений частот колебаний вблизи дна потенциальной ямы $\omega_{A\pm}$.

2.3.3 Асимметрия ступеней Шапиро в минимальной модели

В предыдущих разделах этой главы мы изучили проявления диодного эффекта в S состоянии с $\bar{v} = 0$ при наличии внешнего переменного сигнала. Обсудим теперь вопрос о том, каким образом он проявляется в R состоянии с $\bar{v} \neq 0$.

Как известно, в R состоянии внешний ток также может синхронизироваться с внутренними колебаниями напряжениями, в результате в чего на ВАХ возникают особенности, называемые ступенями Шапиро, при $\bar{v} = (n/k)\omega$, где n и k — целые числа [31, 32]. Асимметрия ступеней Шапиро была ранее нами подробно изучена в бакалаврском дипломе [38]. Однако, для целостности описания особенностей ДДЭ, мы приведем основные результаты.

Можно изучать проявление ДДЭ в ступенях Шапиро, вычисляя асимметрию высот первых ступеней Шапиро $j_{\pm 1}$ (соответствующих $\bar{v} = \pm\omega$). Аналитически это удастся сделать в двух предельных случаях (описанных ранее в разделе 2.2.2): (i) предел большой емкости при дополнительном условии малости переменного тока $j_{ac} \ll 1$ и (ii) предел малой емкости. Для этого мы используем описанную ранее гармоническую теорию возмущений с небольшой модификацией: мы вычисляем зависимость $j_{dc}(\bar{v})$ вместо $\bar{v}(j_{dc})$. Для этого используется представление (2.2.6) вместе с разложением

$$\varphi(\tau) = \bar{v}\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}, \quad j_{dc} = \bar{v} + \sum_{k=1}^{\infty} j_{dc}^{(k)}. \quad (2.3.11)$$

В результате асимметрия высот первых ступеней Шапиро в пределе малой емкости принимает следующий вид

$$j_{\pm 1} = j_{sym} \pm j_{asym}, \quad j_{sym} = j_{ac}/\omega, \quad j_{asym} = 9j_{ac}A \sin(\tilde{\phi})/4\omega^2. \quad (2.3.12)$$

В пределе больших емкостей:

$$j_{sym} = j_{ac}/\beta\omega^2, \quad j_{asym} = 45j_{ac}A \sin(\tilde{\phi})/16\beta^3\omega^5. \quad (2.3.13)$$

В обоих результатах (2.3.12) и (2.3.13) мы сохранили только ведущие слагаемые в j_{sym} , которое не приводит к диодному эффекту, и в j_{asym} , которое приводит к диодному эффекту. Как и ранее в разделе 2.2.2, мы видим, что асимметрия в пределе большой емкости возникает в более высоком порядке теории возмущений, чем в пределе малой емкости.

В дополнение к аналитическим результатам для первых ступеней Шапиро мы также провели численные расчеты для изучения асимметрии ступеней Шапиро с различными номерами. Результаты показаны на рисунке 9. Видно, что как высота ступеней Шапиро,

так и их асимметрия уменьшаются с увеличением β . Это является еще одним примером проявления эффекта подавления ДДЭ в R состоянии емкостью.

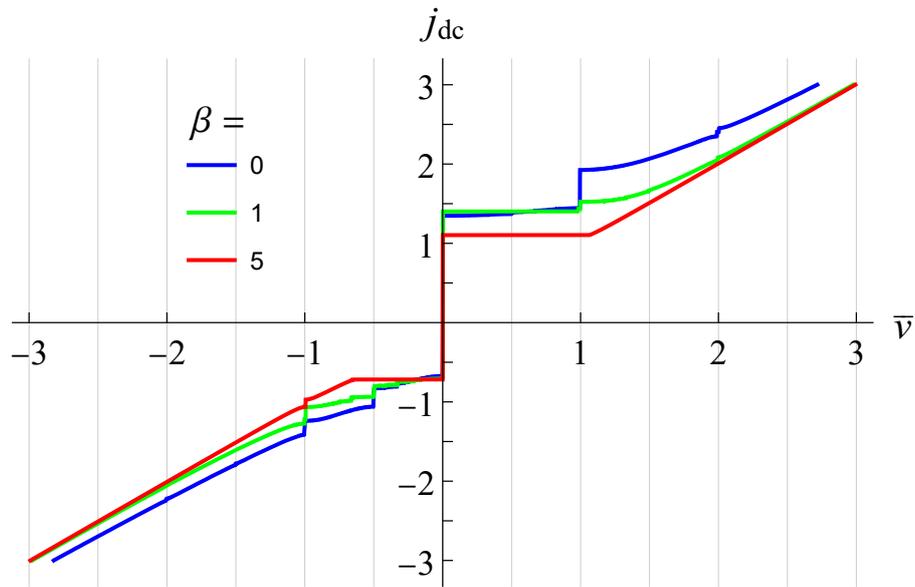


Рис. 9: Асимметрия ступеней Шапиро в R состоянии при $A = 0,5$, $j_{ac} = 0,5$, $\tilde{\phi} = \pi/2$ и различных значениях β . Наиболее ярко наблюдается асимметрия основных целых ($\bar{\nu} = \pm 1$) и полуцелых ($\bar{\nu} = \pm 1/2$) ступеней Шапиро. С увеличением β эта асимметрия ослабевает, что является проявлением подавления ДДЭ емкостью в R состоянии.

2.4 Влияние тепловых флуктуаций на ДДЭ

В предыдущих разделах мы изучали влияние емкости и переменного тока на ДДЭ при нулевых температурах (везде, кроме раздела 2.3.2). Изучим теперь вопрос о том, каким образом тепловые флуктуации влияют на ДДЭ. Для простоты мы рассмотрим случай $j_{ac} = 0$, когда динамика фазы описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon\dot{\varphi} + \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}) = j_{dc} + \xi(\tau). \quad (2.4.1)$$

Кроме того, мы будем изучать поведение системы при токах меньше критических $|j| < j_{c\pm}$, когда среднее напряжение без учета тепловых флуктуаций равно 0. Наконец, в своем рассмотрении мы ограничимся случаем малых температур $\mathcal{T} \ll \Delta U_{\pm}$, когда характерное время вылета частицы из потенциальной ямы большое (по сравнению с периодом колебаний частицы).

Сначала обсудим, чего следует ожидать в этом случае качественно. Как известно, в пределе нулевой температуры частица стремится занять положение в минимуме потенциальной энергии, что соответствует $\bar{v} = 0$. При конечной температуре, частица будет колебаться около этого минимума с частотой $\omega_{A\pm}$, и иногда “выпрыгивать” из ямки за счет эффекта термоактивации. Из-за этого будут происходить переходы системы из S состояния в R состояние, сопровождаемые скачками напряжения на контакте и приводящие к модификации ВАХ системы [48, 49].

2.4.1 Асимметрия времен вылета частицы

Как было упомянуто выше, тепловые флуктуации стимулируют процессы ухода (вылета) частицы из потенциального минимума. Состояние в потенциальной яме, таким образом, становится метастабильным с характерным временем вылета $\tilde{\tau}_{l\pm}$ (знак \sim напоминает, что величина считается в ε представлении). Времена вылета будут отличаться для разных направлений тока за счет различия в форме потенциальных барьеров. Чтобы их вычислить мы используем уравнение Фоккера-Планка для функции распределения $\sigma(\varphi, v, \tilde{\tau})$:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{\tau}} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} (p\sigma) + \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial U_{\text{asym}\pm}}{\partial \varphi} + \varepsilon p \right) \sigma \right] + \varepsilon \theta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}. \quad (2.4.2)$$

Мы обобщим вывод, представленный в работах [50, 51, 52], где были найдены времена вылета в широком диапазоне параметров МакКамбера, на случай асимметричного (в зависимости от направления тока) потенциала при наличии одного минимума на период. Технически, это сводится к дописыванию знака “ \pm ” у характеристик потенциала в полученных ранее ответах. В результате:

$$\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1} = \frac{\omega_{A\pm}}{2\pi\omega_{B\pm}} \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \omega_{B\pm}^2 \right)^{1/2} - \frac{\varepsilon}{2} \right] \exp \left(-\frac{\Delta U_{\pm}}{\theta} \right), \quad (2.4.3)$$

где $\omega_{A\pm}$, $\omega_{B\pm}$ и ΔU_{\pm} описаны в разделе 1.3. Подчеркнем, что результат (2.4.3) является общим и может быть использован для определения времени вылета для произвольного асимметричного (в указанном выше смысле) потенциала, содержащего лишь один минимум на период. При этом напомним, что для того, чтобы получить результат для минимальной модели нужно подставить выражения для $\omega_{A\pm}$, $\omega_{B\pm}$ и ΔU_{\pm} из уравнений (2.1.4)-(2.1.6) при $A \ll 1$, или из уравнений (2.1.7), (2.1.8) при $\tilde{\phi} = \pi/2$ и произвольном A .

Отметим, что общее выражение (2.4.3) можно упростить в двух предельных случаях: большого и малого трения. В результате мы получим следующее выражение для времен вылета

$$\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1} = \begin{cases} \frac{\omega_{A\pm}\omega_{B\pm}}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\pm}}{\theta}\right), & \varepsilon \gg 1, \\ \frac{\omega_{A\pm}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\pm}}{\theta}\right), & \varepsilon \ll 1. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Приведенные выше результаты (2.4.3) и (2.4.4) применимы, если коэффициент трения не слишком мал: $\varepsilon \gg \omega_{B\pm}\theta/\Delta U_{\pm}$ [52]. При нарушении этого условия необходимо также учитывать эффект депопуляции вблизи вершины потенциального барьера. Таким образом в режиме экстремально слабого трения время вылета задается выражением [29, 50]

$$\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1} = \frac{\varepsilon\omega_{A\pm}S_{\pm}}{2\pi\theta} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\pm}}{\theta}\right), \quad \varepsilon \ll \theta/S_{\pm}. \quad (2.4.5)$$

где $S_{\pm} = S_{\pm}(j_{dc})$ — действие частицы на сепаратрисе, которая начинается в максимуме $\varphi_{\max\pm}$ с нулевой начальной скоростью и такой, что после одного колебания в потенциальной яме [с точкой поворота $\varphi_{tp\pm}$, задаваемой условием $U_{\text{asym}\pm}(\varphi_{tp\pm}) = U_{\text{asym}\pm}(\varphi_{\max\pm})$] частица возвращается назад в тот же максимум:

$$S_{\pm} = 2 \int_{\varphi_{tp\pm}}^{\varphi_{\max\pm}} \sqrt{2[U_{\text{asym}\pm}(\varphi_{\max\pm}) - U_{\text{asym}\pm}(\varphi)]} d\varphi. \quad (2.4.6)$$

Обсудим общие особенности получившихся выражений для времен вылета. Во всех вышеприведенных случаях время вылета можно записать в виде

$$\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1} = \frac{\tilde{\omega}_{\text{ta}\pm}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\pm}}{\theta}\right), \quad (2.4.7)$$

где $\tilde{\omega}_{\text{ta}\pm}$ — эффективная частота процессов термоактивации. Мы видим, что во всех случаях наблюдается экспоненциально сильная асимметрия времен вылета, которая возникает за счет разности в высотах потенциальных барьеров $\Delta U_{+} \neq \Delta U_{-}$. Помимо этого, отметим, что также наблюдается асимметрия эффективных частот термоактивации $\omega_{\text{ta}+} \neq \omega_{\text{ta}-}$, которая возникает за счет различия частот осцилляций $\omega_{A\pm}$ и кривизн барьеров $\omega_{B\pm}$ при разных направлениях тока.

2.4.2 Связь времен вылета и асимметрий ВАХ

Обсудим, каким образом асимметрия времен вылета $\tilde{\tau}_{l\pm}$ связана с асимметриями ВАХ.

Оказывается, что в случае $\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$), из выражения (2.4.3) можно получить явное выражение для асимметричной ВАХ. Это связано с тем, что в случае нулевой емкости после процесса термоактивации частица мгновенно останавливается в соседней яме из-за наличия бесконечно сильного трения. В случае же слабой (но конечной) емкости после того как частица перепрыгнет потенциальный барьер, она остановится в соседнем минимуме через время скатывания $\tilde{\tau}_{sl} \ll \tilde{\tau}_{l\pm}$. Таким образом, пренебрегая поправками порядка $\tilde{\tau}_{sl}/\tilde{\tau}_{l\pm} \ll 1$, мы можем вычислить ВАХ по следующей простой формуле

$$\langle \bar{v}_{\pm}(j_{dc}) \rangle = \pm 2\pi\varepsilon(\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1} - (\tilde{\tau}_{l\pm}^{\leftarrow})^{-1}), \quad (\tilde{\tau}_{l\pm}^{\leftarrow})^{-1} = \exp\left(-\frac{2j_{dc}\pi}{\mathcal{T}}\right)\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}, \quad (2.4.8)$$

где учтены прыжки на длину 2π в ближайшую яму справа (происходящие с частотой $\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}$) и прыжки на длину -2π в ближайшую яму слева (происходящие с частотой $(\tilde{\tau}_{l\pm}^{\leftarrow})^{-1}$), как показано на рисунке 10.

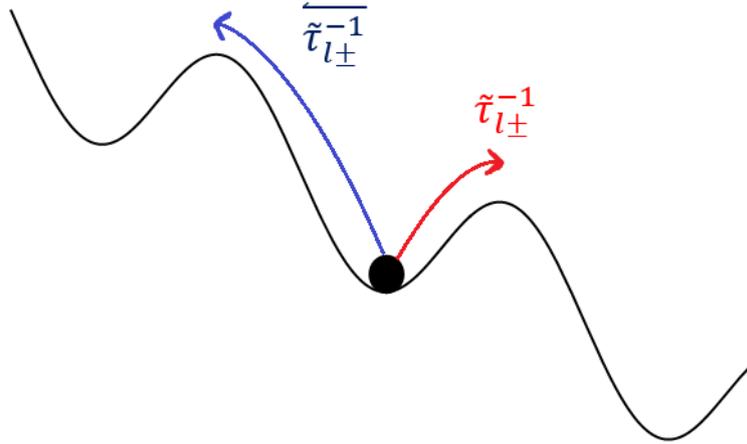


Рис. 10: Термоактивация частицы в пределе низких температур. В этом случае основной вклад в ВАХ вносят прыжки в соседние минимумы потенциала: на 2π (вправо) с частотой $\tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}$ и на -2π (влево) с частотой $(\tilde{\tau}_{l\pm}^{\leftarrow})^{-1}$.

Для минимальной модели при $\tilde{\phi} = \pi/2$ и $A < 1/4$ (один минимум на период) формула (2.4.8) дает

$$\langle \bar{v}_{\pm}(j_{dc}) \rangle = \pm 2\omega_{A\pm}\omega_{B\pm} \sinh\left(\frac{j_{dc}\pi}{\theta}\right) \exp\left(\frac{-\Delta U_{\pm} - j_{dc}\pi}{\theta}\right). \quad (2.4.9)$$

Выражение (2.4.9) воспроизводит ответ, полученный нами ранее в бакалаврском дипломе [38] из точного решения уравнения Фоккера-Планка с использованием методов, изложенных в работах [48, 49].

Отметим, что асимметрия ВАХ также оказывается экспоненциально сильной (как и асимметрия времен вылета) из-за отличия высот потенциальных барьеров при разных

направлениях тока.

Приведенный выше вывод ВАХ через времена вылета частицы из потенциальной ямы опирается на тот факт, что частица быстро (по сравнению со временем вылета) релаксирует в соседней яме. Это условие выполняется в случае $\varepsilon \gg 1$ (при $\beta \ll 1$) и заведомо нарушается при $\varepsilon \ll 1$ (при $\beta \gg 1$), когда частица после процесса термоактивации начинает скатываться по потенциалу стиральной доски, а не останавливается в ближайшей яме. Таким образом, всю ВАХ в случае больших значений емкости вычислить не удастся. В этом случае, однако, можно вычислить асимметрию токов переключения, возникающих за счет тепловых флуктуаций.

Из-за процессов термоактивации переход из S состояния в R состояние происходит при токах переключения $j_{sw\pm} < j_{c\pm}$. Для их вычисления рассмотрим случай, когда постоянный ток изначально равен нулю, а затем мы начинаем его медленно линейно увеличивать (по модулю) со временем [31]:

$$j_{dc}(\tilde{\tau}) = a\tilde{\tau}, \quad a\tilde{\tau}_{l\pm} \ll 1. \quad (2.4.10)$$

Тогда, вероятность остаться в потенциальной яме, когда ток достигнет значения j_{dc} равна

$$\sigma_{sw\pm}(j_{dc}) = \exp \left[-\frac{1}{a} \int_0^{j_{dc}} \tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}(j) dj \right]. \quad (2.4.11)$$

В пределе низких температур из-за быстрого убывания экспоненты в выражении для $\tilde{\tau}_{l\pm}$ вероятность остаться в яме принимает вид

$$\sigma_{sw\pm}(j_{sw\pm}) = \exp \left(-\frac{\theta}{a} \tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}(j_{sw\pm}) \left| \frac{d\Delta U_{\pm}(j_{dc})}{dj_{dc}} \right|_{j_{dc}=j_{sw\pm}}^{-1} \right). \quad (2.4.12)$$

Следуя работе [29], мы определим токи переключения из соотношения

$$\sigma_{sw\pm}(j_{sw\pm}) = 1/2. \quad (2.4.13)$$

Неявное выражение для токов переключения тогда принимает вид

$$a \ln 2 = \theta \tilde{\tau}_{l\pm}^{-1}(j_{sw\pm}) \left| \frac{d\Delta U_{\pm}(j_{dc})}{dj_{dc}} \right|_{j_{dc}=j_{sw\pm}}^{-1}. \quad (2.4.14)$$

В самом общем случае время вылета дается уравнением (2.4.3), и тогда токи переключения могут быть получены путем решения уравнения

$$\frac{\Delta U_{\pm}(j_{sw\pm})}{\theta} = \ln \left(\frac{\theta \tilde{\omega}_{att\pm}(j_{sw})}{2\pi a \ln 2} \left| \frac{d\Delta U_{\pm}(j_{dc})}{dj_{dc}} \right|_{j_{dc}=j_{sw\pm}}^{-1} \right). \quad (2.4.15)$$

Для того, чтобы получить явные выражения для токов переключения, следует подставить в уравнение (2.4.15) асимптотические выражения для ΔU_{\pm} и $\tilde{\omega}_{att\pm}$, а затем решить

полученное трансцендентное уравнение.

Применим эту общую схему [29, 31] к нашей минимальной модели при $A < 1/4$ и $\tilde{\phi} = \pi/2$ для больших и малых коэффициентов трения. Поскольку мы рассматриваем низкотемпературный предел, ток переключения оказывается близок к критическому (т.к. в этом случае для переключения из S состояния в R состояние нужно сильно уменьшить высоту потенциальных барьеров). Поэтому мы используем асимптотические выражения (2.1.9) и (2.1.10) для высот барьеров и частот колебаний. В итоге:

$$j_{sw\pm} = j_{c\pm} - \begin{cases} \left(\frac{\theta}{u_{c\pm}} \ln \frac{2\theta\omega_{c\pm}^2}{(6\pi \ln 2)\varepsilon a u_{c\pm}} \right)^{2/3}, & \varepsilon \gg 1, \\ \left(\frac{\theta}{u_{c\pm}} \ln \frac{2\theta\omega_{c\pm}}{(6\pi \ln 2) a u_{c\pm}} \right)^{2/3}, & \varepsilon \ll 1, \end{cases} \quad (2.4.16)$$

где $j_{c\pm}$ задается уравнением (2.2.5).

Заметим, что выражение для токов переключения при $\varepsilon \ll 1$ получено с логарифмической точностью, тогда как при $\varepsilon \gg 1$ число под логарифмом подсчитано точно.

Как и ожидалось, при больших коэффициентах трения разница между током переключения и критическим током меньше, чем та же величина при малых коэффициентах трения (формально, из-за множителя ε в знаменателе).

Для полноты изложения отметим, что в работе [29] были получены выражения для токов переключения в режиме экстремально слабого трения, где $j_{c\pm} - j_{sw\pm} \sim (\theta \ln \varepsilon S_{\pm})^{2/3}$. Это асимптотическое поведение заменяет наш результат $j_{c\pm} - j_{sw\pm} \sim (\theta \ln \theta)^{2/3}$, который был получен в режиме слабого трения $\varepsilon \ll 1$.

2.5 Управление состоянием джозефсоновского диода

В предыдущих разделах мы обсудили, какие новые особенности ДДЭ возникают при учете конечных емкостей контактов асимметричного СКВИДа, а также при наличии внешнего переменного тока и тепловых флуктуаций. Теперь обсудим, каким образом их можно использовать для управления состоянием диода. Также, в этом разделе мы обсудим выбор оптимального значения β для различных экспериментов по диодному эффекту.

Под управлением состоянием диода мы будем понимать возможность его переключения из S состояния (с нулевым сопротивлением) в R состояние (с ненулевым сопротивлением) в одном из направлений тока без изменения его состояния в обратном направлении тока. Это достигается путем изменения внешних параметров системы. Такое управление состоянием диода позволит контролируемым образом “открывать” и “закрывать” диод в одном из направлений тока, не затрагивая его состояние в противоположном направлении, что может иметь практическое значение для сверхпроводящей электроники.

Одной из возможных реализаций такого метода является управление асимметричным СКВИДом с $\beta \gg 1$ внешним переменным сигналом. Как было показано ранее в разделе 2.3.2, при воздействии внешнего переменного тока на систему со слабым трением в ней возникают резонансы за счет синхронизации внешних и внутренних колебаний напряжения при $\tilde{\omega} \simeq \omega_{A\pm}(j_{dc})$. В этом случае переменный сигнал может значительно уменьшить время вылета (стимулировать переходы из S состояние в R состояние) для одного направления тока, которое соответствует условию резонанса, при этом не изменяя время вылета для противоположного направления тока, которое не соответствует условию резонанса. Как показано на рисунке 4(а), такое поведение наблюдается при $|j_{dc}| < j_{c\pm}$ и, следовательно, этот метод позволяет расширить рабочий диапазон джозефсоновских диодов за счет приложения внешнего переменного тока. При этом, отметим, что для этого метода предпочтительно подбирать частоту внешнего сигнала $\tilde{\omega}$ так, чтобы она находилась в резонансе с наибольшим из двух значений $\omega_{A\pm}$. Это связано с тем, что коэффициент усиления $\gamma(\tilde{\omega})$ быстро уменьшается при $\tilde{\omega} > \omega_A(j_{dc})$ [44, 45, 47]. Таким образом, вышеуказанная процедура подбора частоты поможет избежать паразитного переключения из S состояния в R состояние в противоположном направлении тока.

Альтернативным методом управления состоянием диода является подача импульсов тока на систему, находящуюся в режиме одностороннего гистерезиса, что проиллюстрировано на рисунке 11. Предположим, что отрицательная часть ВАХ имеет только одну устойчивую ветвь при фиксированном значении тока (негистерезисная ВАХ): S состояние при $|j_{dc}| < j_{c-}$ и R состояние при $|j_{dc}| > j_{c-}$, тогда как положительная часть ВАХ имеет две устойчивые ветви в диапазоне $j_{r+} < j_{dc} < j_{c+}$ (гистерезисная ВАХ). Тогда оказывается возможным переключить систему из S состояния в R состояние (или обратно из R состояния в S состояние) путем подачи прямоугольного импульса тока с соответствующей амплитудой j_{pulse} и длительностью импульса $\tau \gtrsim \omega_J^{-1}$. При этом амплитуда импульса j_{pulse} должна удовлетворять условию $j_{dc} + j_{pulse} > j_{c+}$ для переключения из S состояния в R состояние [смотри рисунок 11(а)] и условию $j_{dc} - j_{pulse} < j_{r+}$ для переключения из R

состояния в S состоянии [смотри рисунок 11(b)]. В то же время отметим, что такой прямоугольный импульс не изменяет состояние системы в случае отрицательного j_{dc} из-за отсутствия гистерезиса в этом направлении, что показано на рисунке 11(c). В результате вышеописанная процедура позволяет изменять состояние диода в одном направлении тока (гистерезисном), оставляя состояние диода неизменным в противоположном направлении тока (безгистерезисном).

Также отметим, что для управления состоянием диода резонансным переменным током предпочтительны переходы с $\beta \gg 1$, когда трение в системе мало. В то же время переходы с $\beta \sim 1$ открывают дополнительные возможности управления диодом в режиме одностороннего гистерезиса, оставаясь при этом защищенными от сильного подавления ДДЭ емкостью. Наконец, в контексте устойчивости к тепловым флуктуациям, контакты с $\beta \ll 1$ наиболее предпочтительны. Это, во-первых, связано с тем, что для них $j_r = j_c$, и, таким образом, их легче вернуть в S состояние после процесса термоактивации. Кроме того, их токи переключения оказываются ближе к значениям критического тока, чем в случае контактов с большими емкостями, и, таким образом, их рабочий диапазон с учетом тепловых флуктуаций оказывается шире.

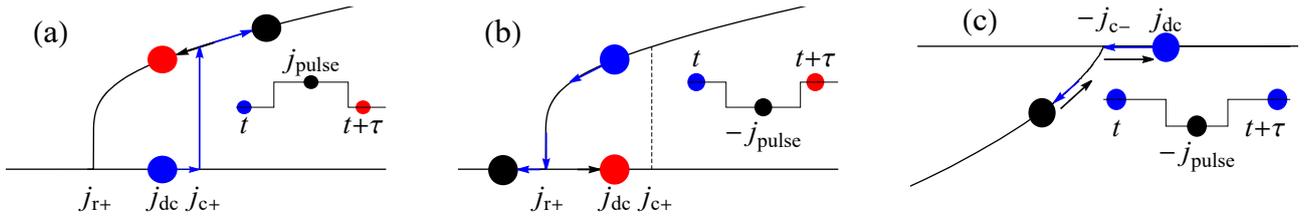


Рис. 11: Управление состоянием диода прямоугольным импульсом тока с амплитудой j_{pulse} и длительностью $\tau \gtrsim \omega_j^{-1}$ в режиме одностороннего гистерезиса: (a) и (b) гистерезисная ВАХ для положительного направления тока, и (c) безгистерезисная ВАХ для отрицательного направления тока. Цветные точки обозначают различные состояния системы в различные моменты времени: в начальный момент t (синяя точка), во время действия импульса (черная точка) и после окончания действия импульса при $t + \tau$ (красная точка, если конечное состояние отличается от начального, и синяя точка в противоположном случае). (a) Эволюция системы из начального S состояния. Под действием импульса происходит переход в R состояние, если $j_{dc} + j_{pulse} > j_{c+}$. В этом случае по окончании действия импульса конечное состояние будет находиться на R ветке ВАХ. (b) Эволюция системы из начального R состояния. Под действием импульса происходит переход в S состояние, если $j_{dc} - j_{pulse} < j_{r+}$. В этом случае по окончании действия импульса конечное состояние будет находиться на S ветке ВАХ. (c) Эволюция системы из начального состояния S в безгистерезисном режиме. По окончании действия импульса система возвращается в начальное состояние.

3 Диодный эффект в СКВИДе со сверхпроводящим наномостиком

В предыдущей (сугубо теоретической) части работы мы изучили влияние емкости, тепловых флуктуаций и переменного тока на ДДЭ в асимметричном СКВИДе со старшими гармониками в ТФС. При этом мы предполагали, что оба наших контакта обладают однозначной ток-фазовой характеристикой. В этой же части работы, выполненной совместно с экспериментаторами из группы В. С. Столярова в МФТИ, мы исследуем особенности ДДЭ, которые проявляются за счет присутствия в асимметричном СКВИДе сверхпроводящего наномостика, обладающего многозначным ТФС [37].

3.1 Асимметричный СКВИД с наномостиком

3.1.1 Джозефсоновские контакты

Прежде чем начать подробный анализ особенностей ДДЭ в случае наличия в системе контакта с многозначным ТФС, опишем систему, изучаемую в эксперименте, и ее теоретическую модель. Исследуется асимметричный СКВИД из толстого ниобия ($d \approx 100$ нм), в чьих плечах находятся два различных джозефсоновских контакта, как показано на рисунке 12(а). Эквивалентная схема исследуемого образца представлена на рисунке 12(б).

Первый контакт представляет собой флейк $\text{Bi}_2\text{Te}_2\text{Se}$ толщиной около 90 нм, нанесенный на поверхность сверхпроводящих электродов. Схожие образцы с использованием того же материала были ранее исследованы в работе [53]. Было обнаружено, что они эффективно ведут себя как SNS контакты (в дальнейшем, для краткости, мы будем называть этот контакт SNS контактом) со стандартным синусоидальным ТФС: $I_{\text{SNS}}(\varphi_a) = I_{\text{sns}} \sin \varphi_a$. При этом контакт имеет большие поперечные размеры, так что его площадь S_{sns} сравнима с площадью сверхпроводящего интерферометра S_{loop} . Поэтому, при анализе поведения СКВИДа в магнитном поле необходимо учитывать ненулевой магнитный поток через SNS контакт. Так, его критический ток демонстрирует фраунгоферскую зависимость от магнитного поля: $I_{\text{sns}}(\Phi) = I_{\text{sns}} \frac{\sin(\pi\Phi_{\text{sns}}/\Phi_0)}{(\pi\Phi_{\text{sns}}/\Phi_0)}$, где Φ_{sns} — поток через SNS контакт, пропорциональный магнитному потоку Φ через весь сверхпроводящий контур: $\Phi_{\text{sns}} = \Phi S_{\text{sns}}/S_{\text{loop}}$.

Второй контакт асимметричного СКВИДа — сверхпроводящий наномостик из тонкого ниобия толщиной 20 нм, шириной 220 нм и длиной 380 нм. Ранее, было показано, что подобные контакты-наномостики обладают многозначной ток-фазовой характеристикой [20, 21, 22, 24, 26]. В общем случае в S состоянии их ТФС может быть получено из одной (генерирующей) ветви, определенной на интервале $[-\varphi_c, \varphi_c]$ и периодически транслируемой на $2\pi n$, где n — целое число. Таким образом обычному однозначному ТФС соответствует $\varphi_c = \pi$. В то же время в случае наномостика генерирующая ветвь ТФС линейна с $\varphi_c > \pi$. Это приводит к многозначности ТФС (его ветки мы будем нумеровать целым числом n). Отметим, что у наномостика критический ток I_{nb} достигается при значении фазы равной критической. В то же время в R состоянии с конечным средним напряжением

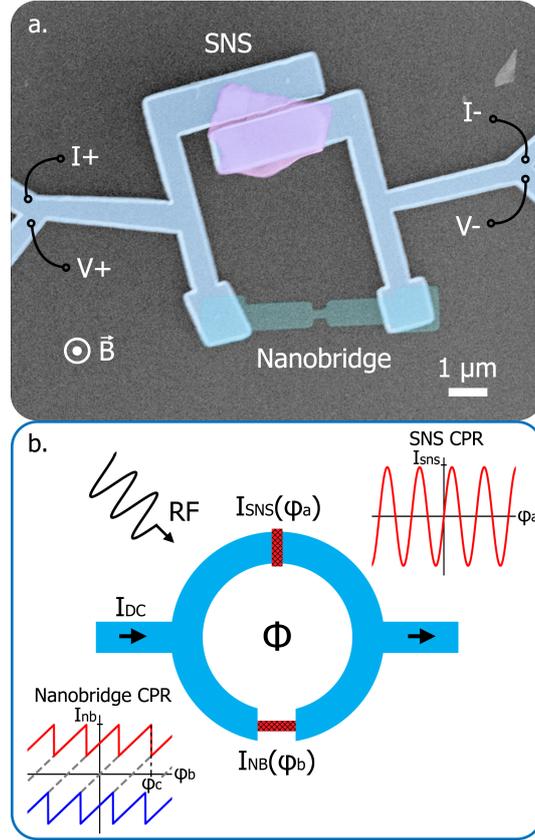


Рис. 12: Асимметричный СКВИД. (а) Изображение образца, полученное с помощью сканирующей электронной микроскопии (SEM). Верхний контакт представляет собой джозефсоновский переход сверхпроводник/нормальный металл/сверхпроводник (SNS) через флейк $\text{Bi}_2\text{Te}_2\text{Se}$, а нижний контакт — ниобиевый наномостик (NB). (б) Эквивалентная схема СКВИДа с двумя различными джозефсоновскими контактами. На вставках показаны их ток-фазовые соотношения: синусоидальная зависимость для SNS контакта и линейная многозначная зависимость для наномостика, где критический ток I_{nb} соответствует критической фазе $\varphi_c > \pi$. В нестационарном состоянии с конечным средним напряжением (положительным или отрицательным) ТФС наномостика принимает пилообразную форму, показанную красными и синими пилами соответственно. К СКВИДу может быть приложено внешнее (rf) облучение. Рисунок (а) является экспериментальным результатом, полученным в группе В. С. Столярова, и не является результатом данной ВКР.

(положительным или отрицательным) ТФС наномостика $I_{NB}(\varphi_b)$ эффективно принимает пилообразную форму [54, 55, 56]. Каждый раз, когда фаза достигает значения $\pm\varphi_c + 2\pi n$, происходит переход на соседнюю ветвь ТФС, что соответствует $n \mapsto n \pm 1$. Знак “ \pm ” соответствуют красным и синим вертикальным сегментам на рисунке 12(б) соответственно.

Такое многозначное поведение наномостика может быть интерпретировано в терминах завихренности, определяемой как $N_v = \oint \nabla\varphi dl / 2\pi$, где интегрирование выполняется по периметру петли интерферометра, а φ — сверхпроводящая фаза. Различные ветви ТФС различаются номером n , который равняется завихренности N_v при нулевой фазе на джозефсоновском контакте. По мере увеличения фазы магнитные потоки начинают проникать в петлю СКВИДа, что будет приводить к изменению завихренности на единицу. Из-за значительной длины наномостика градиент фазы вдоль него при этом оказывается мал, что

отражается в малом значении сверхпроводящей скорости. Поэтому множество вихрей может войти в СКВИД до того момента, как наномостик достигнет своего критического тока, что происходит при $N_v \gg 1$ (равносильно, при $\varphi_c \gg \pi$). Более того, как только фаза достигает своего критического значения, в наномостике происходит проскальзывание фазы, вызывающее скачок фазы 2π через наномостик. С формальной точки зрения это тождественно изменению n на единицу, что соответствует описанному в предыдущем абзаце поведению фазы.

3.1.2 Эффективное ток-фазовое соотношение

После того, как мы описали основные особенности ТФС джозефсоновских контактов, формирующих СКВИД, приступим к описанию его эффективного ТФС. При этом, как уже было упомянуто ранее в разделе 1.1, мы будем пренебрегать индуктивностью петли СКВИДа (для ее оценки смотри приложение А).

Используя уравнение (1.1.2) мы получим

$$I_s(\varphi) = I_{\text{sns}}(\phi) \sin(\varphi + \phi) + I_{\text{NB}}(\varphi), \quad (3.1.1)$$

где мы учли упомянутую ранее фраунгоферовскую зависимость критического тока SNS контакта от магнитного потока.

Как уже было упомянуто ранее в разделе 1.3, различие в ТФС контактов, формирующих СКВИД, приводит к тому, что форма потенциала $U(\varphi)$ оказывается различной при разных направлениях тока, и в системе наблюдается диодный эффект. Однако, в данной системе возникают дополнительные особенности из-за наличия многозначного ТФС у наномостика. Чтобы их подчеркнуть, разложим ток-фазовое соотношение СКВИДа в \mathbb{R} состоянии (где оно принимает пилообразную форму) в ряд Фурье:

$$\frac{I_s(\varphi)}{I_{\text{nb}}} = A_{0\pm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k\pm} \sin(k(\varphi + \delta_{k\pm})), \quad (3.1.2)$$

где знак \pm указывает на положительную и отрицательную часть пилообразной ток-фазовой характеристики (красные и синие участки на рисунке 12 соответственно). Нулевые гармоники $A_{0\pm} = \pm(\varphi_c - \pi)/\varphi_c$ возникают из ТФС наномостика и определяют среднее значение сверхпроводящего тока в \mathbb{R} состоянии. Амплитуды $A_{k\pm}$ и фазы $\delta_{k\pm}$ при $k = 1$ задаются следующими уравнениями

$$A_{1\pm} = \sqrt{\left(\frac{I_{\text{sns}}(\phi)}{I_{\text{nb}}}\right)^2 + \frac{4}{\varphi_c^2} - \frac{4I_{\text{sns}}(\phi)}{I_{\text{nb}}\varphi_c} \cos(\phi \pm \varphi_c)}, \quad (3.1.3)$$

$$\tan(\delta_{1\pm} \pm \varphi_c) = \frac{\sin(\phi \pm \varphi_c)}{\cos(\phi \pm \varphi_c) - 2I_{\text{nb}}/\varphi_c I_{\text{sns}}(\phi)}, \quad (3.1.4)$$

тогда как $A_{k\pm} = -2/k\varphi_c$ и $\delta_{k\pm} = \mp\varphi_c$ для $k > 1$.

Как видно из уравнений (3.1.2)-(3.1.4), при наличии многозначных контактов в

СКВИДе существует два различных механизма, приводящих к диодному эффекту. Первый механизм — это уже ранее описанный фазовый механизм, возникающий при наличии старших джозефсоновских гармоник за счет сдвигов фаз между ними, то есть когда $\delta_{1\pm} \neq \delta_{k\pm}$ по крайней мере для некоторых $k > 1$. Второй механизм возникает за счет асимметрии амплитуд первых гармоник в эффективном ток-фазовом соотношении СКВИДа: $A_{1+} \neq A_{1-}$ при $\sin \varphi_c \sin \phi \neq 0$. Визуально условие $\sin \varphi_c \neq 0$ подразумевает наличие горизонтального сдвига между красными и синими пилами на рисунке 12(b). Асимметрия амплитуд первых гармоник $A_{1\pm}$ возникает за счет интерференции между синусоидальным ток-фазовым соотношением SNS контакта и первой гармоникой пилообразного ТФС наномостика. Отметим, что этот эффект отсутствует в СКВИДах, которые сделаны с использованием контактов с однозначными ТФС, так как те демонстрируют тривиальные значения критических фаз: $\sin \varphi_c = 0$. Таким образом, амплитудный механизм ДДЭ имеет “многозначную” природу и происходит за счет наличия наномостика в рассматриваемой системе.

3.2 Асимметрии ВАХ при наличии наномостика

В этой главе мы обсудим, какие новые особенности диодного эффекта наблюдаются в эксперименте за счет наличия многозначного ТФС у наномостика, и применим разработанную нами теории для их объяснения. При этом, для ясности изложения, мы будем придерживаться следующей структуры: сначала мы будем кратко описывать экспериментальные результаты, а затем интерпретировать их с точки нашей теоретической модели.

В эксперименте измерялись ВАХи асимметричного СКВИДа. Один из примеров ВАХ показан на рисунке 13(a). Как видно, она демонстрирует гистерезисное поведение, очень похожее на поведение ВАХ при учете емкости: система возвращается обратно в S состояние из R состояния лишь при токе возврата $I_r < I_c$. Однако, в данном случае гистерезисное поведение никак не связано с емкостными эффектами, а объясняется перегревом образца [57, 58]: при переходе в R состояние наномостик, который обладает большим критическим током ~ 50 мкА, начинает сильно греться, из-за чего его температура сильно увеличивается (от 50 мК в S-состоянии до ~ 2 К вблизи I_r в R состоянии), а критический ток уменьшается, и таким образом система не может вернуться в S состояние до тех пор, пока уже подавленный температурой критический ток $I_c(T)$ не сравняется с постоянным током I_{dc} . Таким образом, с точки зрения теории, несмотря на наличие гистерезиса в системе, нужно использовать не резистивно-емкостную модель, даваемую уравнением (1.2.2), а резистивную модель, но учитывать зависимость параметров системы от температуры.

3.2.1 Асимметрия критических токов

Для исследования асимметрии критических токов были проведены измерения при наличии магнитного потока через петлю СКВИДа. Представленная на рисунке 13(a) ВАХ была измерена при внешнем магнитном поле 0.8 Гс. Вставка на данном рисунке показывает, что критические токи в положительном и отрицательном направлениях отличаются примерно на 4 мкА, что является проявлением диодного эффекта. Для более детального анализа этой асимметрии также были измерены зависимости критического тока в более широком диапазоне магнитных полей. Результаты измерений в слабых полях показаны на рис. 13(b). При заданном значении магнитного поля, были измерены 100 ВАХ, чтобы накопить статистику измерений критических токов. В данном случае процедура сбора статистики оказывается важной, поскольку переход в R состояние может происходить при разных токах при одном и том же значении магнитного поля, что показано на рисунке 13(b). Этот эффект возникает из-за того, что при одном и том же значении магнитного поля, существуют несколько различных S состояний, характеризующихся разной завихренностью, что является проявлением многозначной природы ТФС наномостика. Отметим, что аналогичные эффекты ранее наблюдались в асимметричных СКВИДах с двумя различными наномостиками [24, 26]. Результаты измерений при более высоких магнитных полях представлены на рисунке 13(c). В этом случае магнитные потоки проникают в SNS контакт, вызывая фраунгоферовскую зависимость критического тока СКВИДа от

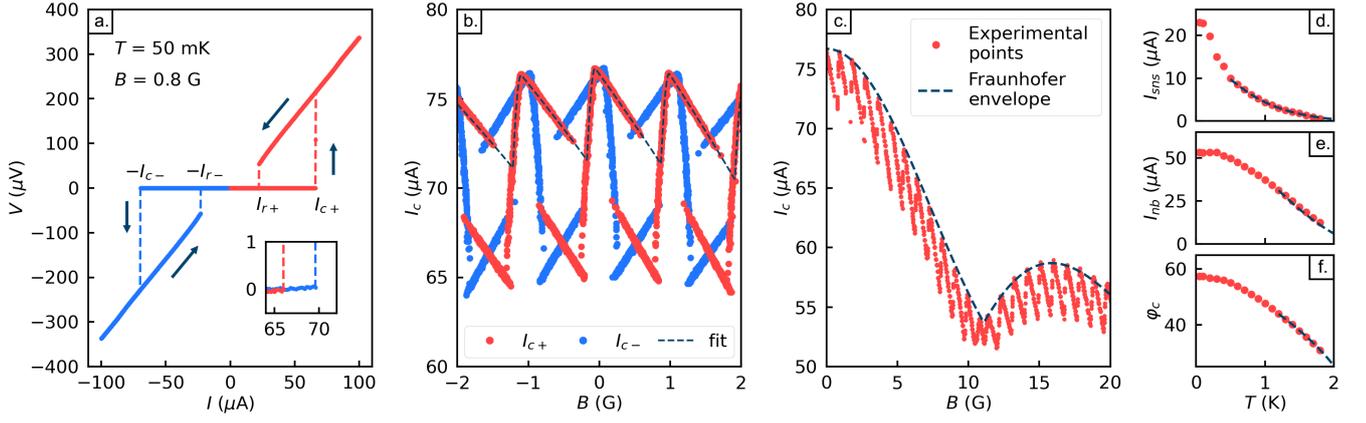


Рис. 13: ВАХ асимметричного СКВИД с наномостиком. (а) ВАХ, измеренная при температуре $T = 50$ мК и во внешнем магнитном поле $B = 0.8$ Гс. Черные стрелки указывают направление развертки тока. Гистерезисное поведение кривой связано с перегревом системы. На вставке показана увеличенная область ВАХ вокруг критических токов в абсолютных значениях тока и напряжения. Асимметрия критических токов в этом случае примерно равна 4 мкА. (б) Зависимость I_c СКВИДа от внешнего магнитного поля в положительном и отрицательном направлениях тока. Критические токи в обоих направлениях немного отличаются друг от друга, что является проявлением диодного эффекта. При фиксированном значении магнитного поля производилось несколько измерений ВАХ. Точки показывают критический ток, полученный из каждой отдельной ВАХ. Как можно видеть, при заданном магнитном поле точки концентрируются вокруг нескольких значений критического тока, что является проявлением многозначного ток-фазового соотношения СКВИДа. При этом различные значения критических токов соответствуют переключению в R состояние с разных ветвей ТФС. Пунктирная линия представляет собой подгонку наивысшей (с наибольшим значением критического тока) ветви положительного критического тока с помощью уравнения (3.1.1). (с) Зависимость наивысшей ветви положительного критического тока в широком диапазоне магнитных полей. Мелкомасштабные колебания $I_c(B)$, связанные с наличием потока через весь СКВИД, промодулированы фраунгоферовской зависимостью критического тока через SNS контакт, показанной пунктирной линией. Правые панели демонстрируют температурную зависимость (d) критического тока SNS контакта I_{sns} , (e) критического тока наномостика I_{nb} и (f) критической фазы наномостика φ_c . Теоретические подгоночные кривые показаны пунктирными линиями. Экспериментальные данные, представленные на рисунке, получены в группе В. С. Столярова и не являются результатами данной ВКР.

магнитного поля.

Для оценки силы диодного эффекта критических токов из экспериментальных данных извлекалась эффективность диодного эффекта. Отметим, что при этом рассматривалась только ветвь с наибольшим значением $I_{c\pm}$ при фиксированном магнитном поле. Эта величина достигала своего максимального значения $\eta = 2,6\%$, что соответствовало разнице токов в ≈ 4 мкА. Таким образом можно заключить, что измерения выявили лишь слабую асимметрию критических токов, несмотря на то, что контакты сильно отличались между собой.

Мы подгоняли экспериментальные данные на рисунках 13(b) и (с), используя теоретическое выражение для сверхпроводящего тока из уравнения (3.1.1). Как видно, резуль-

таты демонстрируют хорошее согласие между нашей моделью и экспериментальными данными. Таким образом диодный эффект в критических токах возникает, как мы и ожидали, в результате интерференции двух различных ТФС джозефсоновских контактов. Аналогичная процедура была применена для подгонки температурных зависимостей основных параметров нашей системы, которые показаны на рисунках 13(d), (e) и (f) (более подробная информация о подгонке приведена в приложении В). В этом случае неожиданным оказался тот факт, что критические токи обоих джозефсоновских контактов исчезают при температурах значительно меньших критической температуры ниобиевых электродов, которая примерно равна 8 К. В контексте наномостика такая низкая температура может объясняться его малой толщиной (20 нм) и технологией изготовления, в результате которой ниобий сильно окисляется. В то же время низкая критическая температура SNS контакта может быть связана с тем, что в качестве берегов джозефсоновского контакта выступают не сами массивные ниобиевые электроды, а области флейка, находящиеся прямо под электродами, где присутствует только слабая индуцированная сверхпроводимость [59].

Помимо численного расчета критических токов мы также получили ряд аналитических результатов. Для этого мы использовали выражение для сверхпроводящего тока (3.1.1) и определяли критические токи из условия его экстремальности:

$$I_{c\pm} = \left| \max(\min)_{\varphi} \left(I_{\text{sns}}(\phi) \sin(\varphi + \phi) + \frac{I_{\text{nb}}\varphi}{\varphi_c} \right) \right|, \quad (3.2.1)$$

где φ лежит в диапазоне $[-\varphi_c, \varphi_c]$.

Как было показано ранее в работе [53] (рис. 3), значения фаз, при которых достигаются критические токи, могут быть равны либо $\pm\varphi_c$, либо $\varphi_{\pm}^* = \pm 2\pi Z_{\pm} \pm \arccos\left(-\frac{I_{\text{nb}}}{\varphi_c I_{\text{sns}}(\phi)}\right) - \phi$, что соответствует положениям ближайших к φ_c максимумов/минимумов (которые нумеруются целыми числами Z_{\pm}), лежащих в указанном выше диапазоне фаз.

Если критические токи достигаются при $\pm\varphi_c$, они принимают следующие значения

$$I_{c\pm} = I_{\text{nb}} + I_{\text{sns}}(\phi) \sin(\varphi_c \pm \phi). \quad (3.2.2)$$

Такое поведение соответствует крутым (почти вертикальным) сегментам в зависимости $I_{c\pm}(B)$ на рисунке 14(a) [которая является воспроизведенной теоретической кривой, взятой из рисунка 13(b)]. Эти участки есть не что иное, как часть синусоидального ТФС SNS контакта.

В том же случае, когда критические токи достигаются при φ_{\pm}^* , они принимают следующие значения

$$I_{c\pm} = I_{\text{sns}}(\phi) \sqrt{1 - \left(\frac{I_{\text{nb}}}{\varphi_c I_{\text{sns}}(\phi)}\right)^2} + \frac{I_{\text{nb}}}{\varphi_c} \left[2\pi Z_{\pm} + \arccos\left(-\frac{I_{\text{nb}}}{\varphi_c I_{\text{sns}}(\phi)}\right) \mp \phi \right]. \quad (3.2.3)$$

Такое поведение соответствует участкам с менее крутым линейным наклоном на рисун-

ке 14(a). При этом эти участки есть ни что иное, как часть линейного ТФС наномостика.

Отметим, что φ_{\pm}^* существует только тогда, когда критический ток SNS контакта достаточно велик, так что $\kappa = I_{\text{sns}}(\phi)\varphi_c/I_{\text{nb}} > 1$ [53]. В то же время при больших магнитных полях это условие неизбежно нарушается за счет фраунгоферовской модуляции критического тока SNS контакта. Поэтому при больших полях критические токи достигаются при $\pm\varphi_c$ и даются уравнением (3.2.2). Однако, отметим, что в данном эксперименте измерения в столь сильных магнитных полях не проводились.

Асимметрию критических токов мы вычисляли как $\Delta I_c(\phi) = I_{c+}(\phi) - I_{c-}(\phi)$. В режиме, когда оба критических тока достигаются при $\pm\varphi_c$ получаем

$$\Delta I_c = 2I_{\text{sns}}(\phi) \cos \varphi_c \sin \phi. \quad (3.2.4)$$

В другом режиме, когда оба критических тока достигаются при φ_{\pm}^* получаем

$$\Delta I_c = \frac{2I_{\text{nb}}}{\varphi_c} [\pi(Z_+ - Z_-) - \phi]. \quad (3.2.5)$$

Наконец, возможен случай, когда один критический ток достигается при $\pm\varphi_c$, а другой при φ_{\pm}^* . Результаты для асимметрии критических токов просуммированы на рисунках 14(b) и (c).

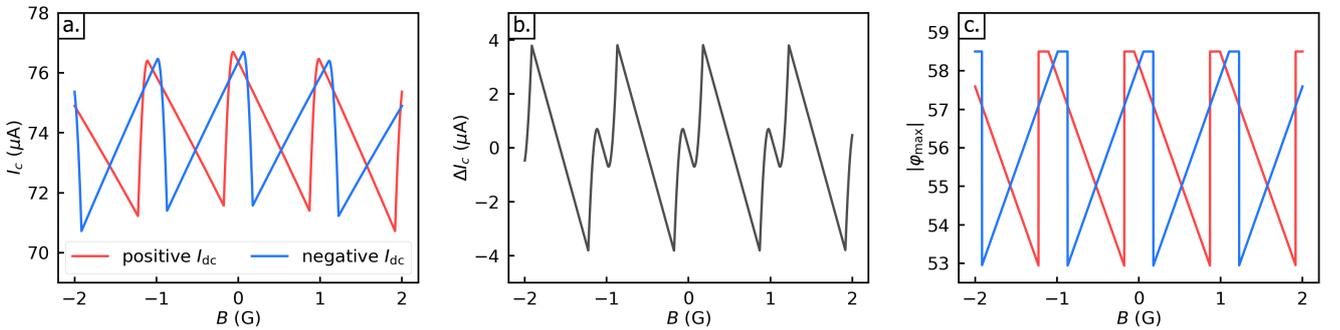


Рис. 14: Асимметрия критических токов (a) Воспроизведенные теоретические кривые с рисунка 13(b) для зависимостей критических токов от магнитного поля B через петлю интерферометра для положительного (красного) и отрицательного (синего) направлений тока. В этом масштабе части синусоидальной ток-фазовой характеристики SNS контакта [смотри уравнение (3.2.2)] выглядят почти вертикальными. В то же время линейные участки с не столь крутым наклоном являются частями ТФС наномостика [смотри уравнение (3.2.3)]. (b) Зависимость асимметрии критического тока ΔI_c от магнитного поля. (c) Зависимость фаз φ_{max} , соответствующих критическому току, от магнитного поля для положительного (красного) и отрицательного (синего) направлений тока. Крутые (почти вертикальные) участки на панели (a) соответствуют $\varphi_{\text{max}} = \pm\varphi_c$ [полке на зависимости $\varphi_{\text{max}}(B)$], тогда как не столь крутые линейные участки соответствуют линейным частям $\varphi_{\text{max}}(B)$. Переход между двумя режимами $\varphi_{\text{max}}(B)$ резкий. Параметры, используемые для построения кривых: $\varphi_c = 58.5$, $I_{\text{nb}} = 53.7$ мкА, $I_{\text{sns}} = 23$ мкА.

Отметим, что уравнение (3.2.3), как видно из рисунка 14, определяет поведение большей части зависимости $\Delta I_c(B)$.

3.2.2 Измерение асимметрии ступеней Шапиро

В дополнении к измерениям ВАХ без внешнего облучения, которые выявили лишь слабую асимметрию критических токов, были также проведены измерения ВАХ в присутствии внешнего переменного сигнала. При этом, удивительным экспериментальным наблюдением оказалось то, что при наличии переменного сигнала в R состоянии асимметрия ВАХ может быть более яркой чем асимметрия критических токов, наблюдаемая в отсутствие внешнего сигнала в S состоянии. В этом разделе мы приведем описание проводившийся эксперимент и укажем на основные особенности полученных экспериментальных результатов.

Измерения ВАХ проводились на разных частотах в диапазоне 2–4 ГГц. Рисунок 15 показывает ВАХ СКВИДа при частоте сигнала $f_{\text{rf}} = 2.888$ ГГц. Как и ожидалось, измеренный критический ток уменьшился по сравнению со случаем отсутствия переменного сигнала. Однако, при попытке измерить ступени Шапиро при прямой развертки тока выяснилось, что они не образуются, так как система из-за перегрева сразу переходит в нормальное состояние. Поэтому, было принято решение искать ступени Шапиро на обратной R ветви вблизи I_r , показанной на рисунке 15(b). В этой части ВАХ удалось пронаблюдать синхронизацию джозефсоновских контактов с внешним сигналом. Однако, оказалось, что наблюдаемые особенности на ВАХ не образуют четких ступеней Шапиро. Вместо этого они оказываются сильно размыты тепловыми флуктуациями. Поэтому для изучения этих размытых ступеней Шапиро был построен график, где в роли одной из осей выступало дифференциальное сопротивление — рисунок 15(c). На нем видны периодические провалы глубиной примерно 30% от максимального значения. При этом провалы возникают с периодическими интервалами $V_0 = 6.0$ мкВ, что соответствует частоте приложенного сигнала $f_{\text{rf}} = 2.888$ ГГц. Однако, стоит отметить, что все ступени (провалы сопротивления) оказываются расположенными при напряжениях $V_0(n - 1/2)$ с целым числом n , демонстрируя сдвиг на $V_0/2$ от ожидаемых в рамках RSJ модели значений (смотри обсуждение возможных причин в приложении C).

Зависимость дифференциального сопротивления от мощности сигнала показана на рисунке 15(d). Темно-синяя область соответствует S состоянию СКВИДа. Ее граница представляет собой критический ток I_r обратной ветви ВАХ, который монотонно уменьшается с мощностью сигнала. Синие полосы в R состоянии соответствуют размытым ступеням Шапиро. Отметим, что еще одной примечательной особенностью, обнаруженной в эксперименте, является резкое исчезновение критических токов $I_{r\pm}$ как функции P_{rf} [верхняя граница синей области на рисунке 15(d)]. При этом в области с $P_{\text{rf}} \gtrsim 0.5$ дБм, система все еще демонстрирует сверхпроводящие свойства, что проявляется в наличии ступеней Шапиро. Аналогичные особенности ранее наблюдались в работах [60, 61], где их связывали с эффектом нагрева образца внешним облучением. В данной работе эта область P_{rf} специально не изучалась.

Для исследования асимметрии ступеней Шапиро, были проведены измерения в различных магнитных полях. На рисунке 16(a) показана эволюция дифференциального со-

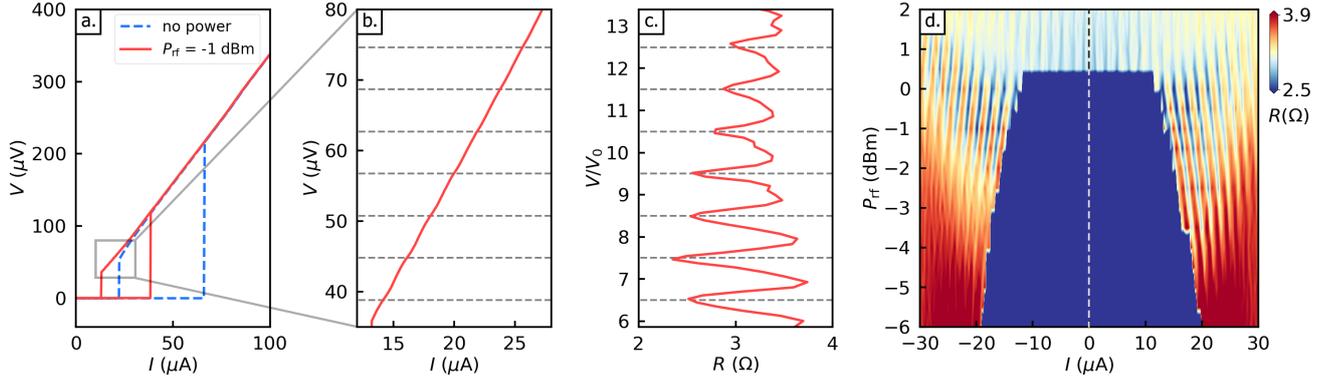


Рис. 15: ВАХ при наличии внешнего (rf) облучения при $\Phi = 3\Phi_0/4$. (a) Сравнение ВАХ при наличии внешнего сигнала с частотой $f_{\text{rf}} = 2.888$ ГГц (сплошная красная) и без него (синяя пунктирная линия). (b) Увеличенная область обратной ветви ВАХ вблизи I_r при наличии внешнего облучения. Линии слегка изгибаются при напряжениях $V_n = (n-1/2)V_0$ с целым числом n и $V_0 = \Phi_0 f_{\text{rf}}$, показанных пунктирными серыми линиями. (c) Те же данные, что и на панели (b), но с горизонтальной осью, представляющей собой дифференциальное сопротивление $R = dV/dI$. Напряжение теперь выражено в единицах V_0 . (d) Зависимость дифференциального сопротивления на обратной ветви ВАХ вблизи $I_{r\pm}$ от тока через образец и мощности облучения. Данный рисунок представляет собой экспериментальный результат, полученный в группе В. С. Столярова, и не является результатом данной ВКР.

противления при изменении магнитного потока через петлю СКВИДа. При нулевом поле зависимости $R_{\text{diff}}(V)$ практически идентичны для обоих направлений тока. Небольшое различие ступеней вызвано небольшим отклонением магнитного поля от нуля в эксперименте. С увеличением поля провалы $R(V)$ на положительной ветви тока становятся меньше по амплитуде, тогда как на отрицательной ветви они увеличиваются. Их асимметрия достигает максимума при $\Phi = \Phi_0/4$. Затем процесс повторяется в обратном направлении: при $\Phi_0/2$ кривые снова совпадают, а при $3\Phi_0/4$ разница снова достигает максимума, но с противоположным знаком диодного эффекта. Наконец, при Φ_0 состояние СКВИДа становится неотличимым от состояния при нулевом потоке и кривые снова совпадают.

Таким образом, было экспериментально продемонстрировано, что амплитуды провалов дифференциального сопротивления различается между положительным и отрицательным направлениями тока, что является одним из проявлений ДДЭ. При этом диодный эффект достигает своего максимума при магнитных потоках $\Phi \approx \Phi_0/4$ и $\Phi \approx 3\Phi_0/4$, где ступени Шапиро практически полностью исчезают для одного направления тока, оставаясь заметными для противоположного направления тока. Это результат демонстрирует сильную асимметрию ступеней Шапиро, контрастирующую с относительно слабой асимметрией критических токов, наблюдаемую при отсутствии облучения.

Для более детального анализа асимметрии ступеней Шапиро были проведены дополнительные измерения зависимости этой асимметрии от магнитного поля и мощности внешнего облучения. Для количественно описания глубины ступеней Шапиро высчитывалась разность между дифференциальным сопротивлением в центрах ступеней R_{\pm} и

значением сопротивления в нормальном состоянии: $\Delta R_{\pm} = (R_0 - R_{\pm})$. Для определенности, рассматривалась ступень Шапиро с $|V|/V_0 = 6,5$. Отметим, однако, что другие ступени Шапиро демонстрировали схожие зависимости от магнитного потока и мощности облучения.

Результат для зависимости ступеней Шапиро от магнитного поля показан на рисунке 17(а). Кривые для обоих направлений тока демонстрируют периодическую зависимость от поля и могут быть хорошо аппроксимированы синусоидальной зависимостью, которая изображена на том же рисунке сплошными линиями. Периоды колебаний для положительной и отрицательной ветвей составляют $\Delta B_+ = \Delta B_- = 1.04$ Гс, что точно совпадает с периодом осцилляций СКВИДа, взятым из рисунка 13(б). Кроме того, была исследована зависимость асимметрии ступеней Шапиро, $\Delta R_+ - \Delta R_-$, в более широком диапазоне магнитных полей, как показано на рисунке 17(б). При больших значениях магнитного поля огибающая для асимметрии ступеней Шапиро имеет тот же вид, что и фраунгоферовская зависимость для критических токов СКВИДа $I_{c\pm}$, показанная на рисунке 13(с). Эти наблюдения указывают, что диодный эффект в ступенях Шапиро возникает, как и асимметрия критических токов, из-за асимметричной структуры СКВИДа.

В то же время зависимость асимметрии ступеней Шапиро от мощности внешнего облучения демонстрирует немонотонную зависимость, что показано на рисунке 17(с). При фиксированном значении магнитного потока через СКВИД $\Phi = 3\Phi_0/4$ с ростом мощности сигнала глубины ступеней Шапиро попеременно достигают максимумов в положительном и отрицательном направлениях тока. Отметим, однако, что это поведение радикально отличается от бесселева закона, который обычно наблюдается в подобных экспериментах [31, 32].

3.2.3 Метод медленно меняющейся фазы для описания асимметрии ступеней Шапиро

Для исследования асимметрии ступеней Шапиро и объяснения наблюдаемых в эксперименте особенностей мы разработали теоретическую модель, основанную на резистивной модели со сверхпроводящим током, заданным уравнением (3.1.1), когда уравнения (1.2.5) и (1.2.6) принимают вид:

$$d\varphi/d\tau + I_s(\varphi)/I_{nb} = j_{dc} + j_{ac} \cos \omega\tau + \xi(\tau), \quad (3.2.6)$$

$$v = d\varphi/d\tau, \quad (3.2.7)$$

где в качестве нормировочной амплитуды тока, для удобства, мы выбрали критический ток наномостика $I_{norm} = I_{nb}$, а в качестве сопротивления в нормальном состоянии взяли экспериментальное значение $R_0 = 3.6$ Ом. Отметим, что хотя температура обычно изменяется вдоль ВАХ, ее можно считать постоянной в узких интервалах V/V_0 .

Результаты численного моделирования ВАХ представлены на нижней панели рисунка 16. Хотя полного численного согласия достичь не удалось, качественно зависимость асимметрии размытых ступеней Шапиро от магнитного потока хорошо описывается на-

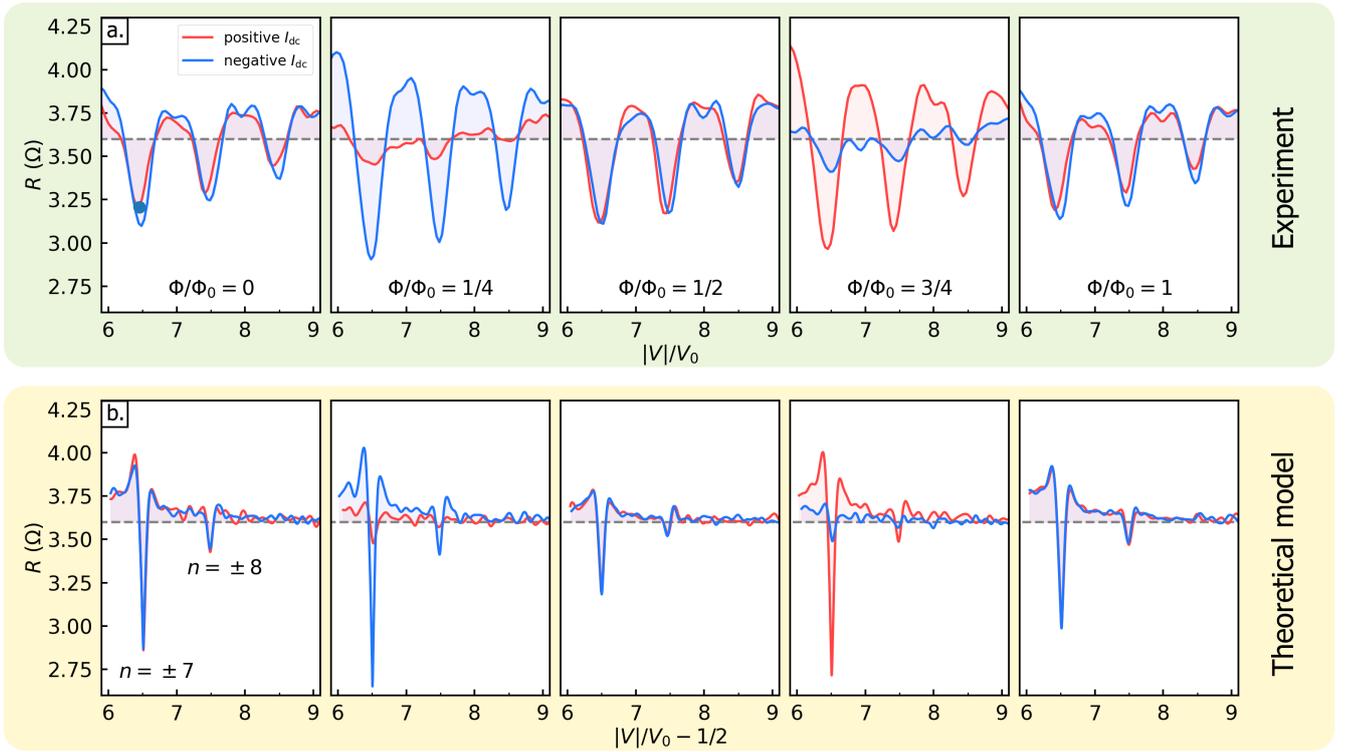


Рис. 16: Диодный эффект в размытых тепловыми флуктуациями ступенях Шапиро (минимумы $R = dV/dI$). (a) Пять графиков зависимости дифференциального сопротивления R от напряжения в различных магнитных полях. Данные получены путем численного дифференцирования экспериментально измеренных ВАХ при наличии внешнего облучения с частотой $f_{\text{rf}} = 3.754$ ГГц и мощностью $P_{\text{rf}} = 1$ мВт. Красные и синие линии соответствуют положительному и отрицательному току I_{dc} через СКВИД соответственно. Серые пунктирные линии указывают значение сопротивления в нормальном состоянии R_0 . (b) Результаты теоретических расчетов в рамках модели RSJ при $T = 1.8$ К, $\varphi_c = 30$, $I_{\text{sns}} = 0.3$ мкА, $I_{\text{nb}} = 12$ мкА, $I_{\text{ac}} = 12$ мкА. Наблюдается качественное согласие между теоретическими и экспериментальными кривыми. Однако, для сравнения кривых горизонтальную ось на теоретических кривых пришлось вручную сместить на $1/2$ (смотри обсуждение в приложении С). Верхняя панель представляет собой экспериментальный результат, полученный в группе В. С. Столярова, и не является результатом данной ВКР.

шей моделью.

Для получения аналитических результатов, описывающих асимметрию ступеней Шапиро, мы использовали пертурбативный “метод медленно меняющейся фазы” [31, 62, 63], предполагая малость сверхпроводящего тока и тепловых флуктуаций по сравнению с амплитудой постоянного тока [точные критерии применимости теории возмущений смотри после уравнения (3.2.9)]. При этом мы ограничились рассмотрением области ВАХ вблизи центров n -х (с положительными и отрицательными значениями) ступеней Шапиро. Идея данного метода заключается в разделении фазы на “быструю” (изменяющуюся на малых временных масштабах $\tau \lesssim (n\omega)^{-1}$) и “медленную” (изменяющуюся на больших временных масштабах $\tau \gg (n\omega)^{-1}$) части, $\varphi(\tau) = \varphi_f(\tau) + \varphi_s(\tau)$, и в дальнейшем усреднении получившихся уравнений по промежуточному временному масштабу $(n\omega)^{-1} \ll \Delta\tau \ll \mathcal{T}^{-1}, (\hat{v} - n\omega)^{-1}$. Здесь и далее $\hat{\cdot}$ подразумевает усреднение функции по

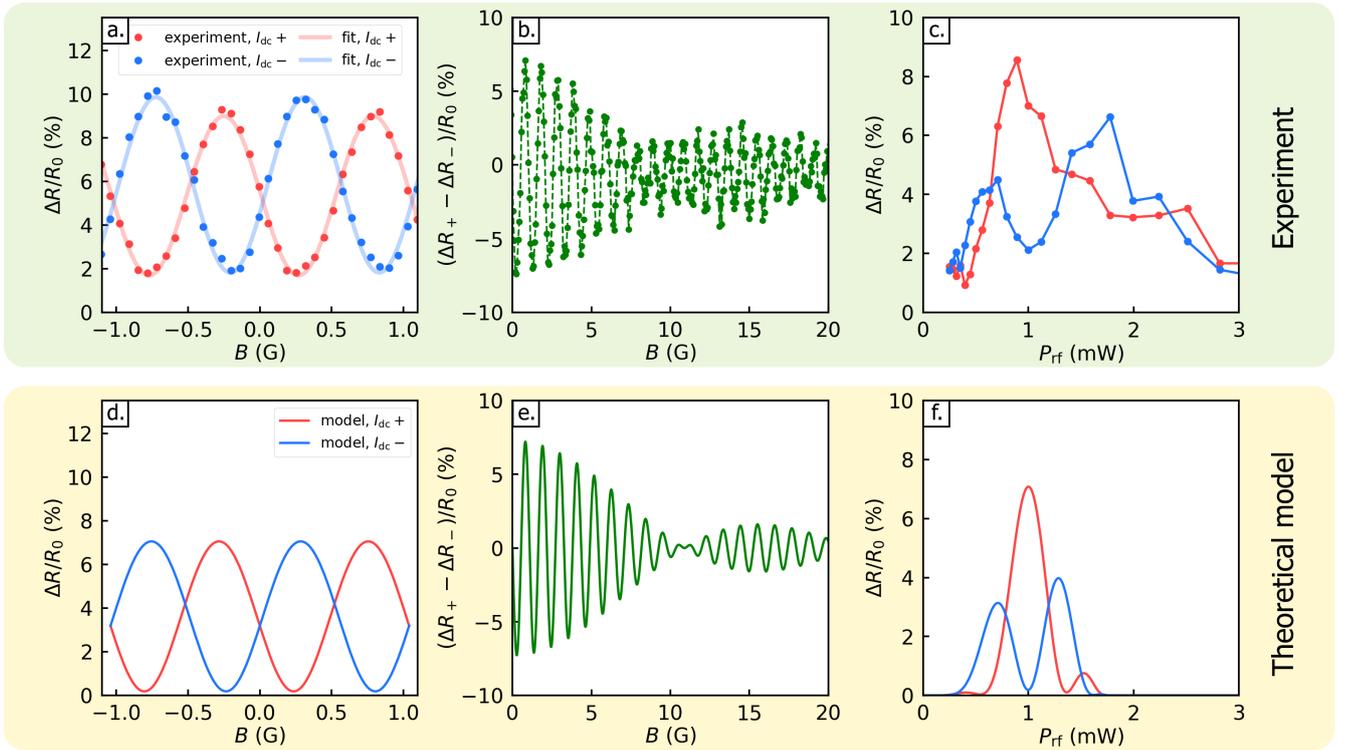


Рис. 17: Анализ особенностей ступеней Шапиро и сравнение экспериментальных данных, показанных в верхнем ряду, и теоретических результатов, полученных из уравнения (3.2.14) и показанных в нижнем ряду. (a) и (d) Зависимость глубин провалов дифференциального сопротивления (соответствующих ступеням Шапиро) ΔR_{\pm} от магнитного поля при $|V|/V_0 = 6.5$ (что соответствует $n = \pm 7$ в теоретической модели). Точки представляют экспериментальные данные для положительного (красного) и отрицательного (синего) направлений тока, измеренные при приложении микроволнового сигнала на частоте $f_{\text{rf}} = 3.754$ ГГц и мощности $P_{\text{rf}} = 1$ мВт. Сплошные линии обозначают подгонку синусоидальной зависимости, которая показывает хорошее согласие с экспериментальными точками. Теоретические результаты также оказываются близки к синусоидальной зависимости. (b) и (e) Асимметрия ступеней Шапиро $\Delta R_+ - \Delta R_-$ в широком диапазоне полей. Наблюдаемые осцилляции силы диодного эффекта с периодичностью СКВИДа в малых магнитных полях и фраунгоферовская огибающая, возникающая при больших магнитных полях, демонстрируют, что диодный эффект в ступенях Шапиро возникает из-за интерференции ТФС двух различных джозефсоновских контактов. (c) и (f) Зависимость ΔR_{\pm} от мощности облучения при фиксированном магнитном поле $B = 0.8$ Гс, что соответствует потоку $\Phi/\Phi_0 \approx 0.77$. Кривые демонстрируют немонотонную зависимость с периодическими изменениями знака диодного эффекта. Мы объясняем такое поведение нагревом образца внешним облучением, которые проявляет себя через температурную зависимость $\varphi_c(T)$. Пересечения кривых соответствуют условию $\sin \varphi_c(T) = 0$. Верхняя панель представляет собой экспериментальный результат, полученный в группе В. С. Столярова, и не является результатом данной ВКР.

промежуточному масштабу времени. Такая процедура позволяет исключить быструю динамику фазы и получить эффективные уравнения, определяющие медленную динамику фазы, которая в свою очередь и определяет форму ступеней Шапиро вблизи их центров.

Быстрая динамика фазы (в рамках сделанных нами допущений) определяется значением постоянного и переменного токов, в то время как сверхпроводящий ток и тепловые

флуктуации отвечают только за медленные поправки к динамике фазы. Поэтому в нулевом порядке данной теории возмущений

$$\varphi_f(\tau) = n\omega\tau + (j_{ac}/\omega) \sin \omega\tau, \quad \varphi_s(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (3.2.8)$$

где $\theta_n(\tau)$ является медленной поправкой к фазе.

В первом порядке теории возмущений мы учтем сверхпроводящий ток и тепловые флуктуации. Для этого мы примем во внимание $\xi(\tau)$ в правой части уравнения (3.2.6), а также подставим $\varphi_f(\tau)$ в выражение для $I_s(\varphi)$ и разложим полученное выражение в ряд Фурье:

$$I_{s\pm}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m A_{k\pm} J_m \left(\frac{kj_{ac}}{\omega} \right) \sin(k(\theta_n + \delta_{k\pm}) + (kn - m)\omega\tau), \quad (3.2.9)$$

где мы учли вклады всех гармоник в сверхпроводящем токе кроме нулевой $A_{0\pm}$, которая может быть учтена в виде добавки в выражение для постоянного тока. Отметим, что при этом $A_{0\pm}$ определяет положение ступеней Шапиро по оси токов.

После этого мы усредним получившееся в первом порядке теории возмущений уравнение резистивной модели по времени $\Delta\tau$, удовлетворяющему условию $(n\omega)^{-1} \ll \Delta\tau \ll \mathcal{T}^{-1}, (\hat{v} - n\omega)^{-1}$, чтобы исключить быстрые функции и получить эффективное уравнение для медленных функций. Отметим, что в данном случае усреднение по $\Delta\tau$ подразумевает: (i) сохранение θ_n нетронутым в левой части уравнения (3.2.6) в слагаемом с производной и в выражении для тока $I_{s\pm}(\tau)$, (ii) сохранение только медленной части $\xi(\tau)$ (которую в этом порядке теории возмущений все еще можно рассматривать как белый шум), и (iii) сохранение в выражении (3.2.9) только членов с $m = kn$ и в пренебрежении остальными, поскольку они колеблются с частотами $\gtrsim \omega$.

С учетом этого после усреднения по времени эффективные уравнения, описывающие динамику медленных функций примут вид

$$\dot{\theta}_n(\tau) + \hat{I}_{s\pm}(\tau) = \Delta j + \xi(\tau), \quad (3.2.10)$$

где $\dot{\theta}_n$ и Δj — отклонения среднего (по времени) напряжения и тока от центров n -х ступеней Шапиро:

$$\hat{v}(\tau) = n\omega + \dot{\theta}_n(\tau), \quad j_{dc} = n\omega + A_{0\pm} + \Delta j, \quad (3.2.11)$$

а $\hat{I}_{s\pm}(\tau)$ — усредненные сверхпроводящие токи в R состоянии (исключая член $A_{0\pm}$, как уже было отмечено ранее) для положительных и отрицательных ветвей ВАХ соответственно. В данном случае они будут даваться выражением

$$\hat{I}_{s\pm}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{nk} A_{k\pm} J_{nk} \left(\frac{kj_{ac}}{\omega} \right) \sin(k[\theta_n(\tau) + \delta_{k\pm}]), \quad (3.2.12)$$

где зависимость $\hat{I}_{s\pm}(\tau)$ от времени входит через эффективное ТФС $\hat{I}_{s\pm}(\theta_n)$. При этом описанная выше теория возмущений оказывается применима, например, когда $\Delta j \ll 1$ (малое отклонение от центра ступени Шапиро), $A_k \ll 1$ (малый сверхток по сравнению с постоянным током), $\mathcal{T}/n\omega \ll 1$ (малые тепловые флуктуации по сравнению с постоянным током).

Таким образом для определения форм ступеней Шапиро вблизи их центров, которые в данном случае задаются зависимостью $\theta_n(\Delta j)$, необходимо решить эффективное уравнение (3.2.10) на медленную фазу θ_n принимая во внимание выражение для сверхпроводящего тока, даваемого уравнением (3.2.12). Это может быть сделано численно. Для дальнейшего же получения аналитических результатов необходимо сделать упрощающее предположение, которые мы обсудим в следующем разделе.

3.2.4 Анализ асимметрии ступеней Шапиро в рамках одногармонического приближения

Для того чтобы продвинуться дальше аналитически, мы заметим, что эффективное ТФС $\hat{I}_{s\pm}(\theta_n)$ отличаются от пилообразного ТФС, обсуждавшейся ранее в разделе 3.1.2. Его фурье гармоники содержат дополнительные факторы в виде функций Бесселя. Благодаря этому их амплитуды уменьшаются быстрее, чем в случае описанного ранее пилообразного ТФС. Тогда разумным приближением является “одногармоническое приближение”, где учитываются только первые гармоники в эффективном ТФС:

$$\hat{I}_{s\pm}(\tau) = A_{1\pm} J_n(j_{ac}/\omega) \sin(\theta_n(\tau)). \quad (3.2.13)$$

Отметим, что здесь мы также сделали сдвигку фазы $\theta_n \mapsto \theta_n - \delta_{1\pm} - \pi n$, которая не меняет ВАХ.

Одногармоническое приближение оказывается строго обоснованным в предельном случае $j_{ac}/\omega \ll 1$, когда высшие гармоники в уравнении (3.2.12) оказываются параметрически меньше первой. В общем же случае одногармоническое приближение обеспечивает правильное качественное описание диодного эффекта в нашей системе, поскольку оно учитывает основной механизм — асимметрию $A_{1-} \neq A_{1+}$.

Эффективное уравнение (3.2.10) на фазу θ_n со сверхтоком, заданным уравнением (3.2.13), принимает вид стандартного уравнения, описывающего динамику фазы синусоидального контакта в рамках резистивной модели (однако, с разными критическими токами для противоположных направлений тока). Такие уравнения ранее были подробно изучены во многих теоретических работах [48, 49, 64], поэтому мы лишь приведем известные ответы для ВАХ, слегка модифицированные для описания нашего случая (подробнее вывод ВАХ приведен в приложении D). Эти результаты приводят к следующему выражению для дифференциального сопротивления в центрах ступеней Шапиро, которое получаются

из выражения для ВАХ синусоидального контакта путем вычисления $dV/dI|_{I=0}$

$$\frac{R_{\pm}}{R_0} = I_0^{-2}(1/\mathcal{T}_{\pm}) = \begin{cases} (2\pi/\mathcal{T}_{\pm}) \exp(-2/\mathcal{T}_{\pm}), & \mathcal{T}_{\pm} \ll 1, \\ (1 - 1/2\mathcal{T}_{\pm}^2), & \mathcal{T}_{\pm} \gg 1, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя и $\mathcal{T}_{\pm} = \mathcal{T}/A_{1\pm}J_n(j_{ac}/\omega)$ — эффективная безразмерная температура, определяющая силу тепловых флуктуаций при различных направлениях тока вблизи центров n -х ступеней Шапиро. Качественно, при разных направлениях тока за счет разных значений \mathcal{T}_{\pm} система по-разному ощущает влияние тепловых флуктуаций (чем больше \mathcal{T}_{\pm} тем они сильнее) и поэтому ступени Шапиро размываются по-разному (имеют разные глубины провалов дифференциального сопротивления).

Зависимость ступеней Шапиро от магнитного поля, полученная из теоретической модели, показана на рисунке 17(d) и (e). Кривые на рисунке 17(d) получены с использованием точного выражения (в рамках одногармонического приближения) с функцией Бесселя I_0 в уравнении (3.2.14). Они демонстрируют почти гармоническую зависимость от магнитного поля, что аналитически наблюдается в пределе высоких температур уравнения (3.2.14), когда $\Delta R_{\pm}/R_0 = A_{1\pm}^2 J_n^2(j_{ac}/\omega)/2\mathcal{T}^2 \propto \text{const} + I_{\text{sns}}(\phi) \cos(\phi \pm \varphi_c)$. В то же время зависимость $I_{\text{sns}}(\phi)$ проявляет себя при больших магнитных полях, приводя к асимметрии фраунгоферовской огибающей ступеней Шапиро, что показано на рисунке 17(e).

Теоретические результаты для зависимостей глубины ступеней Шапиро от мощности облучения показаны на рисунке 17(f). В нашем рассмотрении мы учли оба эффекта внешнего облучения: (i) генерацию переменного тока j_{ac} и (ii) нагрев образца (более подробную информацию можно найти в приложении E). Результаты указывают на то, что именно эффект нагрева ответственен за наблюдаемые изменения знака диодного эффекта. Это происходит из-за того, что критическая фаза φ_c зависит от температуры, как показано на рисунке 13(f). По мере увеличения мощности облучения температура системы растет, что в свою очередь приводит к изменению знака у $\sin \varphi_c$ и соответственно к смене знака диодного эффекта.

Таким образом, как демонстрируют рисунки 16 и 17, наша относительно простая теоретическая модель хорошо воспроизводит основные особенности, наблюдаемые экспериментально. При этом усложнение модели, которое может быть сделано путем включения дополнительных слагаемых в рамках резистивной модели, а также учет более сложных эффектов вне этой модели, как мы думаем, улучшит количественное согласие между теорией и экспериментом, но не изменит качественную картину диодного эффекта в рассматриваемой системе.

3.2.5 Особенности диодного эффекта при наличии наномостика

Наконец, обсудим, как особенности ДДЭ, связаны с наличием в ней сверхпроводящего наномостика с многозначным ТФС.

В предыдущих разделах мы рассматривали асимметрию ступеней Шапиро, кото-

рая возникала при наличии внешнего облучения в R состоянии. Как было показано на рисунке 16, эта асимметрия может быть значительной при определенных значениях магнитных потоков: $\Phi \approx \Phi_0/4$ и $\Phi \approx 3\Phi_0/4$. С точки зрения теории этот эффект возникает за счет асимметрии амплитуд первых гармоник $A_{1+} \neq A_{1-}$ наблюдаемой при $\sin \phi \sin \varphi_c \neq 0$. При этом зависимость этой асимметрии от $\sin \varphi_c$ проявляется через зависимость силы диодного эффекта от мощности внешнего облучения, что показано на рисунке 17(с). Как уже было упомянуто в предыдущем разделе, это связано с повышением температуры системы за счет нагрева образца внешним облучением, которое эффективно изменяет φ_c [за счет температурной зависимости $\varphi_c(T)$ показанной на рисунке 13(f)], что приводит к периодическому изменению знака диодного эффекта с ростом мощности. Такое поведение является ярким проявлением многозначной природы диодного эффекта в R состоянии. В частности, в асимметричных СКВИДах, состоящих исключительно из джозефсоновских контактов с однозначными ТФС, такого механизма диодного эффекта не существует и подобного поведения не наблюдается. Однако, напомним, что для контактов с однозначным ТФС асимметрия ступеней Шапиро все же может наблюдаться [как было показано ранее на рисунке 9], что связано с наличием фазового механизма диодного эффекта.

Кроме того, сосуществование слабого диодного эффекта в критических токах наряду со значительной асимметрией ступеней Шапиро также является особенностью наличия наномостика в асимметричном СКВИДе. В S состоянии, как упоминалось ранее в разделе 3.2.1, асимметрия критических токов согласно формуле (3.2.3) достигает максимального значения $\Delta I_c = 2\pi I_{nb}/\varphi_c$. В то же время асимметрия критических токов оказывается малой по сравнению с самими значениями критического тока, что приводит к малому значению диодной эффективности, наблюдаемой в эксперименте $\eta \approx \pi I_{nb}/\varphi_c (I_{nb} + I_{sns}) \approx 3\%$. Такое поведение является следствием большого значения критической фазы $\varphi_c = 58$ при $T = 50$ мК (температуры криостата в S состоянии).

Однако, в R состоянии, где проводятся измерения ступеней Шапиро, температура сильно выше: $T \sim (1 - 3)$ К. Из-за этого критические токи оказываются сильно подавленными, как показано на рисунке 13(d) и (e). Это объясняет сильное размытие ступеней Шапиро, наблюдаемое в эксперименте, и их относительно малую глубину. В то же время напомним, что асимметрия ступеней Шапиро определяется амплитудами первых гармоник $A_{1\pm}$ [смотри уравнение (3.1.3)], которые зависят от соотношения между I_{sns} и амплитудой первой гармоники ТФС наномостика $I_1^{(nb)} = 2I_{nb}/\varphi_c$. В R состоянии они оказываются сравнимы друг с другом, к примеру: $I_{sns} \approx 0.3$ мкА и $I_1^{(nb)} \approx 0.8$ мкА при $T = 1.8$ К. Это приводит к тому, что относительная асимметрия между A_{1+} и A_{1-} оказывается сильной (порядка самих амплитуд), что приводит к сильной асимметрии ступеней Шапиро, несмотря на их малые размеры. Таким образом, можно сказать, что асимметрия критических токов подавляется большим значением φ_c , в то время как асимметрия ступеней Шапиро оказывается значительной из-за сильно выраженной относительной асимметрии между A_{1+} и A_{1-} . Такое поведение является яркой особенностью, появляющейся из-за наличия многозначного ТФС наномостика.

4 Заключение

В данной работе мы изучили джозефсоновский диодный эффект в асимметричном СКВИДе, содержащем контакты с нетривиальными (несинусоидальными) ток-фазовыми соотношениями. Мы рассмотрели два основных механизма диодного эффекта, которые возникают в этом случае: фазовый механизм (в первой части работы), возникающий за счет интерференции различных гармоник при наличии сдвига фаз между ними в эффективном ток-фазовом соотношении СКВИДа, и амплитудный (во второй части работы), возникающий за счет асимметрии амплитуд джозефсоновских гармоник при различных направлениях тока при наличии контакта с многозначной ток-фазовой характеристикой. В обоих случаях сила диодного эффекта и его полярность управляются внешним магнитным потоком Φ .

В первой части работы мы сосредоточились на изучении фазового механизма диодного эффекта при наличии конечной емкости системы и тепловых флуктуаций. В этом случае мы использовали резистивно-емкостную модель, в которой сила зарядовых и температурных эффектов определяется параметром МакКамбера β и безразмерной температурой θ . В основном мы изучали особенности ДДЭ на примере минимальной модели, в которой ток-фазовое соотношение СКВИДа помимо первой джозефсоновской гармоники имеет также дополнительную вторую гармонику с безразмерной амплитудой A и фазовым сдвигом $\tilde{\phi}$ [смотри уравнение (2.1.2)]. При этом для описания асимметрии ВАХ мы использовали комбинацию различных пертурбативных методов, явных аналитических расчетов и численный анализ.

При наличии ненулевой емкости $\beta \neq 0$ ВАХ системы может стать гистерезисной и состоять из двух ветвей, соответствующих S и R состояниям. При этом возникают две новые качественные особенности: асимметрия токов возврата $j_{r\pm}$ и односторонний гистерезис, который можно наблюдать в определенном диапазоне β , как показано на рисунке 8. В этом диапазоне β система демонстрирует качественно различное поведение для разных направлений тока (гистерезисная ВАХ в одном направлении и безгистерезисная ВАХ в противоположном). В то же время ДДЭ в R состоянии подавляется с ростом емкости системы. В частности, при наличии переменного облучения это явление проявляется в ослаблении асимметрии ступеней Шапиро с ростом β .

В свою очередь тепловые флуктуации при $\theta \neq 0$ приводят к изменениям ВАХ за счет процессов термоактивации. Мы рассчитали асимметричные времена вылета $\tilde{\tau}_{l\pm}$ из S состояний, а затем в случае $\beta = 0$ получили из них явное выражение для ВАХ, которая демонстрирует экспоненциально сильную асимметрию при токах ниже критических. В то же время для случая $\beta \neq 0$ мы посчитали асимметрию токов переключения $j_{sw\pm}$, возникающих за счет тепловых флуктуаций.

Наконец, в заключительном разделе этой части, мы обсудили возможность управления состоянием диода путем приложения резонансного переменного сигнала в контактах с $\beta \gg 1$ и импульсами тока в режиме одностороннего гистерезиса при $\beta \sim 1$, а также кратко обсудили преимущества и недостатки использования контактов с различными значениями

β .

В качестве дальнейшего пути развития данной части работы планируется изучить особенности ДДЭ в квантовом режиме, когда фаза φ будет рассматриваться в качестве квантовой переменной (сопряженной заряду и испытывающей квантовые флуктуации), когда динамика системы будет выходить за рамки классических резистивной и резистивно-емкостных моделей.

Во второй части работы мы сосредоточились на теоретическом объяснении особенностей диодного эффекта, наблюдаемого в эксперименте группы В. С. Столярова в асимметричном СКВИДе, содержащем синусоидальный SNS контакт и сверхпроводящий наномостик с многозначной ток-фазовой характеристикой. Многозначная природа ток-фазовой характеристики заключается в нетривиальном значении критической фазы $\varphi_c \gg \pi$, что экспериментально проявляется в наблюдении нескольких веток критических токов на зависимости критического тока от магнитного поля [смотри рисунок 13].

Главной особенностью диодного эффекта, наблюдаемой экспериментально, является наличие значительной асимметрии ступеней Шапиро, существующей на фоне лишь слабой асимметрии критических токов. Для объяснения этого феномена мы разработали теоретическую модель на основе аналитического метода медленно меняющейся фазы, а также провели численное моделирование в рамках резистивной модели с тепловым шумом. Результаты продемонстрировали качественно хорошее согласие между теоретическими предсказаниями и экспериментальными данными.

Ключевое наблюдение нашей теоретической модели заключается в том, что в асимметричном СКВИДе, содержащем контакт с многозначной ток-фазовой характеристикой, при конечных магнитных полях наблюдается новый амплитудный механизм диодного эффекта, заключающийся в нашем случае в асимметрии $A_{1+} \neq A_{1-}$. Этот механизм приводит к сильной асимметрии ступеней Шапиро, однако, требует нетривиального значения критической фазы $\sin \varphi_c \neq 0$ и поэтому отсутствует в СКВИДах, где оба контакта обладают однозначной ток-фазовой характеристикой.

При этом знак и сила диодного эффекта в ступенях Шапиро контролируются комбинацией $\sin \phi \sin \varphi_c$, где ϕ — безразмерный магнитный поток через петлю интерферометра. Это объясняет тот факт, что ступени Шапиро демонстрируют периодическую зависимость (с периодом осцилляций СКВИДа) от магнитного поля, а также немонотонное поведение, наблюдаемое с ростом мощности внешнего облучения, которое обусловлено эффектом нагрева образца и соответствующей температурной зависимостью критической фазы от температуры $\varphi_c(T)$.

В дальнейшем мы собираемся изучить особенности диодного эффекта в асимметричном СКВИДе, содержащем два сверхпроводящих наномостика. Такие системы ранее активно изучались, но вне контекста диодного эффекта. При этом, как было показано выше, диодный эффект в системе со сверхпроводящим наномостиком демонстрирует ряд интересных эффектов и поэтому требует дальнейшего изучения.

По результатам проделанной работы одна статья опубликована в журнале Physical

Review В [39], а вторая статья находится на рассмотрении в том же журнале [37].

А Оценка индуктивности петли СКВИДа (приложение к разделу 3.1)

Чтобы гарантировать, что приложенный магнитный поток Φ почти полностью совпадает с магнитным потоком через петлю СКВИДа, мы оценим геометрическую индуктивность его плеч.

Обычно суммарный магнитный поток через петлю интерферометра представляет собой сумму внешнего потока Φ и потока, создаваемого циркулирующим током I_{circ} , который определяется как $L_{\text{loop}}I_{\text{circ}}$, где L_{loop} — геометрическая индуктивность. Используя электромагнитное моделирование и принимая во внимание геометрию образца, мы вычислили $L_{\text{loop}} = 10$ пГн. Индуктивность каждого плеча СКВИДа можно оценить как $L_{\text{arm}} = L_{\text{loop}}/2 = 5$ пГн, что оказывается значительно меньше индуктивностей SNS контакта $L_{\text{sns}} = \Phi_0/2\pi I_{\text{sns}} = 14$ пГн и наномостика $L_{\text{nb}} = \varphi_c \Phi_0/2\pi I_{\text{nb}} = 340$ пГн, рассчитанных при самой низкой температуре $T = 50$ мК. Кроме того, при рассмотрении ступеней Шапиро, которые возникают на R ветки ВАХ с $T \sim (1 - 3)$ К, индуктивности контактов становятся еще в несколько раз больше за счет подавления их критических токов температурой. Таким образом в R состоянии влияние геометрической индуктивности становится еще слабее. Поэтому в нашей модели, принимая во внимание приведенные выше оценки, мы пренебрегаем влиянием геометрической индуктивности и предполагаем, что поток в СКВИДе в точности равен внешнему потоку Φ .

В Температурная зависимость параметров перехода (приложение к разделу 3.2.1)

Мы подгоняем экспериментально измеренные критические токи I_{nb} , I_{sns} и зависимость критической фазы φ_c от температуры T следующим образом. Для наномостика мы предполагаем модель Лихарева-Якобсон [20, 21, 22], сформулированную для длинных и узких сверхпроводящих мостиков. В рамках этой модели критический ток и критическая фаза имеют следующие температурные зависимости

$$I_{\text{nb}}(T) = I_{\text{nb}}^{(f)}(1 - T/T_{\text{tr}})^{3/2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\varphi_c(T) = \varphi_c^{(f)}\sqrt{1 - T/T_{\text{tr}}}, \quad (\text{B.2})$$

где в качестве подгоночных параметров мы берем $I_{\text{nb}}^{(f)} = 88$ мкА, $\varphi_c^{(f)} = 62$ и $T_{\text{tr}} = 2.4$ К. Здесь T_{tr} — это температура перехода (критическая температура) наномостика, которая, как уже упоминалось ранее в разделе 3.2.1, значительно меньше критической температуры толстого ниобия. Результаты нашей подгонки представлены на рисунках 13(e) и (f) соответственно.

В то же время мы рассматриваем контакт через флейк $\text{Vi}_2\text{Te}_2\text{Se}$ в качестве длинного

грязного SNS контакта с критическим током, заданным выражением [65, 66]

$$I_{\text{sns}}(T) = \frac{64\pi T}{eR_{\text{sns}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{L_{\omega_n}} \frac{\Delta^2 \exp(-L/L_{\omega_n})}{\left[\omega_n + \Omega_n + \sqrt{2(\Omega_n^2 + \omega_n\Omega_n)}\right]^2}, \quad (\text{B.3})$$

где $\omega_n = (2n + 1)\pi T$, $\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$, и $L_{\omega_n} = \sqrt{\hbar D/2\omega_n}$.

Здесь R_{sns} — эффективное сопротивление SNS контакта, L — расстояние между сверхпроводящими электродами, D — коэффициент диффузии, а Δ — индуцированная сверхпроводящая щель в области под флейком. Экспериментально, критическая температура SNS контакта приблизительно равна температуре перехода наномостика. Поэтому, для простоты, мы предполагаем, что SNS контакт имеет ту же критическую температуру T_{tr} (которая входит в Δ), что и наномостик. В качестве подгоночных параметров мы берем R_{sns} и соотношение между длиной перехода L и тепловой длиной $L_T = \sqrt{\hbar D/2\pi T}$ при $T = 2$ К. Для получения результатов, представленных на рисунке 13(d), мы использовали следующие значения: $R_{\text{sns}} = 15.5$ Ом и $L/L_T = 5.73$ при $T = 2$ К. В соответствующем диапазоне температур, $T \sim (1 - 3)$ К, предположение о том, что SNS контакт можно считать длинным, выполняется, поскольку $L/L_T \sim 5$.

С Сдвиг ступеней Шапиро (приложение к разделу 3.2.2)

Причины, по которым ступени Шапиро расположены в полуцелых значениях $V/V_0 = n - 1/2$ вместо ожидаемых целых значений $V/V_0 = n$ остаются неясными. В ходе эксперимента были дополнительно измерены еще два образца. Оказалось, что сдвиг ступеней Шапиро не явления уникальным для основного образца явлением, поскольку тот же сдвиг и наличие диодного эффекта в ступенях Шапиро наблюдались также и в других образцах с похожими параметрами.

Полуцелые ступеньки Шапиро наблюдались при разных частотах внешнего облучения в диапазоне от $f_{\text{rf}} = 2.8$ ГГц до $f_{\text{rf}} = 3.8$ ГГц. Кроме того, при высокой мощности облучения, когда сверхток полностью подавлен [смотри верхнюю часть 15(d)], оказывалось возможным наблюдать ступени Шапиро от $|V|/V_0 = \frac{1}{2}$ до $|V|/V_0 = 17\frac{1}{2}$. Таким образом смещение положений ступеней Шапиро не может быть связано с включенным последовательно сопротивлением, поскольку это изменило бы период ступеней (по напряжению), что было бы заметно в столь широком диапазоне напряжений.

Отметим, что сдвиг ступеней Шапиро не может быть теоретически описан в рамках нашей резистивной модели, представленной уравнениями (3.2.6) и (3.2.7), которая предсказывает появление ступеней точно при $\bar{v} = (n/k)\omega$ (где n и k — целые числа) с наиболее выраженными ступенями с целыми номерами ($k = 1$). Поэтому для объяснения сдвига мы должны учитывать дополнительные факторы, выходящие за рамки представленной резистивной модели и которые могут быть связаны со сложной динамикой внутри самих контактов или в СКВИДе.

Одним из таких факторов является геометрическая индуктивность L_{loop} СКВИДа, которой мы пренебрегаем в нашей модели. Например, как было показано в работе [67], даже если оба джозефсоновских контакта в СКВИДе имеют синусоидальные ТФС, при достаточно большой индуктивности L_{loop} могут возникать дробные ступени Шапиро. Однако этот эффект исчезает, когда СКВИД содержит целое число квантов потока. В нашем же случае ступени Шапиро находятся в полуцелых позициях вне зависимости от значения потока через петлю СКВИДа. Поэтому мы можем заключить, что этот механизм не актуален в нашем случае. Кроме того, оценки показывают, что влияние индуктивности в нашем случае пренебрежимо мало.

Другой возможный фактор связан со свойствами R состояния в наномостике. Сверхпроводящий наномостик, используемый в эксперименте, длинный (в единицах длины когерентности), и может содержать несколько потенциальных “слабых” мест по своей длине. При $I > I_{\text{nb}}$ резистивное состояние начинается с проникновения вихря через самое слабое место. По мере увеличения тока вихри могут начать входить и в другие слабые места и начать взаимодействовать между собой. Общее поведение системы при этом может быть довольно сложным, что показано, например, в работе [68].

Кроме того, могут быть и другие факторы, которые могли бы вызвать этот эффект и которые не упомянуты выше. Например, аналогичное смещение ступеней Шапиро наблюдалось в работе [69] в совершенно другой системе по неизвестным причинам.

D Вычисление R_{\pm} в одногармоническом приближении (приложение к разделу 3.2.4)

Как упоминалось ранее в разделе 3.2.4, в одногармоническом приближении, заданным уравнением (3.2.13), эффективное уравнение (3.2.10) имеет вид обычного уравнения, описывающего динамику фазы θ_n для контакта с синусоидальным ТФС:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_n + j_{1\pm} \sin \theta_n &= \Delta j + \xi(\tau), \\ j_{1\pm} &= |A_{1\pm} J_n(j_{\text{ac}}/\omega)|.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Для дальнейшего анализа оказывается удобным работать со стационарным уравнением Фоккера-Планка, написанным на функцию распределения $P_{\text{st}\pm}(\theta_n)$, которое соответствует уравнению Ланжевена (D.1):

$$\frac{\partial P_{\text{st}\pm}}{\partial \theta_n} + \frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}} (\sin \theta_n - \Delta j / j_{1\pm}) P_{\text{st}\pm} = Q_{\pm},\tag{D.2}$$

где Q_{\pm} — величина, которую следует найти из условия нормировки $P_{\text{st}\pm}(\theta_n)$.

Для получения ВАХ необходимо решить уравнение Фоккера-Планка (D.2) и вычислить статистически усредненное напряжение. Для определенности мы будем считать $\Delta j > 0$ и учтем симметричную форму ступени Шапиро (относительно ее центра) в кон-

це расчета. Таким образом, мы получим вклад в напряжение от медленной динамики, который добавляется к быстрому вкладу $n\omega$. В результате:

$$|\langle \bar{v} \rangle - n\omega| = \int \bar{\varphi} P_{\text{st}\pm}(\varphi) d\varphi = \int (\Delta j - j_{1\pm} \sin \varphi) P_{\text{st}\pm}(\varphi) d\varphi = -2\pi j_{1\pm} \mathcal{T}_{\pm} Q_{\pm}. \quad (\text{D.3})$$

Теперь нам осталось только вычислить Q_{\pm} . Это можно сделать, используя метод вариации постоянной с учетом условия нормировки и периодичности: $P_{\text{st}\pm}(\varphi)$:

$$\frac{1}{Q_{\pm}} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(\frac{\varphi \Delta j / j_{1\pm} + \cos \varphi}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \int_{\varphi}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{x \Delta j / j_{1\pm} + \cos x}{\mathcal{T}_{\pm}}\right). \quad (\text{D.4})$$

Для вычисления интегралов в уравнении (D.4) мы воспользуемся следующим рядом Фурье

$$\exp\left(\frac{\cos \varphi}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) = I_0\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \cos k\varphi. \quad (\text{D.5})$$

Используя уравнение (D.5), мы можем представить Q_{\pm} в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{\pm}} = & - \int_0^{2\pi} d\varphi \left[I_0\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \cos k\varphi \right] \\ & \times \left[I_0\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \frac{\Delta j}{j_{1\pm} \mathcal{T}_{\pm}} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \frac{2(-1)^m}{m^2 + (\Delta j / j_{1\pm} \mathcal{T}_{\pm})^2} \left(\frac{\Delta j}{j_{1\pm} \mathcal{T}_{\pm}} \cos m\varphi - m \sin m\varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Выполняя интегрирование по φ и подставляя уравнение (D.6) в уравнение (D.3), получаем выражение для среднего напряжения

$$\langle \bar{v} \rangle = n\omega + \Delta j \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2\left(\frac{1}{\mathcal{T}_{\pm}}\right) \frac{(-1)^k (2 - \delta_{k,0}) (\Delta j / j_{1\pm})^2}{(\Delta j / j_{1\pm})^2 + \mathcal{T}_{\pm}^2 k^2} \right]^{-1}, \quad (\text{D.7})$$

которое справедливо для обоих знаков $\langle \bar{v} \rangle$ и Δj . Взяв производную от уравнения (D.7), мы получим выражение для дифференциального сопротивления в форме уравнения (3.2.14) из основного текста.

Отметим, что похожим методом из соответствующего уравнения Фоккера-Планка может быть получено выражение для ВАХ (2.4.9). Этот альтернативный вывод, не предполагающий вычисление времен вылета $\tilde{\tau}_{1\pm}$, был представлен ранее в бакалаврском дипломе [38].

Е Зависимость глубин ступеней Шапиро от мощности внешнего облучения (приложение к разделу 3.2.4)

Как упоминалось ранее в разделе 3.2.2, зависимость глубин ступеней Шапиро от мощности внешнего облучения демонстрирует немонотонное поведение, отличное от бес-

селева закона, за счет нагрева образца. Наша цель — теоретически воспроизвести экспериментальную зависимость дифференциального сопротивления от мощности облучения, которая представлена на рисунке 17(с) при $\Phi/\Phi_0 = 0,75$ для $n = \pm 7$. Для того чтобы это сделать нам нужно связать мощность облучения P_{rf} и температуру электронной системы T , а затем подставить зависимость $T(P_{\text{rf}})$ в уравнение (3.2.14). Кроме того, нам нужно связать мощность облучения и величину переменного тока $I_{\text{ac}}(P_{\text{rf}})$, которая также входит в уравнение (3.2.14).

Мы воспользуемся уравнением баланса энергии, предполагая, что электронная система охлаждается фоновой подсистемой [60]:

$$P_{\text{rf}}/Y + P_{\text{dc}} = C_{\text{e-ph}} (T^5 - T_0^5), \quad (\text{E.1})$$

где Y — фактор, определяющий, какая часть мощности внешнего облучения передается образцу, $C_{\text{e-ph}}$ — константа электрон-фононного взаимодействия, $T_0 = 50$ мК — температура фоновой подсистемы, а $P_{\text{dc}} = I_{\text{dc}}^2 R_0$ — мощность тепла, обусловленная постоянным током $|I_{\text{dc}}| = 20$ мкА, что соответствует значениям в центрах ступеней Шапиро. Также мы предположим, что переменный ток создается микроволновым облучением и, следовательно, имеет корневую зависимость от мощности:

$$P_{\text{rf}}/Y = I_{\text{ac}}^2 R_0/2. \quad (\text{E.2})$$

Для процедуры подгонки мы перепишем уравнение (E.1) в виде

$$T = A_{\text{fit}} (P_{\text{rf}} + Y P_{\text{dc}})^{1/5}, \quad (\text{E.3})$$

где $A_{\text{fit}} = (C_{\text{e-ph}} Y)^{-1/5}$. Здесь мы пренебрегаем членом CT_0^5 из-за его малой величины.

Зависимость $R_{\pm}(P_{\text{rf}})$ можно численно получить из уравнений (E.2) и (E.3). При этом в уравнении (E.2) в качестве подгоночного параметра вместо Y мы используем значение переменного тока I_{ac} при некоторой мощности P_{rf} . Для этого мы выберем $P_{\text{rf}} = 1$ мВт, поскольку это значение соответствует наиболее ярко выраженному максимуму на рисунке 17(с). В то же время в уравнении (E.3) мы используем A_{fit} в качестве второго подгоночного параметра нашей модели.

В процессе подгонки получаются графики, похожие на рисунок 17(f), однако с другим количеством экстремумов, их амплитудами и местоположениями. В выбранном нами конечном варианте подгонки мы требовали, чтобы местоположение наивысшего максимума было при $P_{\text{rf}} = 1$ мВт также как и на рисунке 17(с). Мы также подбирали подгоночные параметры таким образом, чтобы количество экстремумов и их амплитуды получилась похожими на экспериментальные данные с рисунка 17(с). В результате мы остановились на следующем значении подгоночных параметров: $A_{\text{fit}} = 1.72$ К/мВт^{1/5}, и $I_{\text{ac}}(1 \text{ mW}) = 15.7$ мкА. Отметим, что при этих значениях наша модель предсказывает, что температура изменяется от 2.2 К при $P_{\text{rf}} = 0$ мВт до 2.4 К при $P_{\text{rf}} = 2$ мВт. Результат подгонки представлен на рисунке 17(f).

Список литературы

- [1] A.Malvino, D.Bates, and P.Hoppe, *ElectronicPrinciples* – McGrawHill, 2020.
- [2] Jiang K., Hu J. Superconducting diode effects //*Nature Physics*. – 2022. – Vol. 18. – №. 10. – P. 1145-1146.
- [3] Nadeem M., Fuhrer M. S., Wang X. The superconducting diode effect //*Nature Reviews Physics*. – 2023. – Vol. 5. – №. 10. – P. 558-577.
- [4] Edelstein V. M. The Ginzburg-Landau equation for superconductors of polar symmetry //*Journal of Physics: Condensed Matter*. – 1996. – Vol. 8. – №. 3. – P. 339.
- [5] Wakatsuki R. et al. Nonreciprocal charge transport in noncentrosymmetric superconductors //*Science advances*. – 2017. – Vol. 3. – №. 4.
- [6] Yasuda K. et al. Nonreciprocal charge transport at topological insulator/superconductor interface //*Nature communications*. – 2019. – Vol. 10. – №. 1.
- [7] Ando F. et al. Observation of superconducting diode effect //*Nature*. – 2020. – Vol. 584. – №. 7821. – P. 373-376.
- [8] Yuan N. F. Q., Fu L. Supercurrent diode effect and finite-momentum superconductors //*Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2022. – Vol. 119. – №. 15.
- [9] Ilić S., Bergeret F. S. Theory of the supercurrent diode effect in Rashba superconductors with arbitrary disorder //*Physical Review Letters*. – 2022. – Vol. 128. – №. 17.
- [10] Chen C. Z. et al. Asymmetric Josephson effect in inversion symmetry breaking topological materials //*Physical Review B*. – 2018. – Vol. 98. – №. 7.
- [11] Kopasov A. A., Kutlin A. G., Mel'nikov A. S. Geometry controlled superconducting diode and anomalous Josephson effect triggered by the topological phase transition in curved proximitized nanowires //*Physical Review B*. – 2021. – Vol. 103. – №. 14.
- [12] Zhang Y. et al. General theory of Josephson diodes //*Physical Review X*. – 2022. – Vol. 12. – №. 4.
- [13] Baumgartner C. et al. Supercurrent rectification and magnetochiral effects in symmetric Josephson junctions //*Nature nanotechnology*. – 2022. – Vol. 17. – №. 1. – P. 39-44.
- [14] Fominov Y. V., Mikhailov D. S. Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode //*Physical Review B*. – 2022. – Vol. 106. – №. 13.
- [15] Souto R. S., Leijnse M., Schrade C. Josephson diode effect in supercurrent interferometers //*Physical Review Letters*. – 2022. – Vol. 129. – №. 26.

- [16] Gupta M. et al. Gate-tunable superconducting diode effect in a three-terminal Josephson device //Nature communications. – 2023. – Vol. 14. – №. 1. – P. 3078.
- [17] Haenel R., Can O. Superconducting diode from flux biased Josephson junction arrays //arXiv preprint: 2212.02657. – 2022.
- [18] Ciaccia C. et al. Gate-tunable Josephson diode in proximitized InAs supercurrent interferometers //Physical Review Research. – 2023. – Vol. 5. – №. 3.
- [19] Cuozzo J. J. et al. Microwave-tunable diode effect in asymmetric SQUIDs with topological Josephson junctions //Physical Review Research. – 2024. – Vol. 6. – №. 2.
- [20] Likharev K. K., Yakobson L. A. Steady-state properties of superconducting bridges. //Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki. – 1975. – Vol. 45 – P. 1503-1509.
- [21] Likharev K. K. Superconducting weak links //Reviews of Modern Physics. – 1979. – Vol. 51. – №. 1. – P. 101.
- [22] Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'Ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions //Reviews of modern physics. – 2004. – Vol. 76. – №. 2. – P. 411.
- [23] Hopkins D. S. et al. Quantum interference device made by DNA templating of superconducting nanowires //Science. – 2005. – Vol. 308. – №. 5729. – P. 1762-1765.
- [24] Murphy A., Bezryadin A. Asymmetric nanowire SQUID: Linear current-phase relation, stochastic switching, and symmetries //Physical Review B. – 2017. – Vol. 96. – №. 9.
- [25] Dausy H. et al. Impact of kinetic inductance on the critical-current oscillations of nanobridge SQUIDs //Physical Review Applied. – 2021. – Vol. 16. – №. 2.
- [26] Nulens L. et al. Metastable states and hidden phase slips in nanobridge SQUIDs //Physical Review B. – 2022. – Vol. 106. – №. 13..
- [27] Misaki K., Nagaosa N. Theory of the nonreciprocal Josephson effect //Physical Review B. – 2021. – Vol. 103. – №. 24.
- [28] Wu H. et al. The field-free Josephson diode in a van der Waals heterostructure //Nature. – 2022. – Vol. 604. – №. 7907. – P. 653-656.
- [29] Steiner J. F. et al. Diode effects in current-biased Josephson junctions //Physical Review Letters. – 2023. – Vol. 130. – №. 17.
- [30] Shapiro S. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations //Physical Review Letters. – 1963. – Vol. 11. – №. 2. – P. 80.
- [31] Likharev K. K. Dynamics of Josephson junctions and circuits. – Routledge, 2022.
- [32] Barone A. et al. Physics and applications of the Josephson effect. – Wiley, 1982.

- [33] Valentini M. et al. Parity-conserving Cooper-pair transport and ideal superconducting diode in planar germanium //Nature Communications. – 2024. – Vol. 15. – №. 1. – P. 169.
- [34] Leblanc A. et al. From nonreciprocal to charge-4e supercurrent in Ge-based Josephson devices with tunable harmonic content //Physical Review Research. – 2024. – Vol. 6. – №. 3.
- [35] Li Y. et al. Interfering Josephson diode effect in Ta₂Pd₃Te₅ asymmetric edge interferometer //Nature Communications. – 2024. – Vol. 15. – №. 1.
- [36] Ciaccia C. et al. Charge-4e supercurrent in a two-dimensional InAs-Al superconductor-semiconductor heterostructure //Communications Physics. – 2024. – Vol. 7. – №. 1. – P. 41.
- [37] Kalashnikov D. S., Seleznev G. S. et al. Diode effect in Shapiro steps in asymmetric SQUID with a superconducting nanobridge //Submitted to Physical Review B. – 2025.
- [38] Селезнев Г. С. Джозефсоновский диодный эффект в резистивной модели с емкостью // Бакалаврский диплом. – 2023
- [39] Seleznev G. S., Fominov Y. V. Influence of capacitance and thermal fluctuations on the Josephson diode effect in asymmetric higher-harmonic SQUIDs //Physical Review B. – 2024. – Vol. 110. – №. 10.
- [40] Chen Y. C., Fisher M. P. A., Leggett A. J. The return of a hysteretic Josephson junction to the zero-voltage state: I-V characteristic and quantum retrapping //Journal of applied physics. – 1988. – Vol. 64. – №. 6. – P. 3119-3142.
- [41] Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. – Chapman and Hall/CRC, 2024.
- [42] Purrello V. H. et al. Hysteretic depinning of a particle in a periodic potential: Phase diagram and criticality //Physical Review E. – 2020. – Vol. 102. – №. 2.
- [43] Seoane Souto R. et al. Tuning the Josephson diode response with an ac current //Physical Review Research. – 2024. – Vol. 6. – №. 2.
- [44] Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N. Resonance reduction of the lifetime of the metastable state of tunnel junctions //Journal of low temperature physics. – 1986. – Vol. 63. – P. 317-329.
- [45] Devoret M. H. et al. Resonant activation of a Brownian particle out of a potential well: Microwave-enhanced escape from the zero-voltage state of a Josephson junction //Physical Review B. – 1987. – Vol. 36. – №. 1. – P. 58.
- [46] Grønbech-Jensen N. et al. Microwave-induced thermal escape in Josephson junctions //Physical review letters. – 2004. – Vol. 93. – №. 10.

- [47] Krasnov V. M. Resonant switching current detector based on underdamped Josephson junctions //Physical Review Applied. – 2024. – Vol. 22. – №. 2.
- [48] Ivanchenko Y. M., Zil’berman L. A. The Josephson effect in small tunnel contacts //Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1969. – Vol. 28. – P. 1272.
- [49] Ambegaokar V., Halperin B. I. Voltage due to thermal noise in the dc Josephson effect //Physical Review Letters. – 1969. – Vol. 22. – №. 25. – P. 1364.
- [50] Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions //physica. – 1940. – Vol. 7. – №. 4. – P. 284-304.
- [51] Büttiker M., Harris E. P., Landauer R. Thermal activation in extremely underdamped Josephson-junction circuits //Physical Review B. – 1983. – Vol. 28. – №. 3. – P. 1268.
- [52] V. I. Mel’nikov, The Kramers problem: Fifty years of development// Phys. Rep. 209–1991.
- [53] Babich I. et al. Limitations of the current–phase relation measurements by an asymmetric dc-SQUID //Nano Letters. – 2023. – Vol. 23. – №. 14. – P. 6713-6719.
- [54] Schmidt V. V. The physics of superconductors: Introduction to fundamentals and applications. – Springer Science & Business Media, 2013.
- [55] Fujimaki N., Okabe Y., Okamura S. Phase-locking and microwave impedance of Josephson junctions with linear-periodic current-phase relations //Journal of Applied Physics. – 1980. – Vol. 51. – №. 6. – P. 3409-3416.
- [56] Dinsmore R. C., Bae M. H., Bezryadin A. Fractional order Shapiro steps in superconducting nanowires //Applied physics letters. – 2008. – Vol. 93. – №. 19.
- [57] Hazra D. et al. Hysteresis in superconducting short weak links and μ -SQUIDs //Physical Review B. – 2010. – Vol. 82. – №. 18.
- [58] Blois A. et al. Heat propagation models for superconducting nanobridges at millikelvin temperatures //Superconductor Science and Technology. – 2016. – Vol. 30. – №. 1.
- [59] Stolyarov V. S. et al. Josephson current mediated by ballistic topological states in $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.3}\text{Se}_{0.7}$ single nanocrystals //Communications Materials. – 2020. – Vol. 1. – №. 1. – P. 38.
- [60] De Cecco A. et al. Interplay between electron overheating and ac Josephson effect //Physical Review B. – 2016. – Vol. 93. – №. 18.
- [61] Shelly C. D. et al. Existence of Shapiro steps in the dissipative regime in superconducting weak links //Physical Review Applied. – 2020. – Vol. 13. – №. 2.
- [62] Stephen M. J. Noise in a driven Josephson oscillator //Physical Review. – 1969. – Vol. 186. – №. 2. – P. 393.

- [63] Kautz R. L. Noise, chaos, and the Josephson voltage standard //Reports on Progress in Physics. – 1996. – Vol. 59. – №. 8. – P. 935.
- [64] Falco C. M. et al. Effect of thermal noise on current-voltage characteristics of Josephson junctions //Physical Review B. – 1974. – Vol. 10. – №. 5. – P. 1865.
- [65] Zaikin A., Zharkov G. Theory of wide dirty SNS junctions //Sov. J. Low Temp. Phys.(Engl. Transl.) – 1981. – Vol. 7. – №. 3.
- [66] Dubos P. et al. Josephson critical current in a long mesoscopic SNS junction //Physical Review B. – 2001. – Vol. 63. – №. 6.
- [67] Early E. A., Clark A. F., Lobb C. J. Physical basis for half-integral Shapiro steps in a DC SQUID //Physica C: Superconductivity. – 1995. – Vol. 245. – №. 3-4. – P. 308-320.
- [68] Grebenchuk S. Y., Cattaneo R., Krasnov V. M. Nonlocal long-range synchronization of planar Josephson-junction arrays //Physical Review Applied. – 2022. – Vol. 17. – №. 6.
- [69] Kazmin D. Y. et al. Fractional ac Josephson effect as evidence of topological hinge states in a Dirac semimetal NiTe₂ //arXiv preprint: 2404.17920 – 2024.