

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

Аномальный эффект Холла и нечетная
вязкость двумерного электронного газа
(Дипломная работа магистра)

Студент группы М02–303л:
Зограбян Д.С.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., член-корр. РАН Глазов М.М.

МФТИ 2025

Аннотация

В связи с развитием нанотехнологий в последние годы стали популярны системы, где реализуется недиффузионный электронный транспорт. В частности, широко изучаются системы, где может реализоваться гидродинамический транспорт электронов. В таких системах активно исследуются магнитотранспортные явления, а также возникают новые эффекты, или существенно меняются уже имеющиеся. В данной работе представлена теория аномального – спин-зависимого транспорта электронов и, в частности, эффекты нечетной вязкости электронного газа, которая возникает при учете спин-орбитального взаимодействия и беспорядка в системе. Нечетная вязкость присутствует в электронных системах с нарушенной симметрией по отношению к обращению времени, которая в нашем случае возникает благодаря наличию магнитного поля. В работе получены выражения для нечетной вязкости из-за наличия спин-орбитального взаимодействия и дальнодействующих примесей. Показано, что нечетная вязкость существенно зависит от вида потенциала примесей. Приведены её зависимости от длины экранировки, в частности асимптотическое выражение для гауссового потенциала. Также выведены квазигидродинамические уравнения для электронного газа с учетом аномальных вкладов. Получены как уравнения для электрического тока, так и для спинового, которые сцеплены благодаря наличию спин-орбитального взаимодействия.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	5
2.1	Аномальный эффект Холла	5
2.2	Мотивация	8
2.3	Нечетная вязкость	11
3	Нечетная вязкость спин-поляризованных электронов при рассеянии на статическом беспорядке	17
3.1	Асимметричное рассеяние	17
3.2	Интеграл столкновений с учетом асимметричного рассеяния	22
3.3	Нечетная вязкость при наличии асимметричного рассеяния на беспорядке	24
4	Гидродинамические уравнения с учетом аномальных вкладов	30
4.1	Аномальные механизмы	32
4.2	Аномальные вклады в гидродинамические уравнения .	34
4.2.1	Уравнение непрерывности	34
4.2.2	Уравнение Навье-Стокса	36
4.3	Уравнения на электрические и спиновые токи	37
5	Заключение	44

1 Введение

В последние годы все большее внимание исследователей привлекают транспортные и магнитотранспортные эффекты в сверхчистых двумерных электронных системах, где процессы рассеяния на статических дефектах и фонах подавлены по сравнению с процессами электрон-электронного рассеяния, рассеяния на электронах на шероховатых границах канала и плавном беспорядке [1–5]. При этом возможна реализация как баллистического, так и гидродинамического режимов распространения электронов. В последнем процессы диссипации контролируются электронной вязкостью [6, 7]. Особый интерес вызывают явления, где отличия сверхчистых систем от обычных (диффузионных) проявляются наиболее ярко. Среди таковых – нормальный и аномальный эффекты Холла и подобные спин-зависимые явления [8–21].

Обычно гидродинамический режим распространения квазичастиц связывают с ситуацией, когда межчастичные столкновения доминируют над любыми другими диссипативными процессами, что позволяет представить функцию распределения квазичастиц в виде равновесной (функции Ферми-Дирака для электронов или Бозе-Эйнштейна для экситонов), параметры которой (температура, химический потенциал, средняя – гидродинамическая – скорость, т.е. сдвиг распределения в \mathbf{k} -пространстве) определяются внешними воздействиями [22, 23]. Однако возможна реализация режима транспорта, подобного гидродинамическому, в случае, если квазичастицы взаимодействуют с плавным беспорядком, см., например, [14] и ссылки, приведенные там. В этом случае времена релаксации угловых гармоник функции распределения резко сокращаются с увеличением номера гармоники. В частности, релаксация второй угловой гармоники, которая и определяет вязкость, происходит в четыре раза быстрее, чем релаксация первой, которая отвечает за средний импульс электронов. Именно такая ситуация в основном и будет нас интересовать с

точки зрения аномального, спин-зависимого транспорта.

Цель данной работы – разработать микроскопическую теорию аномального эффекта Холла в двумерных электронных системах с плавным беспорядком и выявить роль недиагональной (нечетной) вязкости в формировании аномального холловского напряжения. В работе выведено выражение для нечетной вязкости, связанной с асимметричным рассеянием электронов на примесях, которое обусловлено наличием спин-орбитального взаимодействия. Данный вклад в нечетную вязкость существенно зависит от типа дальнедействующего потенциала примесей и, в частности, от его радиуса корреляции. В работе рассмотрены два типа потенциала: экранированный кулоновский потенциал и гауссов потенциал. Приведены численные результаты для обоих случаев, а так же асимптотическое поведение нечетной вязкости в случае гауссового потенциала примесей.

Также выведены квазигидродинамические уравнения для электрического и спинового тока с учетом нечетной вязкости от асимметричного рассеяния, а также всех остальных аномальных механизмов: аномальной скорости из-за наличия кривизны Берри и сдвигов волновых пакетов при рассеянии на примесях. Показано, что электрический и спиновый ток оказываются сцепленными из-за наличия аномальных вкладов. Приведена система уравнений на нормальные и аномальные компоненты электрических и спиновых токов.

В гл. 2 обсуждаются основные понятия, о которых пойдет речь в данной работе. В гл. 3 разбирается вывод нечетной вязкости из-за наличия асимметричного рассеяния электронов на примесях. В гл. 4 выведены гидродинамические уравнения для электрического и спинового тока с учетом всех аномальных механизмов. Основные результаты работы кратко приведены в гл. 5

2 Постановка задачи

В данном разделе мы дали основные понятия и эффекты, которые будут обсуждаться в работе. Приводится качественное описание аномального эффекта Холла, его связь со спиновым эффектом Холла. Далее разбирается вывод коэффициентов тензора вязкостей через кинетическое уравнение Больцмана на примерах вывода обычной (диагональной) вязкости вырожденного электронного газа, а так же дается вывод холловской вязкости. Приводится вывод асимметричного рассеяния электронов на примесях и вывод интеграла столкновений с учетом асимметричного рассеяния.

2.1 Аномальный эффект Холла

Уже более полутора века назад Эдвин Холл открыл эффект позже названный его именем: эффект Холла [24]. Эффект заключается в том, что если взять проводник, пустить по нему электрический ток и приложить магнитное поле перпендикулярное току, то на торцах проводника начнет накапливаться электрический заряд. Эффект этот связан с наличием силы Лоренца, которая искривляет траектории электронов “прижимая” их к торцам проводника. Схематически эффект Холла, который далее мы будем называть нормальным или обычным приведен на рис.1(а).

В последствии были обнаружены различные вариации эффекта Холла: включая квантовый, аномальный и спиновый. Аномальный эффект Холла был обнаружен самим Э. Холлом через два года после обнаружения обычного эффекта Холла [25]. В некоторых магнитных материалах оказалось, что эффект Холла аномально большой, более того, он возникает и без внешнего магнитного поля, а связан лишь с намагниченностью образца. Микроскопическая теория аномального эффекта Холла появилась только во второй половине прошлого века. Было показано, что эффект возникает из-за наличия спин-

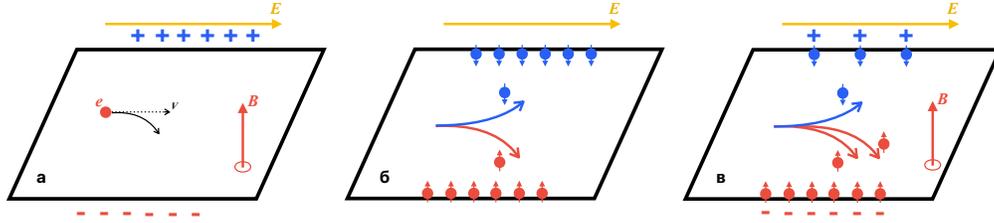


Рис. 1: (а) Нормальный эффект Холла связанный с наличием силы Лоренца при наличии магнитного поля. (б) Спиновый эффект Холла связанный со спин-орбитальным взаимодействием приводящий к накоплению спина на торцах. (в) Аномальный эффект Холла, который возникает при наличии магнитного поля, который приводит к конверсии спинового тока в электрический и, соответственно, накоплению заряда на краях образца.

орбитального взаимодействия. Качественно картина состоит в том, что электроны с разными проекциями спина при наличии электрического поля начинают поворачиваться преимущественно в противоположные стороны, это приводит, в частности, к спиновому току, протекающему в направлении, поперечном электрическому току, и к спиновому эффекту Холла как это показано на рис. 1(б). Основных механизмов, которые приводят к такой асимметрии движения по спину всего три, мы их обсудим в дальнейшем подробнее. Здесь приведем лишь их краткое описание. Первый вклад – аномальная скорость из-за наличия кривизны Берри [26]. Данный эффект даёт добавку в обобщенную скорость электронов, который имеет разные знаки для различных проекций спина электронов. Качественно эффект показан на рис.2(а). Вторым эффектом – сдвиг волновых пакетов в координатном пространстве при рассеянии на примесях [27] (см. рис. 2(б)). Этот эффект даёт, вообще говоря, два вклада в спиновый ток: сдвиговая скорость и аномальное распределение. Из-за многократного рассеяния электрона на примесях эффективно появляется

добавка к обобщенной скорости, которую обычно называют сдвиговой скоростью. При наличии электрического поля в системе, в процессе рассеяния электронов на примесях и, соответственно, сдвига их координат, электрическое поле совершает работу, которую нужно учитывать (например, при упругом рассеянии). Данный эффект дает ненулевую добавку в интеграл столкновений при распределении Ферми-Дирака, из чего следует, что равновесное распределение имеет добавку, которую обычно называют аномальным распределением. Последний аномальный вклад, который мы и будем в основном обсуждать, это вклад асимметричного рассеяния на примесях [28]. Для определенной проекции спина электрона вероятности рассеяния “направо” и “налево” различаются, и направление более вероятного рассеяния меняется при изменении знака спиновой проекции, что показано на рис. 2(в). Именно данный механизм создает в случае дальнедействующих примесей основной вклад в нечетную вязкость, которую будем детально обсуждать в данной работе.

При наличии магнитного поля появляется и ненулевая спиновая поляризация в системе – электронов с одной из проекций спина становится больше, чем с другим. При этом, естественно, спиновый ток конвертируется в электрический и появляется добавка к обычному эффекту Холла. При наличии границ электронный заряд накапливается и появляется так называемое холловское поле перпендикулярное направлению тока. В случае замкнутой цепи имеется холловский ток, поперечный приложенным электрическим и магнитным полям [29].

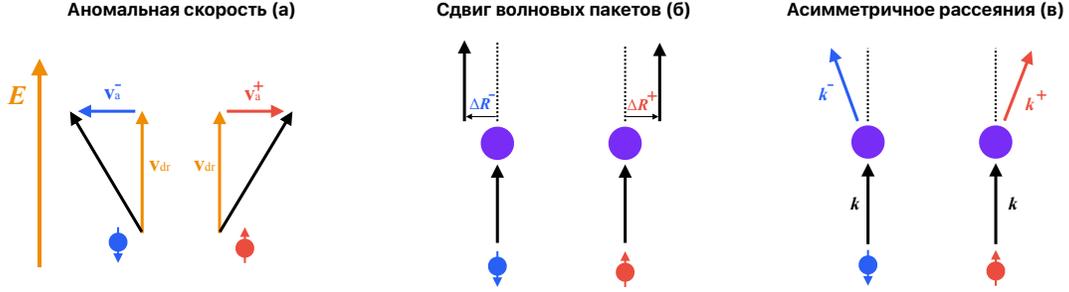


Рис. 2: (а) Аномальная скорость из-за наличия кривизны Берри. На рисунке \mathbf{v}_{dr} – дрейфовая скорость электронов, а \mathbf{v}_a^\pm – соответственно аномальные скорости для различных проекций спина. (б) Сдвиг волновых пакетов при рассеянии на примесях. Фиолетовые круги на рисунке — примеси, на которых рассеиваются электроны. ΔR^\pm – соответственно сдвиги для электронов с различными проекциями спинов, которые направлены в противоположные стороны. (в) Асимметричное рассеяние на примесях. На рисунке \mathbf{k}^\pm – волновые векторы электронов с соответствующими проекциями спина после рассеяния на примеси.

2.2 Мотивация

Теория аномального и спинового эффектов Холла была детально разработана для трехмерных и двумерных систем, где имеет место диффузионное движение электронов: в таких системах длина свободного пробега носителей заряда заметно меньше, чем их геометрические размеры (см. например обзоры [26, 30]). Значительно меньшее число работ посвящено аномальному и спиновому эффекту Холла в сверхчистых системах, где реализуется баллистический и гидродинамический режимы транспорта [15, 16, 31].

Рассмотрим двумерный электронный газ, который находится в канале, простирающемся вдоль оси y плоскости (xy) . Пусть внешнее

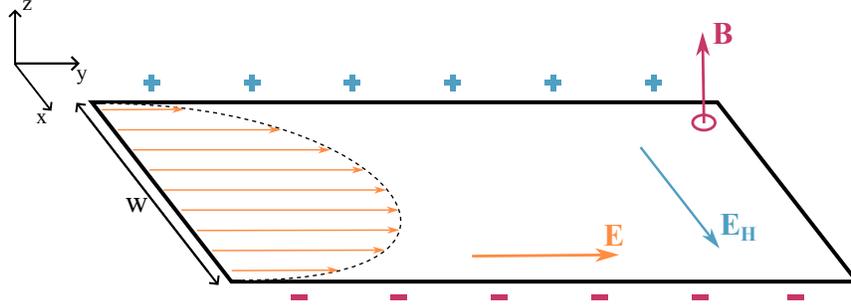


Рис. 3: Схематическое изображение бесконечного вдоль оси y канала с шириной w вдоль оси x . Электрическое поле направлено вдоль канала ($\mathbf{E} \parallel y$), а магнитное поле перпендикулярно плоскости движения частиц ($\mathbf{B} \parallel z$). Из-за наличия магнитного поля заряд накапливается на краях образца, что приводит к возникновению холловского электрического поля перпендикулярно направлению канала ($\mathbf{E}_H \parallel x$). На рисунке приведен так же параболический профиль тока вдоль канала в пределах гидродинамического транспорта электронов.

электрическое поле $\mathbf{E} \parallel y$, а магнитное поле $\mathbf{B} \parallel z$. Ширина канала (вдоль оси x) составляет w , см. рис. 3.

Постоянный электрический ток может течь только вдоль y , поэтому в рассматриваемой геометрии эффект Холла приводит к накоплению зарядов на краях канала и возникновению холловского электрического поля $\mathbf{E}_H \parallel x$ [24, 25]. Как известно, в поле Холла $\mathbf{E}_H = \mathbf{E}_H^n + \mathbf{E}_H^a$ имеются два вклада: “нормальный” (\mathbf{E}_H^n), обусловленный действием силы Лоренца на электроны, и аномальный (\mathbf{E}_H^a), который пропорционален степени спиновой поляризации электронов и связан со спин-орбитальным взаимодействием [26, 30, 32–38]. Именно аномальный вклад нас и будет интересовать в данной работе.

Ранее в работах [15, 31] обсуждался аномальный эффект Хол-

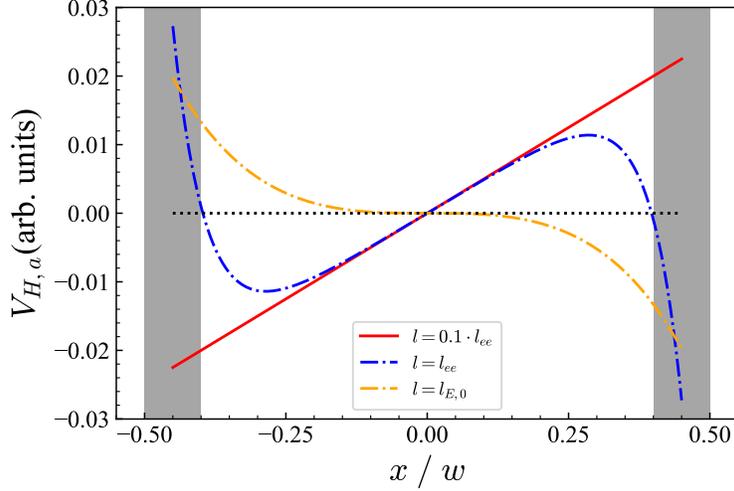


Рис. 4: Изменение холловского потенциала (разности потенциалов на противоположных гранях образца в направлении, противоположном направлению протекания тока) при увеличении длины электрон-примесного рассеяния. Видно, что холловское поле (производная потенциала) уменьшается. На картинке $l_{E,0} \approx 20l_{ee}$. Красная линия соответствует диффузному пределу транспорта, оранжевая гидродинамическому, синяя – переход между двумя пределами. Серыми обозначены области, где графики некорректны, т.к. не работают приближения, использованные при их получении. Из работы [31].

ла в гидродинамическом и баллистическом режимах, когда длина импульсной релаксации заметно превышала характерные размеры системы. В частности в работах получены результаты для аномального холловского поля в *гидродинамическом* режиме, когда длина электрон-электронных столкновений намного меньше размеров системы. Оказывалась, что при отсутствии примесей аномальный эффект Холла обращается в нуль. Фактически, для всех исследованных ранее механизмов возникновения холловского тока и напряжения требуется рассеяние электронов по импульсу, иначе “разворот” тока

кажется невозможным. Из рис. 4 (из статьи [31]) видно, что холловский потенциал (и, соответственно, холловское поле) уменьшаются при увеличении длины импульсной релаксации, т.е. при уменьшении концентрации примесей.

Однако, в теории нормального эффекта Холла известен еще один вклад в холловское поле и напряжение, который может возникать в сверхчистых системах, где примесей внутри проводящего канала нет. Этот эффект связан с возникновением холловской или нечетной (также называемой недиагональной) вязкости, поясним ее возникновение более подробно. Именно этот эффект и составляет предмет исследования в данной работе.

2.3 Нечетная вязкость

Обсудим, что из себя представляет нечетная или недиагональная вязкость в случае двумерного электронного газа. Как известно, во многих случаях такую систему можно описывать в гидродинамическом приближении [1, 39–41], см. также ниже. Для этого запишем уравнение Навье-Стокса с учетом несжимаемости электронного газа

$$\frac{\partial n\mathbf{u}}{\partial t} = n(\eta_{xx}\Delta\mathbf{u} + \eta_{xy}\Delta\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}) - \frac{n\mathbf{u}}{\tau} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

где n – концентрация электронов, \mathbf{u} – макроскопическая скорость, τ – время релаксации связанное с наличием примесей или фононов в системе, \mathbf{F} – внешние силы (сила Лоренца, сила, действующая на электроны со стороны внешнего электрического поля), η_{xx} – диагональная вязкость, а η_{xy} – нечетная (недиагональная, холловская) вязкость. Коэффициенты

$$\eta_{xy} = -\eta_{yx},$$

что отражает соотношение Онзагера. Отметим, что $\eta_{xx} = \eta_{yy}$ – диссипативная вязкость, она меняет знак при обращении времени (содержит нечетные степени диссипативных констант).

Уравнение (1) следует выводить из микроскопической модели. Основным инструментом в нашей работе – кинетическое уравнение Больцмана, используя которое мы и выводим вклады η_{xx} и η_y в (1). Приведем краткий вывод соответствующих следуя [42]. Пусть у нас имеется локально равновесная функция распределения

$$f_0 = \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2/2-\mu}{T}\right\}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_p = \mathbf{p}/m$ – скорость, p – квазиимпульс электрона, m – его эффективная масса, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{v} \rangle$ – макроскопическая скорость движения жидкости, зависящая от координаты, μ – химический потенциал, который в дальнейшем будем считать равным энергии Ферми $\mu \approx \varepsilon_F$, т.к. для низких температур, рассматриваемых здесь, поправка к μ квадратична по температуре T . Параметры функции распределения T и μ могут плавно зависеть от координат и времени. Далее запишем кинетическое уравнение. Пусть для простоты нет внешних полей

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(v_\alpha f)}{\partial r_\alpha} = I\{f\}, \quad (3)$$

где $\alpha \in \{x, y\}$, компонента векторов скорости или координаты, $I\{f\}$ – интеграл столкновений общего вида, который может в себе содержать как интеграл электрон-примесных (фононных) столкновений, так и электрон-электронных столкновений. Введем концентрацию частиц $n = 2 \int f (d^2p)$ (двойка учитывает спиновое вырождение, а обозначение $(d^2p) = d^2p/(2\pi)^2$). Проинтегрируем кинетическое уравнение (3) по импульсам и получим уравнение непрерывности

$$\partial_t n + \partial_\alpha (n u_\alpha) = 0, \quad (4)$$

где для простоты введены обозначения $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_\alpha = \partial/\partial r_\alpha$. Так же умножим кинетическое уравнение (3) на скорость v_α и проинте-

грируем по импульсам. Тогда получим уравнение Навье Стокса

$$\partial_t(nu_\alpha) + \partial_\beta \Pi_{\alpha\beta} = -\frac{nu_\alpha}{\tau}, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \int v_\alpha v_\beta \cdot f(d^2p) \quad (5)$$

где $\Pi_{\alpha\beta}$ – тензор потоков импульса, m – масса электронов, τ – время импульсной релаксации. Из макроскопических уравнений (4) и (5) получим следующие уравнения на частные производные концентрации и скорости по времени

$$\begin{cases} \partial_t n = -(u_\alpha \partial_\alpha n + n \partial_\alpha u_\alpha), \\ \partial_t u_\alpha = -\left(u_\beta \partial_\beta u_\alpha + \frac{\varepsilon_F}{2mn} \partial_\alpha n\right). \end{cases} \quad (6)$$

Далее подставляя в кинетическое уравнение (3) локально равновесную функцию распределения (2) и используя выражения для частных производных (6), получим линеаризованное по градиенту средней скорости и концентрации уравнение на функцию распределения

$$-f'_0(\varepsilon)m \left(v_\alpha v_\beta \partial_\beta u_\alpha - \frac{\varepsilon_F}{2mn} v_\alpha \partial_\alpha n \right) = I\{f\}. \quad (7)$$

Для наглядности, выведем выражения для обычной (диагональной) вязкости вырожденного электронного газа и холловской вязкости при наличии магнитного поля. Для этого рассмотрим простой случай, когда градиент концентрации отсутствует. В дальнейшем нам такого рассмотрение будет достаточно. Так же стоит отметить, что для вязкости важен именно первый член в уравнении (7), т.к. он дает вторую угловую гармонику, например $v_x v_y \sim \sin 2\varphi$, где φ – угол вектора скорости относительно оси x . Так как для появления вязкости важна именно вторая гармоника функции распределения, то для простоты рассмотрим лишь вклад второй гармоники в интеграл столкновений. Первая гармоника функции распределения, вообще говоря, зануляется при отсутствии электрического поля. Запишем

тогда уравнение (7) в приближении времени релаксации

$$-f'_0 m v_\alpha v_\beta \partial_\beta u_\alpha = -\frac{\delta f_0}{\tau_2^*}, \quad (8)$$

где

$$\frac{1}{\tau_2^*} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{ee}}, \quad (9)$$

причем τ_2 – время релаксации второй гармоники функции распределения на примесях и фононах, а τ_{ee} – время электрон-электронных столкновений, $\delta f_0 = f - f_0$ – отклонение функции распределения от локально равновесного. Аналогично можно записать тензор потоков импульса как сумму равновесного и поправки

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta}^0 + \delta\Pi_{\alpha\beta}, \quad \Pi_{\alpha\beta}^0 = n u_\alpha u_\beta + \frac{n\varepsilon_F}{2m} \delta_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Поправка $\delta\Pi_{\alpha\beta}$ и определяет коэффициенты вязкости

$$\delta\Pi_{\alpha\beta} = -n(\eta_{xx} u_{\alpha\beta} + \eta_{xy} \varepsilon_{z\alpha\gamma} u_{\gamma\beta}), \quad u_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha, \quad (11)$$

где $\varepsilon_{z\alpha\beta}$ – асимметричный тензор Леви-Чивиты. Вычислив поправку к тензору потоков импульса по соответствующей формуле в (5) получим известное выражение для диагональной вязкости (см. например [39])

$$\eta_{xx} = \frac{v_F^2 \tau_2^*}{4} \equiv \eta. \quad (12)$$

Далее рассмотрим случай, когда имеется магнитное поле $\mathbf{B} \parallel z$, перпендикулярное плоскости движения электронов. Тогда в кинетическом уравнении появляется вклад от магнитного поля в виде силы Лоренца

$$\frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - f'_0 \cdot m v_\alpha v_\beta \partial_\beta u_\alpha = -\frac{\delta f}{\tau_2^*}, \quad (13)$$

где e – заряд электрона, c – скорость света в вакууме. Будем считать, что магнитное поле слабое, а именно $|\omega_c \tau_2^*| \ll 1$, где $\omega_c = eB/mc$ – циклотронная частота. В таком случае можно находить поправку от магнитного поля в функцию распределения по теории возмущений

$$\delta f_B = -\tau_2^* \cdot \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \frac{\partial \delta f_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (14)$$

где δf_0 находится из (8). Вычислив поправку в тензор плотностей потока импульса, связанный с наличием магнитного поля, через поправку к функции распределения (14), получим выражение для холловской вязкости [39]

$$\eta_{xy}^H = 2\omega_c \tau_2^* \cdot \eta. \quad (15)$$

При наличии магнитного поля также меняется диагональная вязкость (12), но данная поправка квадратична в случае малого магнитного поля, поэтому мы её учитывать не будем.

В гидродинамическом режиме можно получить холловское поле. Не останавливаясь на деталях вывода, опубликованного, например, в [14] приведем лишь окончательный результат

$$E_H = E \cdot \frac{\eta_{xy}^H}{\eta_{xx}}, \quad (16)$$

где E – электрическое поле вдоль канала. Предполагается, что $|\eta_{xy}| \ll \eta_{xx}$.

В представленной работе исследуются вклады в нечетную вязкость η_{xy} , не связанные с действием на электроны силы Лоренца, а обусловленные наличием спиновой поляризации носителей заряда, индуцированной магнитным полем, и спин-орбитального взаимодействия. Нечетную вязкость связана с асимметричным рассеянием электронов с одинаковой проекцией спина друг на друга. Асимметричное рассеяние электронов с противоположными проекциями спина обсуждается в работе [43] в контексте спинового эффекта Холла.

Расчет $\eta_{xy} = -\eta_{yx}$ в условиях частых межэлектронных столкновений представляет собой исключительно громоздкую задачу. Здесь предложен технически более простой механизм, который приводит к возникновению нечетной вязкости связанной со спин-орбитальным взаимодействием, а именно асимметричное рассеяния электронов на потенциале дефектов (примесей).

3 Нечетная вязкость спин-поляризованных электронов при рассеянии на статическом беспорядке

3.1 Асимметричное рассеяние

В данном разделе обсудим ключевой механизм, приводящий к вкладу в нечетную вязкость, связанную со спин-орбитальным взаимодействием, а именно асимметричное рассеяние на примесях.

Цель данного раздела представить вывод интеграла столкновений для асимметричного рассеяния электронов на примесях. В нашей работе мы используем двузонную двумерную модель Дирака [29], гамильтониан которого запишется как

$$H_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm\gamma k_{\mp} \\ \pm\gamma k_{\pm} & -E_g \end{pmatrix}, \quad k_{\pm} = k_x \pm ik_y, \quad (17)$$

где $\gamma = \hbar p_{cv}/m_0$, где p_{cv} – междузонный матричный элемент оператора импульса, m_0 – масса свободного электрона, E_g – расстояние между валентной зоной и зоной проводимости. Индекс \pm в гамильтониане соответствует различным проекциям спина. Спектры носителей заряда в зоне проводимости и валентной зоне, **которые приведены на рис. 5, соответственно**, будут при малых \mathbf{k}

$$\varepsilon_c(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \varepsilon_v(k) = -E_g - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad m = \frac{\hbar^2 E_g}{2\gamma^2}, \quad (18)$$

где m – эффективная масса электронов, $k^2 = |k_{\pm}|^2 = k_x^2 + k_y^2$. Энергии отсчитаны от дна зоны проводимости.

Так как мы рассматриваем рассеяние электронов на примесях, то введем потенциал беспорядка примесей. Для общности рассмотрим

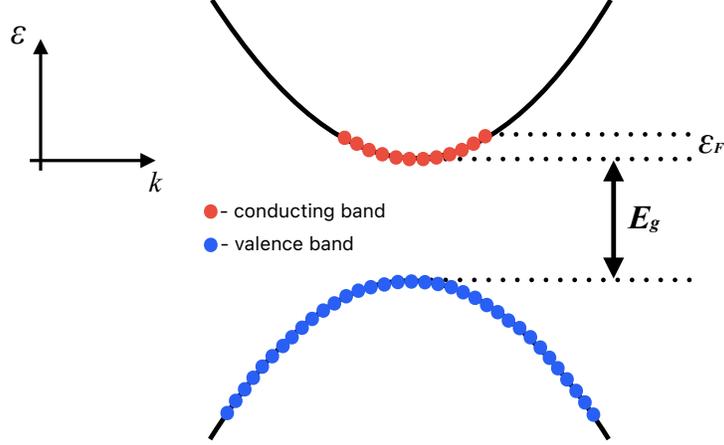


Рис. 5: Схематический рисунок энергетических зон гамильтонианов (17). На рисунке показаны валентная зона и зона проводимости, которая заполнена до энергии Ферми, которая намного меньше ширины запрещенной зоны, $\varepsilon_F \ll E_g$

разные потенциалы для разных зон

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} V_c(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & V_v(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad V_{c,v}(\mathbf{r}) = \sum_i U_{c,v}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad (19)$$

где индексы c и v соответствуют проводящей и валентной зонам. Рассчитаем матричный элемент потенциала рассеяния. Для начала запишем волновые функции соответствующие гамильтониану (17)

$$|\psi_{c,\mathbf{k}}\rangle = c_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{S}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm\gamma k_{\pm}}{E_g} \end{pmatrix}, \quad |\psi_{v,\mathbf{k}}\rangle = c_k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{S}} \begin{pmatrix} \mp \frac{\gamma k_{\pm}}{E_g} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 k^2}{E_g^2}}}, \quad (20)$$

где S – нормировочная площадь. Далее, запишем оператор взаимо-

действия с беспорядком (19) во вторично квантованном виде

$$\hat{V} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{V}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^2r, \quad \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{c,\mathbf{k}} |\psi_{c,\mathbf{k}}\rangle + \hat{a}_{v,\mathbf{k}} |\psi_{v,\mathbf{k}}\rangle), \quad (21)$$

где $\hat{a}_{c/v,\mathbf{k}}$ – операторы уничтожения в зоне проводимости и в валентной зоне. Здесь, как и ранее, было введено для удобства стандартное обозначение

$$\sum_{\mathbf{k}} \equiv \int (d^2k) \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \quad (22)$$

Нас будет интересовать электронный транспорт в зоне проводимости в условиях, когда энергия Ферми значительно меньше, чем ширина запрещенной зоны $\varepsilon_F \ll E_g$. Представим матричный элемент перехода между состояниями $|i\rangle = \hat{a}_{c,\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ и $|f\rangle = \hat{a}_{c,\mathbf{k}'}^\dagger |0\rangle$ в виде

$$V_{fi} = \langle f | \hat{V} | i \rangle = V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = U_c(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \pm i\xi U_v(\mathbf{k} - \mathbf{k}') [\mathbf{k}' \times \mathbf{k}]_z, \quad \xi = \frac{\gamma^2}{E_g^2}, \quad (23)$$

где ξ – параметр, характеризующий силу спин-орбитального взаимодействия, а $U_{c,v}(\mathbf{q}) = \int (d^2r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_{c,v}(\mathbf{r})$ – Фурье образ потенциалов примесей. Этот параметр имеет размерность, поэтому безразмерным малым параметром спин-орбитального взаимодействия является величина ξk_F^2 . Во втором члене знак \pm обозначает спиновое состояние электрона.

Интеграл столкновений для электронов на примесях можно записать в следующем виде [44]

$$Q\{f_{\mathbf{k}}\} = \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} (f_{\mathbf{k}'} - f_{\mathbf{k}}), \quad (24)$$

где $W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ – вероятность перехода из состояния \mathbf{k} в состояние \mathbf{k}' в единицу времени. Запишем вероятность перехода во втором борновском

приближении

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{imp} \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \cdot \left| V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{V_{\mathbf{k}'\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}\mathbf{k}}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{\mathbf{q}} + i0} \right|^2, \quad (25)$$

где n_{imp} – плотность примесей. В главном порядке (второй порядок по $V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$) асимметрия рассеяния отсутствует, поэтому и учитывается следующий порядок. В итоге вероятность рассеяния запишется в следующем виде

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \{t_0(\theta) \pm t_1(\theta) \sin \theta\}, \quad (26)$$

где $\theta = \angle \mathbf{k}'\mathbf{k}$ – угол между векторами, а функции t_0 и t_1 задаются следующими выражениями

$$t_0(\theta) = t_0(\theta) = n_{imp} |U_c(2k \sin \theta/2)|^2. \quad (27)$$

Для дальнейшего удобно ввести сокращенную запись

$$U(\theta) \equiv U(2k \sin \theta/2)$$

и представить

$$t_1(\theta) = 2\pi D k^2 \xi n_{imp} U_v(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} U_c(\varphi) U_c(\theta - \varphi), \quad (28)$$

где $D = m/2\pi\hbar^2$ – плотность состояний на одну проекцию спина. Часть с t_1 соответствует асимметричной части интеграла столкновений.

В случае короткодействующего потенциала [15, 16], функции $t_{0,1}(\theta)$ не зависят от угла θ . Ситуация меняется в случае, когда потенциал примесей плавный. В таком случае функции $t_{0,1}(\theta)$ убывают при

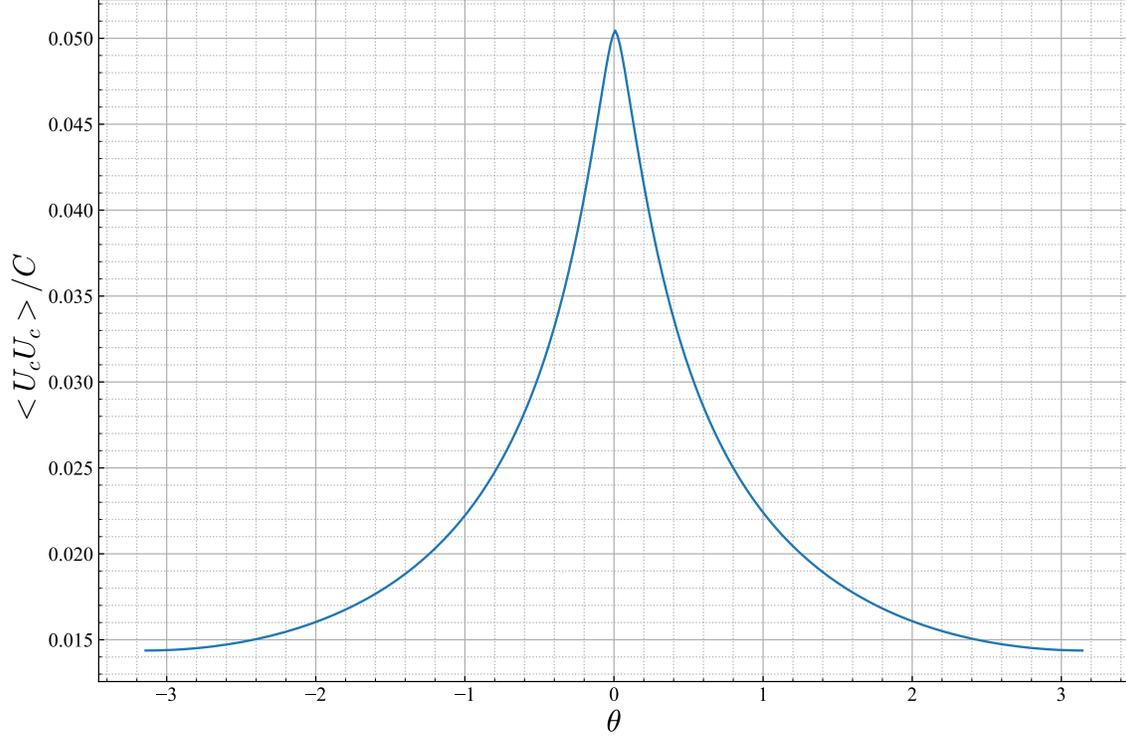


Рис. 6: Зависимость $\langle U_c U_c \rangle$ от угла θ для случая $2kr_c = 10$. Функция отнормирована на величину $C = 4(2\pi\alpha_c r_c)^2$

увеличении угла θ . Физически это означает, что частицы преимущественно рассеиваются вперед – в направлении изначального движения.

Для примера рассмотрим экранированный кулоновский потенциал, фурье-образ которого записывается как

$$U_c(\theta) = \frac{2\pi\alpha_c r_c}{1 + 2kr_c |\sin \theta/2|}, \quad (29)$$

где $\alpha_c = e^2/\kappa$ – постоянная, характеризующая силу кулоновского потенциала (e – заряд электрона, κ – диэлектрическая проницаемость среды, диэлектрическим контрастом двумерного слоя по отношению

к окружению пренебрегаем), r_c – длина экранировки. Видно, что при увеличении угла от нуля потенциал уменьшается, и, соответственно, $t_0(\theta)$ тоже спадает. Для иллюстрации на рис. 6 приведен график интеграла

$$\langle U_c U_c \rangle = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \cdot U_c(\varphi) U_c(\theta - \varphi). \quad (30)$$

Из рисунка видно, что эта величина убывает с увеличением угла рассеяния θ .

3.2 Интеграл столкновений с учетом асимметричного рассеяния

Рассмотрим кинетическое уравнение и, в частности, интеграл электрон-примесных столкновений (24) с учетом асимметричного по спину рассеяния. Цель состоит в том, чтобы установить, как асимметричный вклад входит в функцию распределения и, соответственно, в тензор вязкостей.

Будем раскладывать функцию распределения на фурье-гармоники по углу φ между вектором \mathbf{k} и осью x

$$f_{\mathbf{k}} = \overline{f_{\mathbf{k}}} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi - f_n^s \sin n\varphi), \quad (31)$$

где коэффициенты разложения даются следующими формулами

$$\overline{f_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2\pi} \int f_{\mathbf{k}} d\varphi, \quad f_n^c = \frac{1}{\pi} \int f_{\mathbf{k}} \cos n\varphi d\varphi, \quad f_n^s = \frac{1}{\pi} \int f_{\mathbf{k}} \sin n\varphi d\varphi. \quad (32)$$

Учитывая, что угол между вектором \mathbf{k}' с осью x равен $\varphi' = \varphi + \theta$,

получим

$$Q\{f_k\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi}{\tau_n} + \gamma_n (f_n^s \cos n\varphi - f_n^c \sin n\varphi) \right\}. \quad (33)$$

Здесь τ_n ($n = 1, 2, \dots$) – времена релаксации соответствующих гармоник, а коэффициенты γ_n описывают темп конверсии гармоник $\sim \cos n\varphi$ и $\sim \sin n\varphi$ (четные и нечетные по отношению к $\varphi \rightarrow -\varphi$). Эти параметры задаются в общем случае следующими выражениями

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{2\pi}{\hbar} D \int \frac{d\theta}{2\pi} t_0(\theta) \cdot (1 - \cos n\theta), \quad \gamma_n = \frac{2\pi}{\hbar} D \int \frac{d\theta}{2\pi} t_1(\theta) \sin \theta \sin n\theta. \quad (34)$$

Здесь рассматривается одна спиновая ветка, описываемая гамильтонианом H_+ . Для гамильтониана H_- поменялись бы лишь знаки коэффициентом конверсии $\gamma_n \rightarrow -\gamma_n$. Важно отметить, что в случае, когда потенциал примесей короткодействующий (δ -функциональной), то функции $t_0(\theta)$ (27) и $t_1(\theta)$ (28) не будут зависеть от угла θ , т.к. фурье-образ потенциалов примесей – константа. Из этого следует, что в случае короткодействующего потенциала времена релаксации всех гармоник $\tau_n \equiv \tau_1$ – одинаковы, а коэффициенты $\gamma_n = \gamma_1 \delta_{1,n}$ обращаются в нуль кроме γ_1 (отвечающего за эффект Мотта – асимметричное по спину рассеяние на примесях), что соответствует результатам, полученным ранее [15, 31]. В случае дальнедействующего потенциала, коэффициенты $\gamma_{2,3,\dots}$ уже ненулевые, из чего следует, что для плавного потенциала могут возникнуть вклады в во вторую и более высокие гармоники функции распределения. Нам более всего важен вклад именно во вторую гармонику, т.к. он создает добавку в тензор потоков импульса и, как будет показано далее, отвечает за нечетную вязкость.

3.3 Нечетная вязкость при наличии асимметричного рассеяния на беспорядке

Перейдем к выводам и обсуждению основных результатов этого раздела работы. Для вывода нечетной вязкости с учетом асимметричного рассеяния запишем кинетическое уравнение в линеаризованном виде как это было в разделе 2.3

$$-f'_0 m v_\alpha v_\beta \partial_\beta u_\alpha = -\frac{\delta f}{\tau_2^*} + G_{skew}, \quad (35)$$

где δf – отклонение функции распределения от равновесной, τ_2^* – время релаксации второй гармоники (9), G_{skew} – интеграл столкновений от асимметричного рассеяния на примесях который получается из уравнения (24) и второй части уравнения (26), которую детальнее обсудим чуть ниже. Тут мы опустили релаксационный член с первой гармоникой, т.к. в отсутствие электрического поля первая гармоника функции распределения не возникает. Как отмечалось ранее, в величину τ_2^* , вообще говоря, может входить как время релаксации второй гармоники на примесях (34), так и время электрон-электронных столкновений.

Для более простого изложения мы рассмотрим пока что лишь одну проекцию спина, соответствующую гамильтониану H_+ (17). После мы обсудим уже общую ситуацию с наличием электронов с разными спинами. Запишем выражение для асимметричной части интеграла электрон-примесных столкновений согласно формулам (24) и (25):

$$G_{skew}\{f\} = \frac{2\pi}{\hbar} \int (d^2k') \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) t_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta f(\mathbf{k}') \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{v}']_z}{v^2}. \quad (36)$$

Считая вклад от асимметричного рассеяния малым, мы можем, как и раньше, решить уравнение, используя теорию возмущений. Тогда аномальная (асимметричная) часть функции распределения будет

даваться следующим интегралом

$$\delta f_a = \tau_2^* \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \int (d^2k') \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) t_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \varepsilon_{z\alpha\beta} \frac{v_\alpha v'_\beta}{v_F^2} \cdot \tau_2 f'_0(\varepsilon_k) m v'_\gamma v'_\delta \partial_\delta u_\gamma. \quad (37)$$

Имея данный вклад в функцию распределения, мы можем посчитать вычислить вклад в тензор потока импульса

$$\delta \Pi_{ij}^a = \int v_i v_j \delta f_a(d^2k). \quad (38)$$

Нас интересует нечетная вязкость, которую мы определяем согласно выражению (11) ($\delta \Pi_{xy}^a = -\delta \Pi_{yx}^a$)

$$\delta \Pi_{xy}^a = -2n \eta_{xy} \partial_y u_y. \quad (39)$$

Вычислив данное выражение, используя аномальный вклад в функцию распределения (37), получим

$$\delta \Pi_{xy}^a = -2\gamma_2 \tau_2^* \eta \cdot \partial_y u_y, \quad (40)$$

Откуда и получаем требуемое выражение для нечетной вязкости

$$\eta_{xy}^{SO} = \gamma_2 \tau_2^* \cdot \eta, \quad (41)$$

где η – диагональная вязкость (12), а коэффициент γ_2 определяется, как и раньше, формулой (34)

$$\gamma_2 = \frac{2\pi}{\hbar} D \int \frac{d\theta}{2\pi} t_1(\theta) \sin \theta \sin 2\theta. \quad (42)$$

Это выражение было получено для одной проекции спина. Для противоположной проекции, нечетная вязкость поменяет знак, т.к. меняется знак у $\gamma_2 \rightarrow -\gamma_2$. При одинаковом заполнении двух спиновых подзон суммарный вклад в нечетную вязкость будет нулевой.

Ситуация меняется при наличии магнитного поля, которое поляризует систему из-за зеемановского расщепления, при этом у электронов с разными спинами энергия Ферми различна $\varepsilon_F^+ \neq \varepsilon_F^-$. В таком случае вязкости для двух проекций спина \pm будут

$$\eta_{xy,SO}^\pm = \gamma_2^\pm \tau_2^{*,\pm} \cdot \eta^\pm. \quad (43)$$

Индекс \pm стоит на всех величинах, т.к. они все, вообще говоря, зависят от энергии Ферми. Пусть энергия Ферми без магнитного поля равна ε_F , а при его наличии ε_F^\pm для соответствующих спинов. Тогда

$$\varepsilon_F^\pm = \varepsilon_F \mp \frac{1}{2} g \mu_B B, \quad (44)$$

где g – g-фактор электрона, μ_B – магнетон Бора. Магнитное поле считаем слабым, так что зеемановское расщепление мало по сравнению с энергией Ферми. Тогда можно нечетную вязкость системы записать как

$$\eta_{xy,SO} = \frac{\eta_{xy,SO}^+ + \eta_{xy,SO}^-}{2} = \frac{-g\mu_B B}{2} \cdot \frac{\partial(\gamma_2 \tau_2^* \eta)|_{\varepsilon_F}}{\partial \varepsilon_F} = P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial(\gamma_2 \tau_2^* \eta)|_{\varepsilon_F}}{\partial \varepsilon_F}, \quad (45)$$

где $P_s = -g\mu_B B / 2\varepsilon_F$ – степень спиновой поляризации, которая представляет из себя разность концентраций электронов с разными спинами, нормированную на полную концентрацию электронов в системе. В случае, когда нечетная вязкость зависит от энергии Ферми степенным образом $\eta_{xy,SO} \sim \varepsilon_F^a$, то её можно записать как

$$\eta_{xy,SO} = a P_s \cdot \gamma_2 \tau_2^* \eta, \quad (46)$$

где все величины берутся при энергии ε_F . В дальнейшем мы не будем учитывать межэлектронное рассеяние и заменим время τ_2^* на τ_2 , связанное с рассеянием на случайном потенциале дефектов.

Поскольку параметр γ_2 обращается в нуль для короткодействующего потенциала, то эффект нечетной вязкости проявится в случае

рассеяния электронов на плавном беспорядке. Простейшая модель такой системы – гауссов потенциал вида

$$U_{c,v} = \beta_{c,v} e^{-r^2/r_{c,v}^2}, \quad (47)$$

где $\beta_{c,v}$ – характеризуют силу поля примесей для зоны проводимости и валентной зоны, соответственно, а величины r_c, r_v описывают радиус корреляции потенциала. Для простоты мы будем считать, что различий в радиусах корреляций для разных зон нет, т.е. $r_c = r_v$. Тогда можно получить, что $\tau_2 \sim \varepsilon_F^{3/2}$, и $\gamma_2 \sim \varepsilon_F^{-1}$. Окончательно получаем, что $\gamma_2 \tau_2 \eta \sim \varepsilon_F^3$, из чего следует, что асимптотическое выражение при $k_F r_c \gg 1$ для гауссового потенциала примесей имеет вид

$$\eta_{xy,SO} = 3\gamma_2 \tau_2 \cdot \eta P_s. \quad (48)$$

На рис. 7 представлена зависимость нечетной вязкости от длины корреляции, найденная численно (сплошная кривая), и асимптотика (48) (штриховая).

Для сравнения на рис. (8) представлена зависимость нечетной вязкости двумерных электронах при рассеянии на экранированных кулоновских примесях, фурье-компоненты потенциала взаимодействия в этом случае равны

$$U_c = U_v = \frac{2\pi e^2}{\varkappa(q + r_c^{-1})}, \quad (49)$$

где \varkappa – фоновая диэлектрическая проницаемость, а r_c – эффективный радиус экранировки. Интересно, что для неэкранированного потенциала коэффициент γ_2 расходится. Численный анализ показывает, что коэффициент $a \approx 5/2$.

Нечетная вязкость от наличия дальнедействующих примесей (45) является одним из основных результатов данной магистерской работы. Далее будут рассмотрены “квазигидродинамически” уравне-

ния на электронный газ с учетом всех остальных аномальных механизмов. Также приводится обобщение обычных гидродинамических уравнений на случай наличия спин-орбитального взаимодействия.

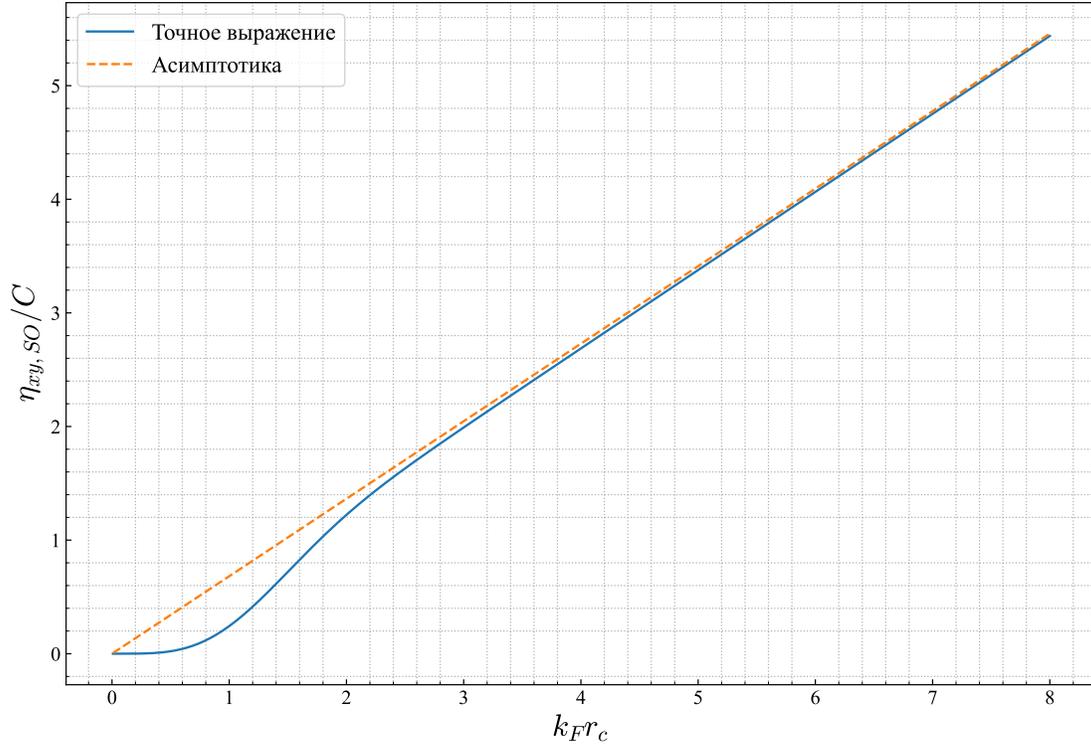


Рис. 7: Зависимость нечетной вязкости в зависимости от безразмерной длины экранировки $k_F r_c$ в случае гауссового потенциала примесей (47). Сплошная кривая – численный расчет, пунктир – асимптотика (48). Нечетная вязкость отнормирована на величину $C = 3\eta P_s \cdot 2\pi D\xi\beta_c$.

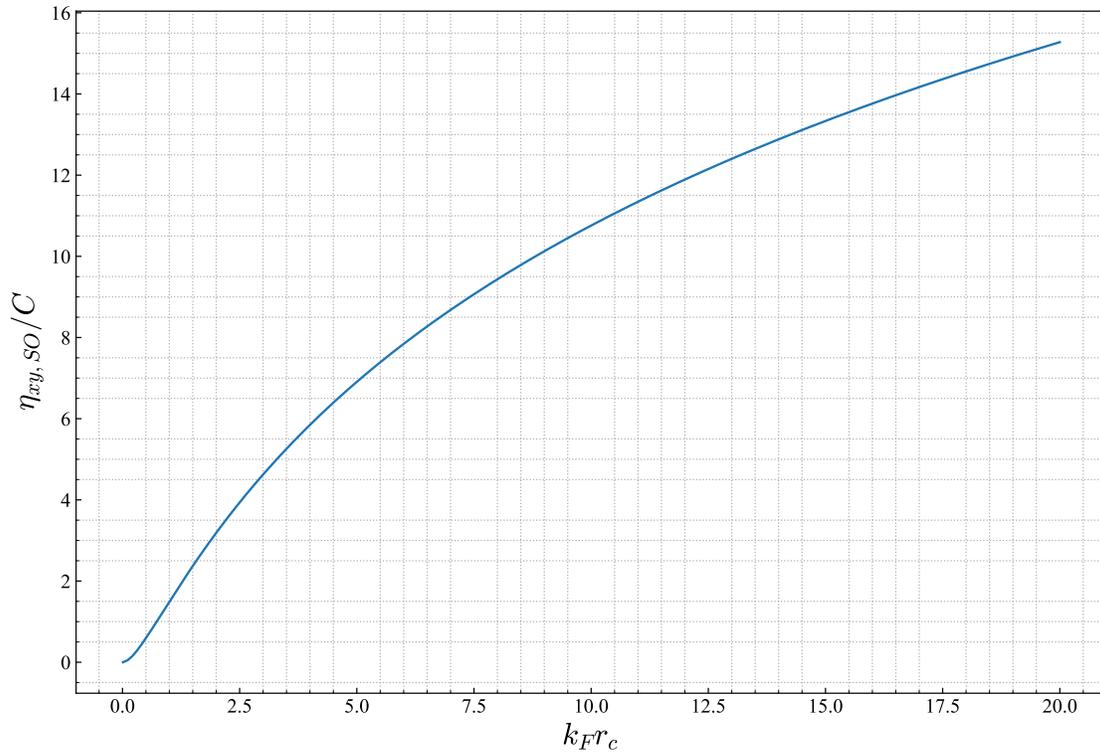


Рис. 8: Зависимость нечетной вязкости в зависимости от безразмерной длины экранировки $k_F r_c$ в случае экранированного кулоновского потенциала примесей (49). Нечетная вязкость отнормирована на величину $C = \pi/4 \cdot \eta P_s \cdot D\xi k_F e^2 / \kappa$.

4 Гидродинамические уравнения с учетом аномальных вкладов

В данном разделе мы установим, какие вклады появляются в уравнении непрерывности (4) и уравнении Навье-Стокса (1), (5) при наличии спин-орбитального взаимодействия и плавного потенциала примесей. Подчеркнем, что из-за “дальнодействия” примесей времена релаксации гармоник быстро убывают с номером гармоники как $\tau_n \sim n^{-2}$ [14], что следует из их определения (34). Это дает возможность приближенно использовать гидродинамические уравнения для электронного газа, так как релаксация импульса на статических дефектах оказывается эффективно подавленной. Этот режим можно условно называть “квазигидродинамическим.”

Вернемся к системе с проводящим каналом, представленной на рис. 3. Пусть в системе имеется электрическое поле \mathbf{E} в плоскости движения электронов и магнитное поле $\mathbf{B} \parallel z$, которое перпендикулярно плоскости движения электронов. Для начала приведем кинетическое уравнение, из которого и будем выводить гидродинамические уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_a)f + \left(e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{dis}\{f\} + G, \quad (50)$$

где \mathbf{v}_a – аномальный вклад в скорость, который мы обсудим ниже, $I_{dis}\{f\}$ – симметричная часть интеграла электрон-примесных столкновений, G – асимметричная часть интеграла столкновений, связанная с асимметричным рассеянием, которое детально обсуждалось в разд. 3.2. Отметим, что в аномальную скорость \mathbf{v}_a и в асимметричную часть интеграла столкновений вносят вклад сдвиги электронных волновых пакетов при рассеянии – side-jump. Мы будем рассматривать случай, когда столкновения электронов с различными спинами подавлены. Это может быть например в случае, когда зее-

мановское расщепление намного больше температуры системы, которое “размывает” поверхность Ферми, но меньше, чем энергия Ферми электронов $\varepsilon_F \gg |g\mu_B B| \gg T$. Такой случай даёт возможность рассматривать разные спиновые подзоны в отдельности друг от друга и писать соответствующие гидродинамические уравнения на каждую из спиновых подзон. В этом разделе приведем гидродинамические уравнения в общем виде, в дальнейшем приведем уравнения на каждую из проекций спина.

Для начала проинтегрируем кинетическое уравнение (50) по импульсам и получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot N(\mathbf{u} + \mathbf{u}_a) = 0, \quad (51)$$

где N – полная концентрация электронов, \mathbf{u} – макроскопическая скорость как было введено ранее в разд. 2.3, \mathbf{u}_a – аномальный вклад в макроскопическую скорость, связанный с кривизной Берри и сдвигом волновых пакетов при рассеянии на примесях. Данный аномальный вклад будет подробно выведен ниже. Далее умножим кинетическое уравнение на скорость \mathbf{v} и проинтегрируем по импульсам. Тогда получим уравнение Навье-Стокса с аномальными вкладами

$$\frac{\partial n\mathbf{u}}{\partial t} = n\omega_c \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + \frac{en}{m} \mathbf{E} + n(\eta_{xx} \Delta \mathbf{u} + \eta_{xy} \Delta \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}) - \frac{n\mathbf{u}}{\tau} + \mathbf{F}, \quad (52)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор в направлении z , $\omega_c = eB/mc$ – как и ранее циклотронная частота, \mathbf{F} – аномальные “силы”, которые имеют следующий общий вид

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{v} G (d^2p). \quad (53)$$

Ниже обсудим каждый из аномальных вкладов более детально и раскроем выражения для \mathbf{v}_a и \mathbf{F} .

4.1 Аномальные механизмы

В этом разделе мы проанализируем каждый из механизмов, который приводит к аномальным вкладам в гидродинамические уравнения. Все вклады будут учитываться в линейном приближении по параметру спин-орбитального взаимодействия ξ . Также для того, чтобы во всех формулах ниже не писать индекс \pm , мы будем приводить выражения лишь для одной проекции спина – соответствующую гамильтониану H_+ (17). Все результаты для противоположной проекции спина можно получить заменой $\xi \rightarrow -\xi$.

Первый из вкладов – асимметричное рассеяние мы детально обсудили в предыдущих разделах 3.1 и 3.2, именно оно отвечает за возникновение недиагональной вязкости. Помимо асимметричного рассеяния есть ещё два эффекта: кривизна Берри (Berry curvature) и сдвиг волновых пакетов (side jump). Оба механизма дают вклад в аномальную скорость

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{sj}, \quad (54)$$

где v_a^B – аномальная скорость из-за кривизны Берри, чаще называемой просто аномальной скоростью, которая дается выражением [26]

$$\mathbf{v}_B = \frac{2\xi e}{\hbar} [\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}], \quad (55)$$

где \mathbf{E} – внешнее электрическое поле. При рассеянии на примесях волновой пакет электрона сдвигается в координатном пространстве. Этот сдвиг зависит от изменения импульса электрона и задается следующим выражением [27]

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \xi \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) [(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{z}}]. \quad (56)$$

При многократном рассеянии на примесях эти сдвиги накапливаются

и приводят к сдвиговой скорости

$$\mathbf{v}_{sj} = \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) t_0(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad (57)$$

где $W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ – вероятность рассеяния на примесях за единицу времени в борновском приближении.

Помимо добавки в обобщенную скорость (57) сдвиги волновых пакетов дают ещё один аномальный вклад, который обычно называется вкладом аномального распределения (anomalous distribution). При сдвиге волнового пакета в координатном пространстве электрическое поле совершает работу $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$, поэтому, интеграл столкновений в борновском приближении принимает вид

$$I\{f\} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'} - e\mathbf{E}\mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) t_0(\theta) (f_{\mathbf{k}'} - f_{\mathbf{k}}), \quad (58)$$

где $t_0(\theta)$ дается формулой (27). Далее можно разложить δ -функцию до первого порядка по спин-орбитальному взаимодействию. Нулевой порядок будет соответствовать обычному борновскому приближению без учета аномальных вкладов, а первый порядок даст вклад в аномальную часть интеграла столкновений

$$G_{adist} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \delta'(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) t_0(\theta) \cdot (-e\mathbf{E}\mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) (f_{\mathbf{k}'} - f_{\mathbf{k}}). \quad (59)$$

Данный вклад называется вкладом аномального распределения, т.к. из-за работы электрического поля появляется добавка к равновесной функции распределения, содержащая сдвиг волнового пакета. Получаем, что аномальная часть интеграла столкновений в кинетическом уравнении (50) состоит из двух вкладов:

$$G = G_{skew} + G_{adist}. \quad (60)$$

Для полноты картины повторно приведем выражение для интеграла столкновений от асимметричного рассеяния

$$G_{skew} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) t_1(\theta) \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{k}']_z}{k^2} f_{\mathbf{k}'}, \quad (61)$$

где $t_1(\theta)$ дается выражением (28).

4.2 Аномальные вклады в гидродинамические уравнения

Перейдем теперь к обсуждению вкладов этих аномальных механизмов в гидродинамические уравнения (51) и (52).

4.2.1 Уравнение непрерывности

Начнем с уравнения непрерывности и макроскопической аномальной скорости (51), которая дается в общем виде для каждой из проекции спинов как

$$\mathbf{u}_a^\pm = \frac{1}{N^\pm} \int (d^2k) (\mathbf{v}_B^\pm + \mathbf{v}_{sj}^\pm) f^\pm, \quad (62)$$

где $\mathbf{v}_B^\pm = \pm \mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_{sj}^\pm = \pm \mathbf{v}_{sj}$ согласно уравнениям (55) и (57), $N^\pm = \int f^\pm(d^2k)$ – концентрация электронов с соответствующими спинами, f^\pm – функция распределения для каждого из проекций спина. Электрические и магнитные поля учитываем лишь в линейном приближении. При вычислении вклада с аномальной скоростью \mathbf{v}_B , в главном приближении функцию распределения можно считать равновесной: $f_0^\pm = \theta(\varepsilon_F^\pm - \varepsilon)$, где ε_F^\pm определяются как и ранее (44). При вычислении сдвиговой скорости \mathbf{v}_{sj} нужно учитывать уже линейный по электрическому полю член функции распределения, который из кинетического уравнения (50) и представления столкновений I_{dis} в

виде разложения по гармоникам (выражение (33) без асимметричных вкладов), запишется как

$$\delta f^\pm = -\mathbf{E}\mathbf{v}\tau_1(k)\frac{\partial f_0^\pm}{\partial \varepsilon}. \quad (63)$$

После интегрирования получим выражение для макроскопических аномальных скоростей двух спинов

$$\mathbf{u}_a^\pm = \pm \frac{\xi}{\hbar} \left(1 - \frac{U_v}{U_c}\right) [e\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}]. \quad (64)$$

В случае, когда потенциалы беспорядка в двух зонах совпадают, эти вклады аномальной скорости и сдвиговой скорости друг друга сокращают [28]. Комбинируя результат можно записать уравнение непрерывности для усредненной функции распределения

$$f = \frac{f^+ + f^-}{2}. \quad (65)$$

Так же введем спиновую функцию распределения, которая так же важна в контексте нашей задачи

$$s_z = \frac{f^+ - f^-}{2}. \quad (66)$$

Тогда уравнение непрерывности для всей системы запишется как

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot N(\mathbf{u} + \mathbf{u}_a) = 0, \quad (67)$$

где \mathbf{u}_a – макроскопическая аномальная скорость

$$\mathbf{u}_a = \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_a s_z = P_s \cdot \frac{\xi}{\hbar} \left(1 - \frac{U_v}{U_c}\right) [e\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}], \quad (68)$$

где $P_s = (N^+ - N^-)/N$, как и ранее, степень спиновой поляризации.

4.2.2 Уравнение Навье-Стокса

Далее обсудим аномальные вклады, входящие в уравнение (52). Мы уже детально обсудили наличие нечетной вязкости связанной со спин-орбитальным взаимодействием. Приведем теперь вклады аномальных сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{sk} + \mathbf{F}_{adist}. \quad (69)$$

В этом разделе, как и в предыдущем, проанализируем аномальные вклады для разных проекций спина. Выражение для аномальной силы из-за асимметричного рассеяния примет вид

$$\mathbf{F}_{sk}^{\pm} = \int \mathbf{v} G_{skew}^{\pm}(d^2k) = \pm \frac{\gamma_1^{\pm} \tau_1^{\pm} N^{\pm}}{m} [e\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}], \quad (70)$$

где $G_{skew}^{\pm} = \pm G_{skew}$, где последний дается выражением (61), $\gamma_1^{\pm} = \gamma_1(k_F^{\pm})$, $\tau_1^{\pm} = \tau_1(k_F^{\pm})$ – задаются выражениями (34). Здесь, как и в вкладе в скорость за счет накопления сдвигов волновых пакетов, необходим учет линейного по электрическому полю вклада в функцию распределения. Аналогично рассчитаем аномальную силу из-за наличия аномального распределения

$$\mathbf{F}_{adist}^{\pm} = \pm \frac{N^{\pm}}{\tau_1^{\pm}} \cdot \frac{\xi}{\hbar} \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) [e\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}]. \quad (71)$$

Для полноты изложения приведем выражения для вязкостей для разных проекций спина. Диагональная вязкость имеет вид

$$\eta^{\pm} = \frac{(v_F^{\pm})^2 \tau_2^{\pm}}{4}. \quad (72)$$

Нечетная вязкость η_{xy} состоит из двух компонент: холловской вязкости

$$\eta_{xy,H}^{\pm} = 2\omega_c \tau_2^{\pm} \cdot \eta^{\pm}, \quad (73)$$

и нечетной вязкости из-за спин-орбитального взаимодействия, рассчитанной в разд. 3.3

$$\eta_{xy,SO}^{\pm} = \pm \gamma_2^{\pm} \tau_2^{\pm} \cdot \eta^{\pm}. \quad (74)$$

Имея все эти аномальные вклады, можно записать уравнение Навье-Стокса для разных спинов

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N^{\pm} \mathbf{u}^{\pm})}{\partial t} - N^{\pm} \omega_c [\mathbf{u}^{\pm} \times \hat{\mathbf{z}}] - \frac{eN^{\pm}}{m} \mathbf{E} = \\ = N^{\pm} (\eta_{xx}^{\pm} \Delta \mathbf{u}^{\pm} + \eta_{xy}^{\pm} [\Delta \mathbf{u}^{\pm} \times \hat{\mathbf{z}}]) - \frac{N^{\pm} \mathbf{u}^{\pm}}{\tau_{1,eff}^{\pm}} + \mathbf{F}_{sk}^{\pm} + \mathbf{F}_{adist}^{\pm}, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\eta_{xx}^{\pm} \approx \eta^{\pm}$ в линейном по магнитному полю приближении, $\eta_{xy}^{\pm} = \eta_{xy,H}^{\pm} + \eta_{xy,SO}^{\pm}$, $\tau_{1,eff}^{\pm}$ – эффективное время релаксации, которое в общем виде записывается как

$$\tau_{1,eff}^{\pm} = \frac{\int (d^2k) \frac{f^{\pm} \mathbf{v}}{\tau_1(k)}}{\int (d^2k) f^{\pm} \mathbf{v}}. \quad (76)$$

Уравнения (75) являются еще одним важным результатом данной работы: они описывают квазигидродинамическое поведение электронов при наличии внешнего магнитного поля и спин-орбитального взаимодействия.

4.3 Уравнения на электрические и спиновые токи

Для анализа аномального эффекта Холла удобно объединить два уравнения Навье-Стокса на разные проекции спина (75) в одно уравнение на электрический ток \mathbf{j} , аналогично тому как было для уравнения непрерывности (67). Рассмотрим поочередно все вклады с учетом того, что $f^{\pm} = f \pm s_z$. в качестве примера детально распишем

вклад от диагональной вязкости в случае, когда $\nabla N = 0$

$$N^+ \eta^+ \Delta \mathbf{u}^+ + N^- \eta^- \Delta \mathbf{u}^- = \eta^+ \Delta \int f^+ \mathbf{v}(d^2k) + \eta^- \Delta \int f^- \mathbf{v}(d^2k). \quad (77)$$

Аналогично представлению функции распределения в виде полусуммы вкладов от спиновых ветвей запишем $\eta^\pm = \eta \pm \eta^s$, где η задается, как и ранее, выражением (12), а η^s – вклад, обусловленный спиновой поляризацией в магнитном поле. Формула для η^s приводится ниже, а пока включим вклад в гидродинамические уравнения от диагональной вязкости

$$N^+ \eta^+ \Delta \mathbf{u}^+ + N^- \eta^- \Delta \mathbf{u}^- = \eta \cdot \Delta \int 2f \mathbf{v}(d^2k) + \eta^s \cdot \Delta \int 2s_z \mathbf{v}(d^2k), \quad (78)$$

где первый интеграл это есть поток частиц (электрический ток с точностью до заряда электрона), а второй интеграл это спиновый поток (спиновый ток с точностью до магнитного момента). Введем обозначения для данных величин

$$\mathbf{j} = \int 2f \mathbf{v}(d^2k), \quad \mathbf{j}_s = \int 2s_z \mathbf{v}(d^2k). \quad (79)$$

Запишем, чему равна величина η^s

$$\eta^s = \frac{\eta^+ - \eta^-}{2} \approx \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_F} \cdot \frac{(\varepsilon_F^+ - \varepsilon_F^-)}{2} = \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_F} \cdot \varepsilon_F P_s, \quad (80)$$

откуда видно, что поправка к вязкости пропорциональна магнитному полю $\eta^s \propto B$. Мы получили два вклада, первый это обычный вклад диагональной вязкости в уравнение Навье-Стокса, а второй вклад уже связан со спиновой поляризацией и пропорциональна спиновому току. Рассмотрим остальные вклады правой части уравнения (75). Например член с холловской вязкостью

$$N^+ \eta_{xy,H}^+ \Delta \mathbf{u}^+ + N^- \eta^- \Delta \mathbf{u}^- = \eta_{xy,H} \cdot \Delta \mathbf{j} + \eta_{xy,H}^s \cdot \Delta \mathbf{j}_s, \quad (81)$$

где $\eta_{xy,H} = 2\omega_c\tau_2 \cdot \eta|_{\varepsilon_F}$ – холловская вязкость на уровне Ферми ε_F . Расчет (в соответствии с требованиями симметрии к инверсии времени) показывает, что $\eta_{xy,H}^s \propto B^2$, поэтому этим членом в дальнейшем можно пренебречь. Случай нечетной вязкости, обусловленной спин-орбитальным взаимодействием отличается, т.к. нечетная вязкость имеет разные знаки для различных спиновых проекций. В отличие от диагональной или холловской вязкостей, пропорциональность спиновой поляризации P_s появляется именно для нечетной вязкости $\eta_{xy,SO}$

$$N^+ \eta_{xy,SO}^+ \Delta \mathbf{u}^+ + N^- \eta_{xy,SO}^- \Delta \mathbf{u}^- = \eta_{xy,SO} \cdot \Delta \mathbf{j} + \eta_{xy,SO}^s \cdot \Delta \mathbf{j}_s, \quad (82)$$

где $\eta_{xy,SO}$ – уже нам известная нечетная вязкость (45), $\eta_{xy,SO}^s$ – фактически есть усредненные абсолютные значения нечетных вязкостей $|\eta_{xy,SO}^\pm|$

$$\eta_{xy,SO} = P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial(\gamma_2\tau_2\eta)|_{\varepsilon_F}}{\partial\varepsilon_F}, \quad \eta_{xy,SO}^s = \gamma_2\tau_2\eta|_{\varepsilon_F}. \quad (83)$$

Релаксационный вклад обозначим следующим образом

$$-\frac{N^+ \mathbf{u}^+}{\tau_{1,eff}^+} - \frac{N^- \mathbf{u}^-}{\tau_{1,eff}^-} = \hat{\mathcal{R}} \mathbf{j}. \quad (84)$$

Данный релаксационный член мы детальнее обсудим чуть ниже.

Наконец, приведем выражения для вкладов от аномальных сил (70) и (71). Аномальная сила от асимметричного рассеяния:

$$\mathbf{F}_{sk}^+ + \mathbf{F}_{sk}^- = \frac{\partial \mathbf{F}_{sk}}{\partial \varepsilon_F} \varepsilon_F \cdot P_s, \quad \mathbf{F}_{sk} = \gamma_1(k_F) \tau_1(k_F) N. \quad (85)$$

Аналогично запишем аномальную силу от аномального распределения

$$\mathbf{F}_{adist}^+ + \mathbf{F}_{adist}^- = \frac{\partial \mathbf{F}_{adist}}{\partial \varepsilon_F} \varepsilon_F \cdot P_s, \quad \mathbf{F}_{adist} = \frac{N}{\tau_1(k_F)} \cdot \frac{\xi}{\hbar} \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) [e \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}]. \quad (86)$$

Важно отметить, что этот вклад чувствителен к виду потенциала рассеяния. Например, для случая неэкранированного кулоновского взаимодействия $\tau_1(\varepsilon_F) \propto \varepsilon_F$, поскольку $N = 2D\varepsilon_F$, то \mathbf{F}_{adist} не зависит от энергии Ферми ε_F , а значит $\partial\mathbf{F}_{adist}/\partial\varepsilon_F = 0$. Не смотря на зачуждение “аномальной силы” от вклада аномального рассеяния, вклад в электрический ток от данного механизма всё таки имеется. Это связано с тем, что аномальное распределение даёт вклад в спиновый ток, который, как мы далее увидим тесно связан с электрическим.

В итоге, собирая воедино все члены, которые мы вывели выше, запишем макроскопическое уравнение на поток частиц \mathbf{j}

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = & \omega_c[\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}] + \frac{eN}{m}\mathbf{E} + \eta \cdot \Delta\mathbf{j} + \eta^s \cdot \Delta\mathbf{j}_s + \eta_{xy,H} \cdot [\Delta\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}] + \\ & + \eta_{xy,SO} \cdot [\Delta\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}] + \eta_{xy,SO}^s \cdot [\Delta\mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{z}}] + \hat{\mathcal{R}}\mathbf{j} + \varepsilon_F \frac{\partial(\mathbf{F}_{sk} + \mathbf{F}_{adist})}{\partial\varepsilon_F} \cdot P_s. \end{aligned} \quad (87a)$$

В этом уравнении присутствуют как обычный поток частиц \mathbf{j} , так и спиновый поток \mathbf{j}_s . Для него имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{j}_s}{\partial t} = & \omega_c[\mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{z}}] + P_s \cdot \frac{eN}{m}\mathbf{E} + \eta \cdot \Delta\mathbf{j}_s + \eta^s \cdot \Delta\mathbf{j} + \eta_{xy,H} \cdot [\Delta\mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{z}}] + \\ & + \eta_{xy,SO}^s \cdot [\Delta\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}] + \hat{\mathcal{R}}_s\mathbf{j}_s + \mathbf{F}_{sk} + \mathbf{F}_{adist}. \end{aligned} \quad (87b)$$

В уравнениях (87a), (87b) члены $\hat{\mathcal{R}}\mathbf{j}$ и $\hat{\mathcal{R}}_s\mathbf{j}_s$ описывают релаксацию тока и спинового тока. Остановимся на них подробнее, так как для их вывода следует учесть зависимость времен релаксации от энергии частиц. Для начала разобьем поток частиц \mathbf{j} и спиновый поток \mathbf{j}_s на две компоненты – нормальную, которая связана с наличием электростатической силы, силы Лоренца, зеемановского расщепления, и аномальную, которая появляется из-за наличия

спин-орбитального взаимодействия.

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_a, \quad \mathbf{j}_s = \mathbf{j}_{s,n} + \mathbf{j}_{s,a}. \quad (88)$$

Аналогичным образом разбиваются функции распределения для различных спиновых проекций электронов $f^\pm = f_n^\pm + f_a^\pm$. Абсолютно идентично разбиваются функции распределения частиц f и спиновой функции распределения s_z . С учетом этого перейдем к рассмотрению релаксационных членов (84)

$$\begin{aligned} -\hat{\mathcal{R}}\mathbf{j} &= \int \frac{f_n^+ + f_n^-}{\tau_1(k)} \mathbf{v}(d^2k) + \int \frac{f_a^+ + f_a^-}{\tau_1(k)} \mathbf{v}(d^2k) = \\ &= \int \frac{f_n^+|_{\varepsilon_F^+} + f_n^+|_{\varepsilon_F^-}}{\tau_1(k)} \mathbf{v}(d^2k) + \int \frac{f_a^+|_{\varepsilon_F^+} - f_a^+|_{\varepsilon_F^-}}{\tau_1(k)} \mathbf{v}(d^2k) = \\ &= \frac{\mathbf{j}_n}{\tau_1(k_F)} + \int \frac{\mathbf{v}(d^2k)}{\tau_1(k)} \cdot \frac{\partial f_a^+|_{\varepsilon_F}}{\varepsilon_F} (\varepsilon_F^+ - \varepsilon_F^-) = \\ &= \frac{\mathbf{j}_n}{\tau_1(k_F)} + P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial}{\partial \varepsilon_F} \left(\frac{\mathbf{j}_{s,a}}{\tau_1(k_F)} \right), \quad (89) \end{aligned}$$

где в конечном ответе первый член – обычный релаксационный член, а второй член – вклад от аномальных частей. Отметим, что в случае короткодействующего потенциала примесей, последний член принимает простой вид как у нормальной компоненты $P_s \mathbf{j}_{s,a} / \tau_1(k_F)$, причем $P_s \mathbf{j}_{s,a}$ – вклад в поток частиц от аномальных механизмов. Такой непривычный вид релаксационного член появляется именно при дальнедействующем беспорядке, когда время релаксации τ_1 начинает зависеть от вида потенциала (а не только от его “мощности”) и энергии электрона. Приведем аналогичным образом полученный релаксационный член для спинового потока \mathbf{j}_s

$$-\hat{\mathcal{R}}_s \mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_{s,a}}{\tau_1(k_F)} + P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial}{\partial \varepsilon_F} \left(\frac{\mathbf{j}_n}{\tau_1(k_F)} \right). \quad (90)$$

Как мы видим из полученных выражений, в релаксационных членах явным образом разделяются нормальные и аномальные компоненты. Фактически у нас появляются четыре неизвестных: нормальные и аномальные компоненты обычного потока частиц $\dot{\mathbf{j}}_n$, $\dot{\mathbf{j}}_a$, а так же нормальные и аномальные компоненты спинового потока $\dot{\mathbf{j}}_{s,n}$, $\dot{\mathbf{j}}_{s,a}$, поэтому имеет смысл разделить каждую из гидродинамических уравнений (87a) и (87b) на две части. Уравнение (87a) даст уравнение на нормальную компоненту

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{j}}_n}{\partial t} = \omega_c [\mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}] + \frac{eN}{m} \mathbf{E} + \eta \Delta \mathbf{j}_n + \eta_{xy,H} [\Delta \mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}] - \frac{\dot{\mathbf{j}}_n}{\tau_1(k_F)}, \quad (91a)$$

которое является уравнением Навье-Стокса без учета аномальных механизмов, а также уравнение на аномальную часть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{j}}_a}{\partial t} = & \eta \Delta \mathbf{j}_a + \eta_{xy,SO} [\Delta \mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}] + \eta^s \Delta \mathbf{j}_{s,a} + \eta_{xy,SO}^s [\Delta \mathbf{j}_{s,n} \times \hat{\mathbf{z}}] + \\ & + P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial}{\partial \varepsilon_F} \left(\mathbf{F}_{sk} + \mathbf{F}_{adist} - \frac{\dot{\mathbf{j}}_{s,a}}{\tau_1(k_F)} \right). \end{aligned} \quad (91b)$$

В этих уравнениях были опущены квадратичные по магнитному полю \mathbf{B} , либо по параметру спин-орбитального взаимодействия ξ вклады. Аналогично уравнениям (91a) и (91b) запишем уравнения на нормальную компоненту спинового потока

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{j}}_{s,n}}{\partial t} = P_s \frac{eN}{m} \mathbf{E} + \eta \Delta \mathbf{j}_{s,n} + \eta^s \Delta \mathbf{j}_n - P_s \cdot \varepsilon_F \frac{\partial}{\partial \varepsilon_F} \left(\frac{\dot{\mathbf{j}}_n}{\tau_1(k_F)} \right), \quad (91c)$$

и аналогично на аномальную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{j}}_{s,a}}{\partial t} = & \omega [\mathbf{j}_{s,a} \times \hat{\mathbf{z}}] + \eta \Delta \mathbf{j}_{s,a} + \eta^s \Delta \mathbf{j}_a + \eta_{xy,H} [\Delta \mathbf{j}_{s,a} \times \hat{\mathbf{z}}] + \\ & + \eta_{xy,SO}^s [\Delta \mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}] + \mathbf{F}_{sk} + \mathbf{F}_{adist} - \frac{\dot{\mathbf{j}}_{s,a}}{\tau_1(k_F)}. \end{aligned} \quad (91d)$$

В данных уравнениях также были опущены вклады, квадратичные по магнитному полю или параметру спин-орбитального взаимодействия.

Система уравнений (91a)–(91d) обобщает макроскопические уравнения на случай наличия аномальных вкладов из-за спин-орбитального взаимодействия, и является одним из важных оригинальных результатов данной магистерской работы.

Стоит отметить, что данные квазигидродинамические уравнения приведены для наиболее простого случая, когда электрон-электронные столкновения сильно подавлены и важно рассеяние электронов на статическом беспорядке. В случае, когда присутствуют электрон-электронные столкновения для электронов с одним спином, а для различных эти столкновения подавлены (например большим зеемановским расщеплением), в уравнениях модифицируются коэффициенты вязкостей, как это например было обсуждено в главе 3.3 для нечетной вязкости от асимметричного рассеяния $\eta_{xy,SO}$. Более сложным является случай, когда присутствуют электрон-электронные столкновения между электронами с различными проекциями спина. В таком случае нужно добавлять соответствующий интеграл столкновений в кинетические уравнения для различных проекций. Это приведет, в частности, к дополнительным вкладам в генерацию и релаксацию спинового тока [16, 28].

5 Заключение

В данной работе была разработана микроскопическая теория аномального эффекта Холла и нечетной вязкости в двумерном электронном газе с учетом спин-орбитального взаимодействия и рассеяния на дальнедействующих примесях. Основные результаты работы можно резюмировать следующим образом.

1. Получено выражение для нечетной вязкости, возникающей из-за асимметричного рассеяния электронов на примесях. Показано, что этот вклад существенно зависит от типа потенциала примесей. Для гауссова потенциала найдено асимптотическое поведение нечетной вязкости при больших длинах экранировки, а для экранированного кулоновского потенциала проведен численный анализ.
2. Выведена система уравнений для электрического и спинового токов, учитывающая все аномальные механизмы рассеяния, включая аномальную скорость, сдвиг волновых пакетов и асимметричное рассеяние. Показано, что электрический и спиновый токи оказываются связанными из-за наличия спин-орбитального взаимодействия.
3. Установлено, что вклад нечетной вязкости наиболее значим в системах с плавным беспорядком, где времена релаксации гармоник функции распределения быстро убывают с увеличением их номера. Это позволяет эффективно описывать систему в квазигидродинамическом приближении.
4. Продемонстрировано, что нечетная вязкость, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием, вносит вклад в аномальное холловское поле, что открывает новые возможности для управле-

ния спиновыми и зарядовыми токами в сверхчистых двумерных системах.

Дальнейшие направления исследований включают микроскопический расчет вклада в нечетную вязкость от асимметричных электрон-электронных столкновений и анализ недиагональных по зонам вкладов в матрицу плотности, которые могут внести вклад в “аномальный поток импульса” по аналогии с аномальной скоростью.

Литература

- [1] Leonid Levitov and Gregory Falkovich. “Electron viscosity, current vortices and negative nonlocal resistance in graphene”. In: *Nature Physics* 12.7 (2016), pp. 672–676. DOI: [10.1038/nphys3667](https://doi.org/10.1038/nphys3667). URL: <https://doi.org/10.1038/nphys3667>.
- [2] Jesse Crossno et al. “Observation of the Dirac fluid and the breakdown of the Wiedemann-Franz law in graphene”. In: *Science* 351.6277 (2016), pp. 1058–1061. DOI: [10.1126/science.aad0343](https://doi.org/10.1126/science.aad0343). URL: <https://doi.org/10.1126/science.aad0343>.
- [3] D. A. Bandurin et al. “Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene”. In: *Science* 351.6277 (2016), pp. 1055–1058. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.aad0201](https://doi.org/10.1126/science.aad0201). URL: <https://science.sciencemag.org/content/351/6277/1055>.
- [4] Philip J. W. Moll et al. “Evidence for hydrodynamic electron flow in PdCoO₂”. In: *Science* 351.6277 (2016), pp. 1061–1064. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.aac8385](https://doi.org/10.1126/science.aac8385). URL: <https://science.sciencemag.org/content/351/6277/1061>.
- [5] R. Krishna Kumar et al. “Superballistic flow of viscous electron fluid through graphene constrictions”. In: *Nature Physics* 13.12 (2017), pp. 1182–1185. DOI: [10.1038/nphys4240](https://doi.org/10.1038/nphys4240). URL: <https://doi.org/10.1038/nphys4240>.
- [6] R. N. Gurzhi. “Minimum of resistance in impurity-free conductors”. In: *JETP* 17 (1963), p. 521.
- [7] R. N. Gurzhi. “Hydrodynamic effects in solids at low temperatures”. In: *Soviet Physics Uspekhi* 11.2 (1968), pp. 255–270. DOI: [10.1070/pu1968v011n02abeh003815](https://doi.org/10.1070/pu1968v011n02abeh003815). URL: <https://doi.org/10.1070/pu1968v011n02abeh003815>.

- [8] Thomas Scaffidi et al. “Hydrodynamic Electron Flow and Hall Viscosity”. In: *Phys. Rev. Lett.* 118 (22 2017), p. 226601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.226601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.226601). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.226601>.
- [9] Francesco M. D. Pellegrino, Iacopo Torre, and Marco Polini. “Nonlocal transport and the Hall viscosity of two-dimensional hydrodynamic electron liquids”. In: *Phys. Rev. B* 96 (19 2017), p. 195401. DOI: [10.1103/PhysRevB.96.195401](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.195401). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.195401>.
- [10] Ruben J Doornenbal, Marco Polini, and R A Duine. “Spin–vorticity coupling in viscous electron fluids”. In: *Journal of Physics: Materials* 2.1 (2019), p. 015006. DOI: [10.1088/2515-7639/aaf8fb](https://doi.org/10.1088/2515-7639/aaf8fb). URL: <https://doi.org/10.1088/2515-7639/aaf8fb>.
- [11] A. I. Berdyugin et al. “Measuring Hall viscosity of graphene’s electron fluid”. In: *Science* 364.6436 (2019), pp. 162–165. ISSN: 0036-8075. DOI: [10.1126/science.aau0685](https://doi.org/10.1126/science.aau0685). URL: <https://science.sciencemag.org/content/364/6436/162>.
- [12] P. S. Alekseev and M. A. Semina. “Hall effect in a ballistic flow of two-dimensional interacting particles”. In: *Phys. Rev. B* 100 (12 2019), p. 125419. DOI: [10.1103/PhysRevB.100.125419](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.125419). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.125419>.
- [13] Yu. O. Alekseev and A. P. Dmitriev. “Giant Hall effect in the ballistic transport of two-dimensional electrons”. In: *Phys. Rev. B* 104 (8 2021), p. 085434. DOI: [10.1103/PhysRevB.104.085434](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.085434). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.085434>.
- [14] A. N. Afanasiev et al. “Hall effect in Poiseuille flow of two-dimensional electron fluid”. In: *Phys. Rev. B* 106 (24 2022), p. 245415. DOI: [10.1103/PhysRevB.106.245415](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.245415). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.245415>.

- [15] K. K. Grigoryan, D. S. Zohrabyan, and M. M. Glazov. *Anomalous Hall effect in ultraclean electronic channels*. 2024. DOI: [10.1103/PhysRevB.109.085301](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.085301). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.109.085301>.
- [16] M M Glazov. “Valley and spin accumulation in ballistic and hydrodynamic channels”. In: *2D Materials* 9.1 (2022), p. 015027. DOI: [10.1088/2053-1583/ac3e04](https://doi.org/10.1088/2053-1583/ac3e04). URL: <https://doi.org/10.1088/2053-1583/ac3e04>.
- [17] A. N. Afanasiev et al. “Rotational viscosity in spin resonance of hydrodynamic electrons”. In: *Phys. Rev. B* 106 (4 2022), p. L041407. DOI: [10.1103/PhysRevB.106.L041407](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L041407). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.L041407>.
- [18] K. S. Denisov, K. A. Baryshnikov, and P. S. Alekseev. “Spin imaging of Poiseuille flow of a viscous electronic fluid”. In: *Phys. Rev. B* 106 (8 2022), p. L081113. DOI: [10.1103/PhysRevB.106.L081113](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L081113). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.L081113>.
- [19] Hiroshi Funaki, Riki Toshio, and Gen Tatara. “Vorticity-induced anomalous Hall effect in an electron fluid”. In: *Phys. Rev. Res.* 3 (3 2021), p. 033075. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.3.033075](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.033075). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.033075>.
- [20] Gen Tatara. “Hydrodynamic theory of vorticity-induced spin transport”. In: *Phys. Rev. B* 104 (18 2021), p. 184414. DOI: [10.1103/PhysRevB.104.184414](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.184414). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.184414>.
- [21] Eddwi H. Hasdeo et al. “Electron hydrodynamics of two-dimensional anomalous Hall materials”. In: *Phys. Rev. B* 103 (12 2021), p. 125106. DOI: [10.1103/PhysRevB.103.125106](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.125106). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.125106>.

- [22] V. F. Gantmakher and Y .B. Levinson. *Carrier Scattering in Metals and Semiconductors*. North-Holland Publishing Company, 1987.
- [23] V. N. Mantsevich and M. M. Glazov. “Viscous hydrodynamics of excitons in van der Waals heterostructures”. In: *Phys. Rev. B* 110 (16 2024), p. 165305. DOI: [10.1103/PhysRevB.110.165305](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.165305). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.110.165305>.
- [24] E. H. Hall. “On a New Action of the Magnet on Electric Currents”. In: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879), pp. 287–292. DOI: [10.2307/2369245](https://doi.org/10.2307/2369245). URL: <http://www.jstor.org/stable/2369245>.
- [25] E. H. Hall. “XXXVIII. On the new action of magnetism on a permanent electric current”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 5 (1881), p. 157. DOI: [10.1080/14786448008626936](https://doi.org/10.1080/14786448008626936). URL: <https://doi.org/10.1080/14786448008626936>.
- [26] Naoto Nagaosa et al. “Anomalous Hall effect”. In: *Rev. Mod. Phys.* 82.2 (2010), pp. 1539–1592. DOI: [10.1103/RevModPhys.82.1539](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.1539).
- [27] N. A. Sinitsyn, Q. Niu, and A. H. MacDonald. “Coordinate shift in the semiclassical Boltzmann equation and the anomalous Hall effect”. In: *Phys. Rev. B* 73 (7 2006), p. 075318. DOI: [10.1103/PhysRevB.73.075318](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.075318). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.075318>.
- [28] M. M. Glazov and L. E. Golub. “Valley Hall effect caused by the phonon and photon drag”. In: *Phys. Rev. B* 102 (15 2020), p. 155302. DOI: [10.1103/PhysRevB.102.155302](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.155302). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.155302>.

- [29] N. A. Sinitsyn et al. “Anomalous Hall effect in a two-dimensional Dirac band: The link between the Kubo-Streda formula and the semiclassical Boltzmann equation approach”. In: *Phys. Rev. B* 75 (4 2007), p. 045315. DOI: [10.1103/PhysRevB.75.045315](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.045315). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.045315>.
- [30] N. A. Sinitsyn. “Semiclassical theories of the anomalous Hall effect”. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 20.2 (2007), p. 023201. DOI: [10.1088/0953-8984/20/02/023201](https://doi.org/10.1088/0953-8984/20/02/023201). URL: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/20/02/023201>.
- [31] M.M. Zohrabyan D.S. Glazov. “Diffusive-hydrodynamic transition in the anomalous Hall effect”. In: *Phys. Solid. State* (2023). DOI: [10.61011/FTT.2023.12.56777.231](https://doi.org/10.61011/FTT.2023.12.56777.231).
- [32] E. N. Adams and E. I. Blount. “Energy bands in the presence of an external force field—II: Anomalous velocities”. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 10.4 (1959), pp. 286–303. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(59\)90004-6](https://doi.org/10.1016/0022-3697(59)90004-6). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022369759900046>.
- [33] L. E. Gurevich and I. N. Yassievich. “Theory of ferromagnetic Hall effect”. In: *Sov. Phys. Solid. State* 4 (1963), p. 2091.
- [34] V.N. Abakumov and I.N. Yassievich. “Anomalous Hall effect for polarized electrons in semiconductors”. In: *JETP* 34 (1972), p. 1375.
- [35] Nozières, P. and Lewiner, C. “A simple theory of the anomalous Hall effect in semiconductors”. In: *J. Phys. France* 34.10 (1973), pp. 901–915. DOI: [10.1051/jphys:019730034010090100](https://doi.org/10.1051/jphys:019730034010090100). URL: <https://doi.org/10.1051/jphys:019730034010090100>.

- [36] V.K. Dugaev et al. “Strongly Correlated Systems, Coherence and Entanglement”. In: ed. by J.M.P. Carmelo et al. World Scientific. Chap. Anomalous Hall effect, p. 145.
- [37] I. A. Ado et al. “Anomalous Hall effect with massive Dirac fermions”. In: *EPL* 111.3 (2015), p. 37004. DOI: [10.1209/0295-5075/111/37004](https://doi.org/10.1209/0295-5075/111/37004). URL: <https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F111%2F37004>.
- [38] V. K. Kozin et al. “Anomalous Exciton Hall Effect”. In: *Phys. Rev. Lett.* 126 (3 2021), p. 036801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.126.036801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.036801). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.036801>.
- [39] P. S. Alekseev. “Negative Magnetoresistance in Viscous Flow of Two-Dimensional Electrons”. In: *Phys. Rev. Lett.* 117 (16 2016), p. 166601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.166601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.166601). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.166601>.
- [40] Boris N. Narozhny et al. “Hydrodynamic Approach to Electronic Transport in Graphene”. In: *Annalen der Physik* 529.11 (2017), p. 1700043. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.201700043>. URL: <https://doi.org/10.1002/andp.201700043>.
- [41] Boris N. Narozhny. “Hydrodynamic approach to two-dimensional electron systems”. In: *La Rivista del Nuovo Cimento* 45 (2022), p. 661. DOI: [10.1007/s40766-022-00036-z](https://doi.org/10.1007/s40766-022-00036-z).
- [42] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Physical Kinetics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1981.
- [43] M. M. Glazov and L. E. Golub. “Spin and valley Hall effects induced by asymmetric interparticle scattering”. In: *Phys. Rev. B* 106 (23 2022), p. 235305. DOI: [10.1103/PhysRevB.106.235305](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.235305).

- URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.235305>.
- [44] B. I. Sturman. “Collision integral for elastic scattering of electrons and phonons”. In: *Soviet Physics Uspekhi* 27.11 (1984), pp. 881–884. DOI: [10.1070/pu1984v027n11abeh004122](https://doi.org/10.1070/pu1984v027n11abeh004122). URL: <https://doi.org/10.1070/pu1984v027n11abeh004122>.