гия имеет максимум при $x < 1$ (кривая 2) и поэтому даже на пороге нельзя получить нулевую частоту релаксационных колебаний. В этом случае возможен некоторый гистерезис и в колебательном режиме.

6. В заключение остановимся на физической картине эффекта и возможностях его использования.

Вследствие сильной неадиабатичности сверхпроводник при малых плотностях тока ведет себя как и при постоянном токе, равном среднеквадратичному значению переменного, но мгновенная энергия конденсированного состояния при этом изменяется пропорционально квадрату мгновенного значения тока. При увеличении тока эта энергия может достигнуть в максимуме энергии нормального состояния, в то время как плотность куперовских пар, определяемая среднеквадратичным значением тока, все еще велика. Равенство энергий сверхпроводящего и нормального состояний включает новый, значительно более быстрый механизм релаксации, вследствие чего плотность пар падает до нуля. Другими словами, здесь происходит возбуждение пар сообщением им за очень короткое время (много меньше T_s) кинетической энергии, превышающей энергию их конденсации.

В определенных условиях вслед за разрушением сверхпроводимости автоматически возникают условия ее восстановления. Поэтому в цепи СВЧ возникают релаксационные колебания тока, а в сверхпроводнике — колебания плотности конденсата.

Наблюдение описанных эффектов может дать еще один метод исследования таких параметров сверхпроводника, как F_s, Δ, ρ_s и, кроме того, удобный метод исследования его релаксационных характеристик.

Автор благодарен Л. П. Горькову и Э. А. Канеру за детальное обсуждение работы и сделанные ими ценные замечания.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
3 июля 1969 г.

Литература

[1] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer. Phys. Rev., 108, 1175, 1957.
[2] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 20, 1064, 1950.
[3] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг. ЖЭТФ, 54, 612, 1968.
[4] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг. ЖЭТФ, 55, 2430, 1968.
[5] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг. ЖЭТФ, 56, 1297, 1969.
[6] П. Де Жен. Сверхпроводимость металлов и сплавов. Изд. Мир, 1968, стр. 225.
[7] В. В. Шмидт. ЖЭТФ, 54, 262, 1968.
[8] G. Lucas, M. J. Stephen. Phys. Rev., 154, 349, 1967.
[9] D. L. Feucht, J. B. Woodford. J. Appl. Phys., 32, 1882, 1961.
[10] Дж. Займан. Принципы теории твердого тела. Изд. Мир, 1966, стр. 403.

A THIN SUPERCONDUCTING FILM IN AN UHF FIELD

S. A. Peskovatsky

Dynamic destruction of superconductivity of a thin film by an UHF current is considered within the framework of the phenomenological theory. Excitation of Cooper pairs through an energy gap by an UHF current of frequency $\omega \ll h^{-1}\Delta$ is discussed. The possibilities of studying the gap and the relaxation rate in the condensed state which arise in this case are mentioned.

Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 58 *1970* *Вып. 3*

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН С РАЗЛИЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров

Получены уравнения для огибающих волн с различными круговыми поляризациями в изотропной нелинейной среде. Исследуются устойчивость, самофокусировка этих волн, а также установившиеся волны огибающих. Результаты применяются к задаче о нелинейных электромагнитных волнах в изотропной плазме.

1. Введение

По причине тензорного характера некоторых важных механизмов нелинейности (таких, например, как высокочастотный эффект Керра [1]) при рассмотрении самовоздействия электромагнитных волн необходимо учитывать их поляризацию. В настоящей работе рассматривается общая задача о самовоздействии волн с различными поляризациями в изотропной, негиротропной среде. В разделе 2 мы выводим систему нестационарных параболических уравнений для огибающих волн с двумя круговыми поляризациями. С помощью этих уравнений в разделах 3, 4 рассматриваются неустойчивость и самофокусировка волн с различной поляризацией, а также установившиеся «волны огибающих».

Мы показываем, что при весьма общих предположениях полное «число квантов» с каждой круговой поляризацией является сохраняющейся величиной. Отсюда мы делаем вывод о том, что волна с заданной круговой поляризацией не может распасться на волны с линейной поляризацией. Наоборот, волна с линейной поляризацией может в определенных условиях быть неустойчивой относительно распада на волны с противоположными круговыми поляризациями. Что касается установившихся волн огибающих, то оказывается, что кроме известных ранее периодических и уединенных волн [2] могут существовать значительно более сложные типы установившихся волн, которые можно трактовать как «бездиссипативные ударные волны огибающих».

В разделе 5 рассматриваются неустойчивости электромагнитных волн с круговой и линейной поляризациями в изотропной плазме.

2. Основные уравнения

Рассмотрим изотропную, негиротропную среду, обладающую кубической нелинейностью. Уравнения электромагнитного поля в такой среде имеют вид

$$\left\{k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}(\omega)\right\}E_\beta(\mathbf{k}\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\int \varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}_1\omega_1, \mathbf{k}_2\omega_2, \mathbf{k}_3\omega_3)E_\beta(\mathbf{k}_1\omega_1)\cdot E_\gamma(\mathbf{k}_2\omega_2)E_\delta(\mathbf{k}_3\omega_3)\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\delta_{\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3. \quad (1)$$

Здесь

$$\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}(\omega)=\varepsilon^{tr}(\omega)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)+\varepsilon^{l}(\omega)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}$$

и $\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}_1\omega_1, \mathbf{k}_2\omega_2, \mathbf{k}_3\omega_3)$ — соответственно линейная и нелинейная части тензора диэлектрической проницаемости. Тензор $\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по последним трем индексам.

В дальнейшем будем предполагать, что частоты и волновые векторы всех волн близки друг к другу. Разобьем электромагнитное поле на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\mathbf{E}_{k\omega}=\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}+\mathbf{A}^{*}_{-\mathbf{k},-\omega}.$$

Для новых переменных имеем

$$\left\{k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}\right\}A_\beta=\frac{\omega^2}{c^2}\int\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}_1\omega_1, \mathbf{k}_2\omega_2, \mathbf{k}_3\omega_3)\cdot$$
$$\cdot A_\beta^*(\mathbf{k}_1\omega_1)A_\gamma(\mathbf{k}_2\omega_2)A_\delta(\mathbf{k}_3\omega_3)\,\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\cdot$$
$$\cdot\delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3. \qquad (2)$$

Здесь

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2, \mathbf{k}_3, \omega_3)=3\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega, -\mathbf{k}_1, -\omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2, \mathbf{k}_3, \omega_3).$$

В прозрачной среде тензор $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обладает свойствами симметрии:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2, \mathbf{k}_3, \omega_3)=\eta_{\beta\alpha\gamma\delta}(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}_2, \omega_2, \mathbf{k}_3, \omega_3)=$$
$$=\eta_{\alpha\beta\delta\gamma}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_3, \omega_3, \mathbf{k}_2, \omega_2)=\eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{k}_2, \omega_2, \mathbf{k}_3, \omega_3, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}_1, \omega_1). \qquad (3)$$

Предположим, что в среде отсутствуют продольные колебания, т. е. уравнение $\varepsilon^l=0$ не имеет решений. В этом случае продольная компонента электрического поля возникает только за счет малого нелинейного члена и ею можно пренебречь.

Введем единичный вектор поляризации $\mathbf{n}(\mathbf{k})$, такой, что $(\mathbf{k}, \mathbf{n}(\mathbf{k}))=0$, $|\mathbf{n}(\mathbf{k})|^2=1$, и построим вектор

$$\mathbf{S}(\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathbf{n}(\mathbf{k})+\frac{i[\mathbf{k}, \mathbf{n}(\mathbf{k})]}{|\mathbf{k}|}\right],$$

обладающий следующими свойствами:

$$\mathbf{S}(-\mathbf{k})=\mathbf{S}^*(\mathbf{k}),$$
$$(\mathbf{S}(\mathbf{k}), (\mathbf{S}(\mathbf{k}))=(\mathbf{S}^*(\mathbf{k}), \mathbf{S}^*(\mathbf{k}))=0,$$
$$(\mathbf{S}(\mathbf{k}), \mathbf{S}^*(\mathbf{k}))=1,$$
$$\left[\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \mathbf{S}(\mathbf{k})\right]=i\mathbf{S}(\mathbf{k}), \qquad \left[\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \mathbf{S}^*(\mathbf{k})\right]=-i\mathbf{S}^*(\mathbf{k}).$$

Определенный таким образом вектор $\mathbf{S}(\mathbf{k})$ есть собственный вектор тензора Френеля

$$\Pi_{\alpha\beta}=k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}.$$

Представим фурье-компоненту $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}$ в виде

$$\mathbf{A}_{k\omega}=\mathbf{S}(\mathbf{k})\,b_{k\omega}^{+}+\mathbf{S}^*(\mathbf{k})\,b_{k\omega}^{-}.$$

Тогда

$$\hat{\Pi}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}=\mathbf{S}(\mathbf{k})\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right)b_{\mathbf{k}\omega}^{+}+\mathbf{S}^*(\mathbf{k})\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right)b_{\mathbf{k}\omega}^{-}.$$

При таком определении $b_{\mathbf{k}\omega}^{+}$ и $b_{\mathbf{k}\omega}^{-}$ есть комплексные амплитуды волн, обладающих различной круговой поляризацией. Для достаточно слабой нелинейности можно считать

$$\hat{\Pi}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}\approx-(\omega-\omega_{\mathbf{k}})\,\mathbf{S}(\mathbf{k})\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right)'_{\omega_{\mathbf{k}}}b^{+}_{\mathbf{k}\omega}-(\omega-\omega_{\mathbf{k}})\,S^*(\mathbf{k})\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right)'_{\omega_{\mathbf{k}}}b^{-}_{\mathbf{k}\omega}, \qquad (4)$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ — законы дисперсии волн.

Введем среднее волновое число k_0 $(|\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_0|\ll k_0)$ Тогда можно приближенно положить $\mathbf{S}(\mathbf{k}_i)\approx\mathbf{S}(\mathbf{k}_0)$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)\approx\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)=\tilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. При этих предположениях тензор нелинейной поляризации в общем случае изотропной, негиротропной среды имеет вид [3]:

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma\delta}=a\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+{}^1/_4 b(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}). \qquad (5)$$

Умножая уравнения (2) на $\mathbf{S}(\mathbf{k})$, $\mathbf{S}^*(\mathbf{k})$, с учетом (4), (5) получим

$$(\omega-\omega_{\mathbf{k}})\,b^{+}_{\mathbf{k}\omega}+\int[Qb^{+*}_{\mathbf{k}_1\omega_1}b^{+}_{\mathbf{k}_2\omega_2}+Pb^{-*}_{\mathbf{k}_1\omega_1}b^{-}_{\mathbf{k}_2\omega_2}]\,b^{+}_{\mathbf{k}_3\omega_3}\cdot$$
$$\cdot\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3=0, \qquad (6)$$
$$(\omega-\omega_{\mathbf{k}})\,b^{-}_{\mathbf{k}\omega}+\int[Qb^{-*}_{\mathbf{k}_1\omega_1}b^{-}_{\mathbf{k}_2\omega_2}+Pb^{+*}_{\mathbf{k}_1\omega_1}b^{+}_{\mathbf{k}_2\omega_2}]\,b^{-}_{\mathbf{k}_3\omega_3}\cdot$$
$$\cdot\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\delta_{\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3=0,$$

где

$$Q=\frac{1}{2}b\frac{\omega^2}{[\omega^2\varepsilon^{tr}]'}, \qquad P=\left(2a+\frac{1}{2}b\right)\frac{\omega^2}{[\omega^2\varepsilon^{tr}]'} \qquad (7)$$

В системе уравнений (6) проведем разложения $\omega_{\mathbf{k}}$ в ряд по степеням $\delta_{\mathbf{k}}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$ до второго порядка и совершим обратные преобразования Фурье по времени и координатам. При этом введем огибающие $a^\pm$ вместо величин $b^\pm$:

$$a^\pm(\mathbf{r}, t)=e^{i\omega(\mathbf{k}_0)t-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}b^\pm(\mathbf{r}, t).$$

Уравнения для огибающих имеют вид

$$i\left(\frac{\partial a^+}{\partial t}+v\frac{\partial a^+}{\partial x}\right)+\hat{\mathscr{L}}a^+=[Q|a^+|^2+P|a^-|^2]a^+,$$
$$i\left(\frac{\partial a^-}{\partial t}+v\frac{\partial a^-}{\partial x}\right)+\hat{\mathscr{L}}a^-=[Q|a^-|^2+P|a^+|^2]a^-. \qquad (8)$$

Здесь

$$\hat{\mathscr{L}}=\frac{\omega_{\mathbf{k}}''}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\omega}{\partial k}\Delta_\perp, \qquad v=\frac{\partial\omega}{\partial k}.$$

Система уравнений (8) имеет решения

$$a^+=A_1e^{-i\Omega t+i\varkappa_1 x}, \quad a^-=A_2e^{-i\Omega t+i\varkappa_2 x}, \qquad (9)$$

где

$$\Omega=Q|A_1|^2+P|A_2|^2+\frac{\omega''}{2}\varkappa_1^2+v\varkappa_1=$$
$$=Q|A_2|^2+P|A_1|^2+\frac{\omega''}{2}\varkappa_2^2+v\varkappa_2.$$

Решение (9) есть волна с эллиптической поляризацией. Как легко видеть, при $Q \neq P$ величина $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, так что будет происходить вращение плоскости поляризации эллиптически поляризованной волны. На этот эффект (при керровском механизме нелинейности) обратили внимание Зельдович и Райзер [3].

При $a^+ = a^- = a / \sqrt{2}$ мы имеем линейно поляризованную волну, подчиняющуюся уравнению

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)a + \hat{\mathscr{L}}a = \frac{1}{2}(Q+P)\,|a|^2\,a. \tag{10}$$

Это уравнение ранее использовалось одним из авторов в работе [4].

Заметим, что величины

$$G^+ = \int a^{+*}\,a^+\,dr, \qquad G^- = \int a^{-*}\,a^-\,dr \tag{11}$$

являются интегралами движения уравнений (8). Этот результат может быть интерпретирован следующим образом. Описываемое нами классическое электромагнитное поле есть предельное состояние квантованного поля. При этом величины a^+, a^- представляют собой классические аналоги операторов уничтожения квантов электромагнитного поля, обладающих заданной круговой поляризацией, а уравнения (8) — аналог гейзенберговских уравнений движения для этих операторов. Кубическая нелинейность в этих уравнениях соответствует учету процессов рассеяния квантов друг на друге. В каждом акте рассеяния должен сохраняться полный момент импульса, который складывается из спинового (поляризация) и орбитального (относительное движение) моментов. Однако в рассматриваемом нами случае почти монохроматической волны средний орбитальный момент весьма мал (порядка $\Delta k / k$) по сравнению со спиновым. Таким образом, главную роль играют процессы рассеяния, сохраняющие поляризацию квантов. В таком случае полное число квантов каждой поляризации сохраняется, что и соответствует сохранению величин (11). Для учета нелинейных членов, описывающих рассеяние с изменением поляризации, нарушающее сохранение величин (11), нужно разлагать тензор $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и векторы $\mathbf{S}(k_i)$ в ряд по степеням Δk_i.

Простейшим механизмом нелинейности является скалярная нелинейность $\mathbf{D}_{\text{нл}} = \varepsilon_2|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$. При этом $a = 0$, $b = 2\varepsilon_2$, $P = Q$. Для этого механизма волны с различными поляризациями ведут себя одинаково.

Другим важным механизмом нелинейности является высокочастотный эффект Керра, для которого $\mathbf{D}_{\text{нл}} = {}^1\!/_4\varepsilon_2[3\mathbf{E}^*(\mathbf{EE}) + \mathbf{E}(\mathbf{EE}^*)]$,

$$a = {}^3\!/_4\varepsilon_2, \quad b = {}^1\!/_2\varepsilon_2, \quad \text{т. е. } Q = \varepsilon_2/4, \quad P = {}^7\!/_4\varepsilon_2.$$

Для эффекта Керра показатель нелинейности для круговой поляризации ($Q = {}^1\!/_4\varepsilon_2$) в четыре раза меньше показателя нелинейности для линейной поляризации (${}^1\!/_2(P+Q) = \varepsilon_2$), что и было ранее отмечено в работах [1, 3, 6]. В связи с этим в ряде работ [5, 11] высказывалось предположение, что при эффекте Керра волна с круговой поляризацией распадается на волны с линейной поляризацией. Однако для образования линейно поляризованной волны из волны с круговой поляризацией необходимо появление волн с противоположной круговой поляризацией, что в силу законов сохранения (11) невозможно.

Заметим, что из-за инерционности эффекта Керра, уравнения (8) годятся только для рассмотрения модуляции с достаточно большими продольными размерами $l \gg v\tau_{\text{рел}}$, где $\tau_{\text{рел}}$ — время релаксации нелинейности.

Уравнения (8) описывают и стационарные пучки. При этом

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\omega_k''}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll v\frac{\partial}{\partial x},$$

так что уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^+}{\partial x} + \frac{1}{2k}\Delta_\perp a^+ &= \frac{1}{v}[Q|a^+|^2 + P|a^-|^2]a^+, \\ \frac{\partial a^-}{\partial x} + \frac{1}{2k}\Delta_\perp a^- &= \frac{1}{v}[Q|a^-|^2 + P|a^+|^2]a^-. \end{aligned} \tag{12}$$

Ввиду сходства этой системы с системой (8) (x играет роль времени) все полученные нами ниже результаты могут быть перенесены на стационарный случай. В частности, из уравнений (12) следуют соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}\int a^+a^{+*}\,dr_\perp = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int a^-a^{-*}\,dr_\perp = 0,$$

выражающие собой сохранение числа квантов каждой поляризации вдоль оси x.

3. Устойчивость монохроматической волны

Задача об устойчивости электромагнитных волн в нелинейных средах изучалась в работах [4, 7–9]. Мы ограничимся исследованием устойчивости линейно поляризованной и циркулярно поляризованной волн с амплитудой A_0. Волны с круговой поляризацией описываются уравнением

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t} + v\frac{\partial a}{\partial x}\right) + \hat{\mathscr{L}}a = -Q|a|^2\,a. \tag{13}$$

Выберем возмущение в виде $\delta a \sim e^{-i\Omega t + ipr}$. Тогда исследование устойчивости для уравнения (13) приводит к дисперсионному уравнению

$$\Omega_{1,2} = -vp \pm [(Lp^2)^2 + 2Lp^2QA_0^2]^{1/2}.$$

Здесь

$$L = \frac{1}{2}\xi_\alpha\xi_\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\,\partial k_\beta}, \qquad \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}.$$

Для $\xi \parallel \mathbf{k}_0$ имеем $L = {}^1\!/_2\partial^2\omega / \partial k^2$, для $\xi \perp \mathbf{k}_0$ величина $L = (1/2k)\partial\omega/\partial k > 0$. Волна неустойчива, если $LQ < 0$, что для одномерного случая соответствует теореме Лайтхилла [7] о связи знака сдвига частоты и знака второй производной ω_k'' с фактом неустойчивости волны. При этой неустойчивости возбуждаются волны той же поляризации, что и исходная волна.

Для линейно поляризованной волны дисперсионное уравнение имеет вид

$$(\Omega + vp)^2 - 2QLp^2A_0^2 - (Lp^2)^2 = \pm 2|P|Lp^2A_0^2.$$

Это уравнение имеет две пары корней

$$\Omega_{1,2} = -vp \pm \sqrt{(Lp^2)^2 + 2Lp^2(Q+P)A_0^2},$$

$$\Omega_{3,4} = -vp \pm \sqrt{(Lp^2)^2 + 2Lp^2(Q-P)A_0^2}.$$

Первая пара корней соответствует возбуждению волн той же поляризации, что и исходная волна. Для этой неустойчивости также справедлива теорема Лайтхилла. Вторая пара корней соответствует «распаду» линейно поляризованной волны на две волны с различными круговыми поляризациями. При $|P|>|Q|$ одна из этих неустойчивостей обязательно имеет место.

Если механизм нелинейности скалярный, то возможна только неустойчивость первого типа, и волна с линейной поляризацией ведет себя так же, как и циркулярно поляризованная волна. При эффекте Керра ($P>Q>>0$) характер неустойчивости зависит от направления вектора ξ. При $\xi\perp\mathbf{k}_0$ величина $L=(1/2k)\partial\omega/\partial k>0$ и имеет место неустойчивость первого типа. При $\xi\parallel\mathbf{k}_0$ осуществляется неустойчивость первого типа, если $\omega''>0$, и неустойчивость второго типа, если $\omega''<0$.

При комбинации скалярной дефокусирующей нелинейности (например, тепловая дефокусировка) и эффекта Керра возможны случаи, когда для всех направлений ξ осуществляется неустойчивость с распадом на две циркулярно поляризованные волны.

4. Установившиеся волны и самофокусировка

Перейдем в уравнениях (8) к действительным переменным $a^+=A_1e^{i\Phi_1}$, $a^-=A_2e^{i\Phi_2}$. Получим (при $L_{\alpha\beta}=\partial^2\omega/\partial k_\alpha\partial k_\beta$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)A_{1,2}^2+L_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{1,2}\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial x_\beta}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_{1,2}+\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial x_\beta}=$$
$$=QA_{1,2}+PA_{2,1}+\frac{1}{2A_{1,2}}L_{\alpha\beta}\frac{\partial^2A_{1,2}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \qquad (14)$$

Будем искать решения этих уравнений в виде

$$A_{1,2}=A_{1,2}(\zeta),$$
$$\Phi_{1,2}=s_{1,2}t+\frac{(\mathbf{v}\xi)^2-c^2}{2L}t-\frac{c-(\mathbf{v}\xi)}{L}z+\tilde\Phi_{1,2}(\zeta), \qquad (15)$$

где

$$\zeta=z-ct,\quad z=\xi_\alpha x_\alpha,\quad |\xi_\alpha|=1.$$

Для этих величин получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}A_1^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde\Phi_1=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\zeta}A_2^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde\Phi_2=0, \qquad (16)$$

$$s_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde\Phi_1}{\partial\zeta}\right)^2=QA_1^2+PA_2^2+\frac{L}{2A_1}\frac{\partial^2A_1}{\partial\zeta^2},$$
$$s_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde\Phi_2}{\partial\zeta}\right)^2=QA_2^2+PA_1^2+\frac{L}{2A_2}\frac{\partial^2A_2}{\partial\zeta^2}. \qquad (17)$$

Решения такого типа представляют собой плоские установившиеся волны огибающих, распространяющиеся в направлении вектора ξ со скоростью c. При $(\xi\mathbf{v})=0$ и $c=0$ эти решения представляют собой пучки со стационарными огибающими, модулированными в поперечном направлении, в том числе и плоские самофокусированные пучки. Для самофокусированных пучков фаза постоянна во всем пространстве, $\tilde\Phi_{1,2}=\mathrm{const}$, и система (17) приводится к виду

$$\frac{\partial^2A_1}{\partial\zeta^2}=-\frac{\partial U}{\partial A_1},\qquad \frac{\partial^2A_2}{\partial\zeta^2}=-\frac{\partial U}{\partial A_2}, \qquad (18)$$

где

$$U(A_1,A_2)=\frac{1}{L}\left\{-\frac{s_1A_1^2}{2}-\frac{s_2A_2^2}{2}+\frac{1}{4}Q(A_1^4+A_2^4)+\frac{P}{2}A_1^2A_2^2\right\}.$$

Уравнения (18) формально аналогичны уравнениям двумерного движения частицы в поле с потенциалом $U(A_1, A_2)$, величина ζ играет роль времени. Самофокусированным пучкам, обладающим ограниченной энергией, соответствуют решения, уходящие в «момент времени» $\zeta=-\infty$ из точки $A_1=A_2=0$ и возвращающиеся в эту же точку при $\zeta\to\infty$.

Заметим, что в двумерном случае задание условия $A_1=A_2=0$ при $\zeta\to-\infty$ не определяет однозначно решения. Необходимо еще задавать «направление» в плоскости A_1, A_2, по которому начинает свое движение частица. При этом последующий характер движения будет зависеть от этого направления, в частности, частица вернется в исходную точку при $\zeta\to\to+\infty$ только при вполне определенном начальном направлении движения. Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что в каждом конкретном случае (при каждых значениях констант s_1 и s_2) самофокусированный пучок будет иметь вполне определенную эллиптическую поляризацию на своей периферии. При этом поляризация пучка будет, вообще говоря, зависеть от поперечной координаты ζ.

Самофокусировка возможна не при всяких P и Q. При $P=Q>0$ возможна самофокусировка волн с любой эллиптической поляризацией (при этом $s_1=s_2$). При $P\neq Q$, $P>0$, $Q>0$ также возможна самофокусировка волн с любой поляризацией на «крыльях», которая, однако, теперь зависит от соотношения между s_1 и s_2. При $Q>0$, $P<0$ самофокусируются волны только с круговой или достаточно близкой к круговой поляризацией. Напротив, при $Q<0$, $P>0$ самофокусируются только волны с линейной или достаточно близкой к линейной поляризацией. Наконец, в случаях $P<0$, $Q<0$, самофокусировка вообще отсутствует. Заметим, что в случае $0>Q>P$ возможна неустойчивость линейно поляризованной волны относительно распада на две циркулярно поляризованные, но фокусировка невозможна (см. раздел 3). Как видно, эта неустойчивость принципиально отличается от обычной неустойчивости плоских волн, приводящей к образованию самофокусированных каналов.

Если в решениях (15) вектор ξ параллелен направлению исходной волны, то эти решения представляют собой продольные волны модуляции, и самофокусированным решениям соответствуют одиночные импульсы [4], распространяющиеся без искажения формы. Все сказанное выше о самофокусировке относится и к ним, с той только разницей, что везде вместо P и Q следует рассматривать P/L и Q/L, так как в этом случае $L=\partial^2\omega/\partial k^2$ может иметь различный знак.

Как мы уже отмечали, частица, вышедшая в момент времени $\zeta=-\infty$ из точки $A_1=A_2=0$, не обязательно вернется обратно в ту же точку. Для этого, как было отмечено, она должна при $\zeta\to-\infty$ двигаться по вполне определенному «направлению» в плоскости A_1, A_2. При любом направлении частица «запутывается» в потенциальном поле и никогда не вернется в исходную точку, хотя время от времени будет подходить к ней достаточно близко (см. [10]). Решение в этом случае состоит из областей нерегулярных колебаний, разделенных более или менее большими промежутками, в которых решение близко к нулю. Детальное исследование таких решений имеет не очень много смысла, так как следует ожидать, что в самофокусированном случае эти решения будут неустойчивы (см. [4]).

Более интересен антисамофокусированный случай. (Конкретно мы будем рассматривать продольные волны огибающих и положим $P/L<0$, $Q/L<0$.) В этом случае мы уже не можем ограничиться решениями со стационарной фазой, так что необходимо исходить из общих уравнений (16), (17). Проинтегрировав уравнения (16), получим

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} = \frac{M_1}{A_1^2}, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta} = \frac{M_2}{A_2^2},$$

где M_1, M_2 — константы.

Для потенциала $U(A_1, A_2)$ имеем теперь выражение

$$U(A_1, A_2) = \frac{1}{L}\left\{-\frac{s_1A_1^2}{2} - \frac{s_2A_2^2}{2} + \frac{1}{4}Q(A_1^4 + A_2^4) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}PA_1^2A_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M_1^2}{A_1^2} + \frac{1}{2}\frac{M_2^2}{A_2^2}\right\}. \qquad (19)$$

Теперь амплитуды уже не могут обращаться в нуль. Однако при $s_1, s_2 < 0$ на плоскости A_1, A_2 существует седловая точка, определяемая как решение системы уравнений $\partial U / \partial A_1 = 0$, $\partial U / \partial A_2 = 0$. Седловая точка соответствует волне с вполне определенной эллиптической поляризацией (в зависимости от констант s_1, s_2). Представляют интерес решения, выходящие при $\zeta \to -\infty$ из этой седловой точки. Для волн с постоянной поляризацией такие решения при $\zeta \to +\infty$ опять возвращаются в исходную точку, что соответствует распространению вдоль исходной волны уединенного импульса разрежения. Такое же решение может существовать и в нашем случае двух поляризаций, хотя для него необходимо выбирать определенное направление в плоскости A_1, A_2 вблизи седловой точки. Могут существовать также решения, не возвращающиеся обратно в седловую точку, но «запутывающиеся» в потенциальной яме. При должном выборе исходного направления такое решение может совершить сколь угодно много колебаний, прежде чем подойдет достаточно близко к исходной точке.

Ранее в работе [12] были рассмотрены «ударные волны огибающих», возникающие в среде с диссипативной нелинейностью (конкретно при учете запаздывания нелинейности). Описанная нами выше стационарная волна огибающих может быть интерпретирована как полностью бездиссипативная ударная волна. Действительно, при $\zeta \to -\infty$ амплитуды A_1, $A_2 \to 0$, тогда как при больших положительных ζ имеют место нерегулярные колебания амплитуд A_1, A_2. Ввиду инвариантности уравнений (18) относительно изменения знака, возможны также решения, убывающие при $\zeta \to +\infty$.

5. Электромагнитные волны в плазме

Рассмотрим теперь электромагнитные волны в однородной изотропной плазме нулевой температуры. Движением ионов будем пренебрегать и учтем только чисто электронные нелинейности. Тензор нелинейной поляризуемости будем вычислять, исходя из гидродинамической системы уравнений для электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{vH}] - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}. \qquad (20)$$

Здесь мы учли релятивистские эффекты в первом порядке по v^2/c^2. Будем предполагать, что в плазме существует электромагнитная волна произвольной эллиптической поляризации и вычислим создаваемую ею нелинейную поляризацию плазмы. При вычислении учтем нелинейность, создаваемую релятивистскими членами, а также образование вынужденной продольной плазменной волны с частотой 2ω и волновым вектором $2\mathbf{k}$. В результате получим

$$\mathbf{D}_{\text{нл}} = \frac{\omega_p^4}{\omega^4}\frac{1}{4\pi m n_0 c^2}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{2k^2c^2}{s\omega_p^2 + 4k^2c^2}\right)\mathbf{A}^*(\mathbf{AA}) + \mathbf{A}(\mathbf{AA}^*)\right\}, \qquad (21)$$

откуда, пользуясь выражением $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, получим

$$a = \frac{\omega_p^4}{2\omega^3}\frac{1}{4\pi m n_0 c^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2k^2c^2}{3\omega_p^2 + 4k^2c^2}\right) > 0, \qquad (22)$$

$$b = \frac{2\omega_p^4}{\omega^3}\frac{1}{4\pi m n_0 c^2}. \qquad (23)$$

Для электромагнитных волн в плазме частота $\omega_k = \sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2}$ и тензор $\partial^2\omega / \partial k_\alpha \partial k_\beta$ положительно определены. В соответствии с этим, как линейно, так и циркулярно поляризованные волны неустойчивы. Максимальные инкременты неустойчивости равны

$$\gamma_{max} = \frac{\omega_p^4}{2\omega^3}\frac{E^2}{4\pi m n_0 c^2}$$

для циркулярно поляризованных волн и

$$\gamma_{max} = \frac{\omega_p^4}{2\omega^3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2k^2c^2}{3\omega_p^2 + 4k^2c^2}\right)\frac{E^2}{4\pi m n_0 c^2}$$

для линейно поляризованных волн. Заметим еще, что при $\omega \gg \omega_p$ механизм нелинейности в плазме становится чисто скалярным.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
8 июля 1969 г.

Литература

[1] Y. Shen. Phys. Lett., 20, 378, 1966.
[2] Л. О. Островский. ЖЭТФ, 51, 1189, 1966.
[3] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. ЖЭТФ, Письма, 3, 137, 1966.
[4] В. Е. Захаров. ЖЭТФ, 53, 1735, 1967.
[5] С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, В. В. Хохлов. УФН, 93, *1*, 1967.
[6] P. D. Maker, R. W. Terhune, C. H. Savage. Phys. Rev. Lett., 12, 507, 1964.
[7] M. J. Lighthill. J. Inst. Math. Appl., 1, 219, 1965.
[8] В. И. Беспалов, В. И. Таланов. ЖЭТФ, Письма, 3, 471, 1966.
[9] В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов. Труды II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Изд. Наука, 1968.
[10] Г. Биркгоф. Динамические системы, М.— Л., Огиз, 1941.
[11] А. А. Чабан. ЖЭТФ, Письма, 5, 20, 1967.
[12] Л. Л. Островский. ЖЭТФ, 54, 1235, 1968.

SELF EXCITATION OF WAVES WITH DIFFERENT POLARIZATIONS IN NONLINEAR MEDIA

A. L. Berkhoer, V. E. Zakharov

Equations are derived for the envelope waves with different circular polarizations in an isotropic nonlinear medium. The stability and self-focussing of such waves and also the stationary envelope waves are investigated. The results are applied to the problem of nonlinear electromagnetic waves in an isotropic plasma.