В силу свойств 4), 5) и 6) множеств W_ν множество W_{ν_0} содержится во всех $f(U^{(N+1)}_{S(\nu)0})$ и $f(U^{(N+1)}_{S(\nu)1})$.

Поэтому у точки $y^{(N+1)}$ найдется по прообразу

$$x^{(N+1)}_{S(\nu)0} \quad \text{и} \quad x^{(N+1)}_{S(\nu)1},$$

лежащему в каждом из множеств $U^{(N+1)}_{S(\nu)0}$ и $U^{(N+1)}_{S(\nu)1}$. В силу открытости f у $y^{(N+1)} \in W_{\nu_0} \subset V^{(N)}$ найдется окрестность $V^{(N+1)}$, содержащаяся вместе со своим замыканием в $V^{(N)}$, во всех $f(U^{(N+1)}_{S(\nu)0})$ и $f(U^{(N+1)}_{S(\nu)1})$.

Легко проверить, что построенные точки $x^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и открытые множества $U^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и $V^{(n)}$ удовлетворяют условиям 1) — 8).

20 декабря 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П. С.* О счетнократных открытых отображениях.— ДАН СССР, 1936, т. 4, № 7, с. 283—287.

45

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОЧЕНЬ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА*

§ 1. Будем обозначать через

$$u_\alpha(P) = u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

компоненты скорости в момент времени t в точке с прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3. При изучении турбулентности естественно считать компоненты скорости $u_\alpha(P)$ в каждой точке $P = (x_1, x_2, x_3, t)$ изучаемой области G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) *случайными величинами* в смысле, принятом в теории вероятностей (см. по поводу такого подхода Миллионщиков [1]).

Обозначая через $\overline{A}$ математическое ожидание случайной величины A, предположим, что

$$\overline{u_\alpha^2} \quad \text{и} \quad \overline{(\partial u_\alpha / \partial x_\beta)^2}$$

конечны и ограничены в каждой ограниченной подобласти области G.

* ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.

Введем в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, t) новые координаты

$$y_\alpha = x_\alpha - x_\alpha^{(0)} - u_\alpha (P^{(0)}) (t - t^{(0)}), \quad s = t - t^{(0)}, \tag{1}$$

где

$$P^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t^{(0)})$$

— некоторая фиксированная точка из области G. Заметим, что координаты y_α какой-либо точки P зависят от случайных величин $u_\alpha (P^{(0)})$ и поэтому сами являются случайными величинами. Компоненты скорости в новых координатах равны

$$w_\alpha (P) = u_\alpha (P) - u_\alpha (P^{(0)}). \tag{2}$$

Пусть при каких-либо фиксированных значениях величин $u_\alpha (P^{(0)})$ точки $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеющие в системе координат (1) координаты $y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$, лежат в области G. Тогда можно определить $3n$-мерный условный закон распределения вероятностей F_n для величин

$$w_\alpha^{(k)} = w_\alpha (P^{(k)}), \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

при заданных

$$u_\alpha^{(0)} = u_\alpha (P^{(0)}).$$

Вообще говоря, закон распределения F_n зависит от параметров $x_\alpha^{(0)}$, $t^{(0)}$, $u_\alpha^{(0)}$, $y_\alpha^{(k)}$, $s^{(k)}$.

Определение 1. Турбулентность называется *локально однородной* в области G, если при любых фиксированных n, $y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$ закон распределения F_n не зависит от $x_\alpha^{(0)}$, $t^{(0)}$ и $u_\alpha^{(0)}$, пока все точки $P^{(k)}$ помещаются в G.

Определение 2. Турбулентность называется *локально изотропной* в области G, если она локально однородна и если, кроме того, указанные в определении 1 законы распределения инвариантны по отношению к вращениям и зеркальным отражениям исходной системы координатных осей (x_1, x_2, x_3).

По сравнению с введенным Тейлором [2] понятием *изотропной турбулентности* наше определение локально изотропной турбулентности *уже* в том отношении, что в нашем определении требуется независимость законов распределения F_n от $t^{(0)}$, т. е. стационарность во времени, и *шире* в том отношении, что ограничения накладываются лишь на законы распределения разностей скоростей, а не самих скоростей.

§ 2. Гипотеза изотропности в смысле Тейлора хорошо подтверждается экспериментально в случае турбулентности, вызванной прохождением потока через решетку (см. [3]). В большинстве других практически интересных случаев она может рассматриваться лишь как весьма грубое приближение к действительности даже для малых областей G и при очень больших числах Рейнольдса.

В отличие от этого автору представляется весьма правдоподобным, что в произвольном турбулентном потоке с достаточно большим числом Рейнольдса [1]

$$\mathrm{Re} = LU/\nu$$

в достаточно малых областях G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t), не лежащих вблизи границ потока или других его особенностей, осуществляется с хорошим приближением гипотеза локальной изотропности. При этом под «малой областью» подразумевается область, линейные размеры которой малы по сравнению с L, а временные — по сравнению с

$$T = U/L.$$

Естественно, что в столь общей и несколько неопределенной формулировке выдвинутое сейчас предположение не может быть строго доказано [2]. Чтобы сделать возможной его экспериментальную про-

---

[1] Здесь L и U обозначают типичные масштабы длин и скоростей для потока в целом.

[2] Приведем здесь лишь некоторые общие соображения в пользу высказанной гипотезы. При очень больших Re турбулентный поток можно представлять себе следующим образом: на осредненный поток (характеризующийся математическими ожиданиями $\overline{u_\alpha}$) накладываются «пульсации первого порядка», состоящие в беспорядочном перемещении отдельных объемов жидкости с диаметрами порядка $l^{(1)} = l$, (где l — прандтлевский путь перемешивания) друг относительно друга; порядок скоростей этих относительных перемещений обозначим через $v^{(1)}$. Пульсации первого порядка оказываются при очень большом Re в свою очередь неустойчивыми и на них накладываются пульсации «второго порядка» с путем перемешивания $l^{(2)} < l^{(1)}$ и относительными скоростями $v^{(2)} < v^{(1)}$; такой процесс последовательного измельчения турбулентных пульсаций происходит до тех пор, пока для пульсаций какого-либо достаточно большого порядка n число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}^{(n)} = l^{(n)} v^{(n)}/\nu$$

не окажется достаточно малым, чтобы влияние вязкости на пульсации n-го порядка было уже ощутительно и предупреждало образование накладывающихся на них пульсаций $(n+1)$-го порядка.

С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсациям более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости.

В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму. В пределах малых промежутков времени этот режим верку для отдельных частных случаев, мы указываем далее ряд следствий из гипотезы локальной изотропности.

§ 3. Будем обозначать через y вектор с компонентами y_1, y_2, y_3 и рассмотрим случайные величины

$$w_\alpha(y) = w_\alpha(y_1, y_2, y_3) = u_\alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t). \tag{3}$$

В силу предположения локальной изотропности их законы распределения не зависят от x_1, x_2, x_3 и t. Для первых моментов величин $w_\alpha(y)$ из локальной изотропности вытекает, что

$$\overline{w_\alpha(y)} = 0. \tag{4}$$

Переходим поэтому к изучению вторых моментов [3]

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \overline{w_\alpha(y^{(1)})\, w_\beta(y^{(2)})}. \tag{5}$$

Из локальной изотропности вытекает, что

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = {}^1/_2\,[B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(1)}) + B_{\alpha\beta}(y^{(2)}, y^{(2)}) - B_{\alpha\beta}(y^{(2)} - y^{(1)}, y^{(2)} - y^{(1)})]. \tag{6}$$

Эта формула позволяет ограничиться вторыми моментами вида $B_{\alpha\beta}(y, y)$. Для них

$$B_{\alpha\beta}(y, y) = \bar{B}(r)\cos\theta_\alpha\cos\theta_\beta + \delta_{\alpha\beta}B_{nn}(r), \tag{7}$$

где $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $y_\alpha = r\cos\theta_\alpha$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$;

$$\bar{B}(r) = B_{dd}(r) - B_{nn}(r), \tag{8}$$

$$B_{dd}(r) = \overline{[w_1(r, 0, 0)]^2}, \qquad B_{nn}(r) = \overline{[w_2(r, 0, 0)]^2}. \tag{9}$$

При $r = 0$ имеем

$$B_{dd}(0) = B_{nn}(0) = \frac{\partial}{\partial r}B_{dd}(0) = \frac{\partial}{\partial r}B_{nn}(0) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}B_{dd}(0) = 2\overline{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1}\right)^2} = 2a^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}B_{nn}(0) = 2\overline{\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1}\right)^2} = 2a_n^2. \tag{11}$$

естественно считать приближенно стационарным даже в том случае, если поток в целом нестационарен.

Так как при очень больших Re разности

$$w_\alpha(P) = u_\alpha(P) - u_\alpha(P^{(0)})$$

компонент скоростей в близких точках P и $P^{(0)}$ четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) определяются почти исключительно пульсациями высших порядков, то изложенная сейчас схема и приводит нас к гипотезе локальной изотропности в малых областях в смысле определений § 1 и 2.

[3] Все результаты § 3 вполне аналогичны полученным в [1, 2, 4] для случая изотропной турбулентности в смысле Тейлора.

Формулы (6) — (11) были получены без использования предположения о несжимаемости жидкости. Из этого предположения вытекает уравнение

$$r\,\partial B_{dd}/\partial r = -2\bar{B}, \tag{12}$$

позволяющее выразить B_{nn} через B_{dd}. Из (12) и (11) вытекает, что

$$a_n^2 = 2a^2. \tag{13}$$

Легко далее вычислить, что (в предположении несжимаемости) среднее рассеяние энергии в единицу времени на единицу массы равно

$$\bar{\varepsilon} = \nu\left\{2\overline{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_2}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial w_3}{\partial y_3}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial y_2}\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \overline{\left(\frac{\partial w_3}{\partial y_2} + \frac{\partial w_2}{\partial y_3}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial y_1}\right)^2}\right\} = 15\nu a^2. \tag{14}$$

§ 4. Рассмотрим преобразование координат

$$y'_\alpha = y_\alpha/\eta, \qquad s' = s/\sigma. \tag{15}$$

Скорости, кинематическая вязкость и среднее рассеяние энергии в новой системе координат выражаются следующими формулами:

$$w'_\alpha = w_\alpha\sigma/\eta, \qquad \nu' = \nu\sigma/\eta^2, \quad \bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}\sigma^3/\eta^2. \tag{16}$$

Примем теперь следующую гипотезу:

Первая гипотеза подобия. *Распределения F_n для локально изотропной турбулентности однозначно определяются величинами ν и $\bar{\varepsilon}$.*

Преобразование координат (15) при

$$\eta = \lambda = \sqrt{\nu/a} = \nu^{3/4}/\bar{\varepsilon}^{1/4}, \tag{17}$$

$$\sigma = 1/a = \sqrt{\nu/\bar{\varepsilon}} \tag{18}$$

приводит величинам $\nu' = 1$, $\bar{\varepsilon}' = 1$.

Поэтому в силу принятой гипотезы подобия соответствующая функция

$$B'_{dd}(r') = \beta_{dd}(r') \tag{19}$$

должна быть одинакова для всех случаев локально изотропной турбулентности. Формула

$$B_{dd}(r) = \sqrt{\nu\bar{\varepsilon}}\,\beta_{dd}(r/\lambda) \tag{20}$$

показывает в соединении с выведенными ранее, что вторые моменты $B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)})$ в случае локально изотропной турбулентности однозначно выражаются через ν, $\bar{\varepsilon}$ и универсальную функцию β_{dd}.

§ 5. Чтобы определить поведение функции $\beta_{dd}(r')$ при больших r', введем еще одну гипотезу.

Вторая гипотеза подобия[4]. *Если абсолютные величины векторов $y^{(k)}$ и их разностей $y^{(k)} - y^{(k')}$ (где $k' \neq k$) велики по сравнению с λ, то законы распределения F_n однозначно определяются величиной $\bar{\varepsilon}$ и не зависят от ν.*

Положим

$$y''_\alpha = y'_\alpha/k^3, \quad s'' = s'/k^2, \tag{21}$$

где y'_α и s' определены в соответствии с формулами (15), (17) и (18). Так как при любом k

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}'' = 1,$$

то при r' большом по сравнению с $\lambda' = 1$ в силу принятой сейчас гипотезы

$$B''_{dd}(r'') \approx B'_{dd}(r'') = \beta_{dd}(r'/k^3).$$

С другой стороны, из формулы (20) вытекает, что

$$B''_{dd}(r'') = (1/k^2)\, B'_{dd}(r') = (1/k^2)\, \beta_{dd}(r').$$

Таким образом, при больших r'

$$\beta_{dd}(r'/k^3) \approx (1/k^2)\, \beta_{dd}(r),$$

откуда

$$\beta_{dd}(r') \approx C\,(r')^{2/3}, \tag{22}$$

где C — абсолютная константа. В силу (17), (20) и (22) при r, больших по сравнению с λ,

$$B_{dd}(r) \approx C\bar{\varepsilon}^{2/3} r^{2/3}. \tag{23}$$

Из (23) и (12) легко вывести, что при r, больших по сравнению с λ,

$$B_{nn}(r) \approx {}^4/_3 B_{dd}(r). \tag{24}$$

Заметим по поводу последней формулы, что при r, малых по сравнению с λ, в силу (13) имеет место соотношение

$$B_{nn}(r) \approx 2B_{dd}(r). \tag{25}$$

28 декабря 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миллионщиков М. Д.* Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.

[4] В терминах схематического представления о турбулентности, развитого в примечании 2, λ есть масштаб наиболее мелких пульсаций, энергия которых непосредственно рассеивается в тепловую благодаря вязкости. Смысл второй гипотезы подобия заключается в том, что механизм передачи энергии от более крупных пульсаций к более мелким для пульсаций промежуточных порядков, для которых $l^{(k)}$ больше чем λ, не зависит от вязкости.

2. *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence. I—IV.— Proc. Roy. Soc. London, 1935, vol. A151, N 874, p. 421—478.
3. Modern developments in fluid mechanics/Ed. S. Goldstein. Oxford: Univ. Press, 1938, vol. 1, § 95. Рус. пер.: Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Гольдштейна. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1.]
4. *Karman Th. von.* The fundamentals of the statistical theory of turbulence.— J. Aeronaut. Sci., 1937, vol. 4, N 4, p. 131—138.

46

К ВЫРОЖДЕНИЮ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ*

Будем, подобно [1, 2], считать компоненты

$$u_\alpha(P,\ t) = u_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

скорости в момент времени t в точке $P = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ случайными величинами и через $\bar{A}$ обозначать математическое ожидание случайной величины A.

В случае изотропной турбулентности в смысле Тейлора (см. [3, 4])

$$\bar{u}_\alpha = 0 \tag{1}$$

и вторые моменты

$$b_{\alpha\beta} = \overline{u_\alpha(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, t)\, u_\beta(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, t)} \tag{2}$$

выражаются формулами (см. [1, 5])

$$b_{\alpha\beta} = \bar{b}(r,\ t)\cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta + \delta_{\alpha\beta} b_{nn}(r,\ t), \tag{3}$$

где

$$r^2 = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + (x_3^{(2)} - x_3^{(1)})^2,$$

$$x_\alpha^{(2)} - x_\alpha^{(1)} = r\cos\theta_\alpha,\ \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta,\quad \delta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{при } \alpha = \beta;$$

$$\bar{b}(r,\ t) = b_{dd}(r,\ t) - b_{nn}(r,\ t); \tag{4}$$

$$b_{dd}(r, t) = \overline{u_1(x_1, x_2\, x_3, t)\, u_1(x_1 + r, x_2, x_3, t)}; \tag{5}$$

$$b_{nn}(r, t) = \overline{u_2(x_1, x_2, x_3, t)\, u_2(x_1 + r, x_2, x_3, t)}; \tag{6}$$

$$\partial b_{dd}/\partial r = -(2/r)\,\bar{b}. \tag{7}$$

Формула (7) вместе с

$$b_{dd}(0, t) = b_{nn}(0, t) = \overline{[u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t)]^2} = b(t) \tag{8}$$

* ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.