ную в [2], и величину g, определяющуюся из (26) по виду функции $\psi(\rho)$.

Из (12) и (22) получаем

$$db/dt = -K\Lambda^{-1/5}b^{17/10}. \tag{29}$$

Интегрирование уравнения (29) приводит к результату

$$b = (10/7K)^{10/7}\Lambda^{2/7}(t - t_0)^{-10/7}. \tag{30}$$

Из (30), (13) и (12) вытекает

$$u = (10/7K)^{5/7}\Lambda^{1/7}(t - t_0)^{-5/7}, \tag{31}$$

$$L = (7K/10)^{2/7}\Lambda^{1/7}(t - t_0)^{2/7}. \tag{32}$$

Сопоставление (31) и (32) с (20) показывает, что действительно $p = {}^5/_7$.

4 марта 1941 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миллионщиков М. Д.* Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.
2. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
3. *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence. I—IV.— Proc. Roy. Soc. London, 1935, vol. A151, N 874, p. 421—478.
4. Modern developments in fluid mechanics/Ed. S. Goldstein. Oxford: Univ. Press, 1938, vol. 1, § 91. Рус. пер.: Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Гольдштейна М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1.
5. *Karman Th. von, Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence.— Proc. Roy. Soc. London, 1938, vol. A164, N 917, p. 192—215.
6. *Лойцянский Л. Г.* Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока.— Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440, с. 3—23.

47

РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ *

В моей заметке [1] было определено понятие локальной изотропности и были введены величины

$$B_{dd}(r) = \overline{[u_d(M') - u_d(M)]^2}, \qquad B_{nn}(r) = \overline{[u_n(M') - u_n(M)]^2}, \tag{1}$$

где r обозначает расстояние между точками M и M', $u_d(M')$ и $u_d(M)$ — компоненты скорости в точках M и M' по направлению $\overline{MM'}$, а $u_n(M)$ и $u_n(M')$ — компоненты скорости в M и M' по какому-либо перпендикулярному к $\overline{MM'}$ направлению.

* ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 19—21.

Для дальнейшего нам понадобятся еще третьи моменты

$$B_{ddd}(r) = \overline{[u_d(M') - u_d(M)]^3}. \tag{2}$$

При локально изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости имеет место уравнение

$$4\bar{\varepsilon} + \left(\frac{dB_{ddd}}{dr} + \frac{4}{r} B_{ddd}\right) = 6\nu \left(\frac{d^2B_{dd}}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dB_{dd}}{dr}\right), \tag{3}$$

аналогичное известному уравнению Кармана для изотропной турбулентности в смысле Тейлора. Здесь $\bar{\varepsilon}$ обозначает среднее рассеяние энергии в единицу времени на единицу массы. Уравнение (3) записывается в виде

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{4}{r}\right)\left(6\nu \frac{dB_{dd}}{dr} - B_{ddd}\right) = 4\varepsilon \tag{4}$$

и в силу условия $dB_{dd}(r)/dr|_{r=0} = B_{ddd}(0) = 0$ дает

$$6\nu dB_{dd}/dr - B_{ddd} = (^4/_5)\,\bar{\varepsilon} r. \tag{5}$$

При малых r, как известно,

$$B_{dd} \approx (^1/_{15\nu})\,\bar{\varepsilon} r^2, \tag{6}$$

т. е.

$$6\nu dB_{dd}/dr \approx (^4/_5)\,\bar{\varepsilon} r.$$

Таким образом, при малых r в левой части уравнения (5) второй член бесконечно мал по сравнению с первым. При больших r, наоборот, первым членом можно пренебречь по сравнению со вторым, т. е. считать

$$B_{ddd} \approx -(^4/_5)\,\bar{\varepsilon} r. \tag{7}$$

Естественно допустить, что при больших r отношение

$$S = B_{ddd} : B_{dd}^{3/2}, \tag{8}$$

т. е. *асимметрия* распределения вероятностей для разности

$$\Delta u_d = u_d(M') - u_d(M),$$

остается постоянной. При этом допущении имеем для больших r

$$B_{dd} \approx C \bar{\varepsilon}^{2/3} r^{2/3}, \tag{9}$$

где

$$C = (-4/5S)^{2/3}. \tag{10}$$

Соотношение (9) было выведено в [1] из несколько других соображений [1].

[1] А. М. Обухов независимо нашел соотношение (9) из подсчета баланса распределения энергии пульсаций по спектру (см. [2]).

В [1] был введен *локальный масштаб* турбулентности

$$\lambda = (\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4} \tag{11}$$

и обосновано допущение, что

$$B_{dd}(r) = \sqrt{\nu\bar{\varepsilon}}\,\beta_{dd}(r/\lambda), \qquad B_{nn}(r) = \sqrt{\nu\bar{\varepsilon}}\,\beta_{nn}(r/\lambda), \tag{12}$$

где β_{dd} и β_{nn} — универсальные функции, для которых при малых ρ

$$\beta_{dd}(\rho) \approx (^1/_{15})\,\rho^2, \qquad \beta_{nn}(\rho) \approx (^2/_{15})\,\rho^2, \tag{13}$$

а при больших ρ

$$\beta_{dd}(\rho) \approx C\rho^{2/3}, \qquad \beta_{nn}(\rho) \approx (^4/_3)\,C\rho^{2/3}. \tag{14}$$

При изотропной турбулентности в смысле Тейлора закономерности локально изотропной турбулентности должны иметь место для расстояний, значительно меньших чем *интегральный масштаб* турбулентности L (см. по поводу его рационального определения мою заметку [3]). При этом коэффициенты корреляции

$$R_{dd}(r) = \overline{(u_d(M')\,u_d(M))}:\,b, \qquad R_{nn}(r) = \overline{(u_n(M')\,u_n(M))}:\,b, \tag{15}$$

где b есть среднее значение квадрата компонент скорости, связаны с $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$ соотношениями

$$B_{dd} = 2b\,(1 - R_{dd}), \qquad B_{nn} = 2b\,(1 - R_{nn}). \tag{16}$$

В силу (16) и (12) при r, малых по сравнению с L, должно быть

$$1 - R_{dd} \approx \frac{\sqrt{\nu\bar{\varepsilon}}}{2b}\,\beta_{dd}\left(\frac{r}{\lambda}\right), \qquad 1 - R_{nn} \approx \frac{\sqrt{\nu\bar{\varepsilon}}}{2b}\,\beta_{nn}\left(\frac{r}{\lambda}\right). \tag{17}$$

Если r мало по сравнению с L, но велико по сравнению с λ, то в силу (14) и (11)

$$1 - R_{dd} \approx (^1/_2)\,C\bar{\varepsilon}^{2/3}b^{-1}r^{2/3}, \tag{18^1}$$

$$1 - R_{nn} \approx (^2/_3)\,C\bar{\varepsilon}^{2/3}b^{-1}r^{2/3}. \tag{18^2}$$

Формулы (18) позволяют определить константу C из экспериментальных данных. Наиболее тщательные измерения коэффициентов корреляции R_{dd} и R_{nn} были произведены Драйденом, Шубауэром, Моком и Скрэмстадом [4]. Представив формулу (18^2) в виде

$$1 - R_{nn} \approx 2C\,(kr)^{2/3}, \qquad k = \bar{\varepsilon} : (3b)^{3/2}, \tag{19}$$

я вычислил из эмпирической формулы (17) работы [4], полагая в обозначениях из [4] $b = \sqrt{\overline{u^2}}$, $\bar{\varepsilon} = (^3/_2)\,Ud\sqrt{\overline{u^2}}/dx$, значения коэффициента k, соответствующие турбулентности на расстоянии $40M$

M, дюйм	1	3,25	5
k, см$^{-1}$	0,197	0,065	0,042

от решетки с размером ячейки M, равным 1″, 3,25″ и 5″. С этими значениями для k кривые рис. 5 из [4], учитывающие поправку на длину проволок, хорошо укладываются для не слишком больших по сравнению с L значений r в формулу (19) при

$$C = {}^{3}/_{2}. \tag{20}$$

Локальный масштаб λ в условиях опытов, описанных в [4], настолько мал, что отклонения от соотношений (18) при малых r не могут быть обнаружены [2].

Кривые рис. 28 из [4] не могут быть непосредственно использованы для определения C, так как в них не внесена поправка на длину проволок. Однако они с удовлетворительной точностью подтверждают при r, малых по сравнению с L, вытекающее из (18) соотношение

$$(1 - R_{nn})/(1 - R_{dd}) = {}^{4}/_{3}. \tag{21}$$

С учетом поправки на длину проволок для отношения (21) в [4] получено значение 1,28 (см. [4, с. 29]), также достаточно близкое, если учесть ограниченную точность опыта, к теоретическому значению ${}^{4}/_{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
2. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 22—24.
3. *Колмогоров А. Н.* К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.
4. *Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Scramstad H. K.* Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres.— Nat. Adv. Com. Aeronaut., 1937, Rep. N 581.
5. *Миллионщиков М. Д.* Затухание пульсаций скорости в аэродинамических трубах.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 241—242.
6. *Миллионщиков М. Д.* О влиянии третьих моментов в изотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9, с. 615—617.

[2] Заметим в связи с этим, что попытку применения к наблюдениям из [4] теории изотропной турбулентности, пренебрегающей третьими моментами, предпринятую Миллионщиковым в [5], следует признать основанной на недоразумении. Легко обнаружить, что в обстановке наблюдений из [4] в уравнениях, связывающих вторые моменты с третьими (например, в уравнении (3)), члены со вторыми моментами *несравненно меньше*, чем члены с третьими моментами.

На рис. 3 из [5] сравнение с теоретической кривой для R_{nn} (полученной в пренебрежении третьими моментами) с опытными данными из [4] произведено ошибочно, так как: 1) использованные данные относятся к определенной спектральной компоненте пульсаций, а не к полным пульсациям; 2) опытные данные не соответствуют условию $8\nu t = 7{,}56$, которым определяется теоретическая кривая.

В более поздних работах [6] и еще неопубликованных (см.: Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1941, т. 5, № 4/5, с. 433—446.— *Примеч. ред. к наст. изд.*) сам Миллионщиков при помощи тонких рассмотрений, использующих третьи и четвертые моменты, дал оценку ошибки, происходящей от пренебрежения третьими моментами.