

Число возможных способов, которыми может быть достигнуто определенное значение ξ , очевидно, равно

$$Z = \frac{N!}{N_1!N_2!}, \quad (21)$$

откуда

$$\Phi = NkT \left\{ \frac{1+\sqrt{\xi}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{2} + \frac{1-\sqrt{\xi}}{2} \ln \frac{1-\sqrt{\xi}}{2} \right\}. \quad (22)$$

Разложение по степеням ξ дает

$$\Phi = NkT \left\{ \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{12}\xi^2 + \frac{1}{30}\xi^3 \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, при высоких температурах α в (1) равно $NkT/2$, а $\gamma = NkT/10$. Для качественной оценки можно подставить вместо a величину $d\alpha/dT$ при высоких температурах, а для γ его значение из (23) при $T = T_{кр}$. Это дает

$$a = \frac{1}{2}Nk, \quad \gamma = \frac{1}{10}NkT_{кр},$$

$$A = \frac{1}{4}Nk\sqrt{5T_{кр}}$$

или в расчете на один моль

$$A = \frac{1}{4}R\sqrt{5T_{кр}}.$$

Эта величина, равно как и закон $1/\sqrt{T}$, находится в очень хорошем согласии с измерениями Рузмана на NH_4Cl .

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

17 К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

Phys. Zs. Sowjet., 8, 153, 1935

Исследовано распределение магнитных моментов в ферромагнитном кристалле. Найдено, что такой кристалл состоит из элементарных слоев, намагниченных до насыщения. Во внешнем магнитном поле границы между слоями передвигаются; определена скорость этого передвижения. Найдена магнитная проницаемость в периодическом поле, параллельном или перпендикулярном оси легкого намагничивания.

§1. Как было указано Блохом [1] и Гейзенбергом [2], ферромагнитный кристалл в магнитном смысле состоит из элементарных областей, намагниченных почти до насыщения. Они предположили, что эти области имеют нитевидную форму; мы покажем здесь, что их скорее следует считать элементарными слоями. Последнее, по-видимому, можно согласовать с экспериментальными данными, полученными рядом авторов [3] путем фотографирования распределения коллоидных частиц Fe_2O_3 на поверхности ферромагнитного кристалла. В ненамагниченном кристалле эти элементарные слои намагничены поочередно в противоположных направлениях, так что кристалл в целом не имеет магнитного момента. При намагничивании кристалла границы между противоположно намагниченными слоями сдвигаются таким образом, что слои с одним направлением магнитного момента растут за счет слоев с моментом в противоположном направлении.

Некоторые авторы (среди них также Ф. Блох [1]) пытались определить число и размеры элементарных областей в ферромагнитном теле из статистических соображений. Однако это абсолютно невозможно, поскольку если бы не существовало размагничивающего влияния поверхности тела, как, например, в бесконечном теле, то не существовало бы вообще никаких элементарных областей и тело было бы намагничено до насыщения.

Здесь имеется полная аналогия с невозможностью определения при помощи статистических методов числа капелек жидкости в конденсирующемся паре, так как в действительности жидкость образуется сразу как непрерывное тело. Существование отдельных элементарных областей, намагниченных в противоположных направлениях,

ях, обязано исключительно размагничивающему эффекту поверхности, а число и размеры этих областей полностью определяются размерами тела.

Между двумя такими элементарными слоями с противоположно направленными магнитными моментами не существует резкой границы. Напротив, имеется некоторая промежуточная область, в которой направление магнитного момента постепенно меняется на противоположное. Мы определим здесь распределение моментов в такой промежуточной области, а также ширину элементарных слоев.

Ниже будет обсуждаться случай ферромагнитного кристалла с одной выделенной осью, совпадающей с осью легчайшего намагничивания, как, например, монокристалл кобальта с его гексагональной осью. К этому типу относится также любое ферромагнитное тело, деформированное в одном направлении (например, растянутая или сжатая проволока), если знак деформации совпадает со знаком магнитострикции. В дальнейшем мы всегда будем говорить о ферромагнитном кристалле, однако следует помнить, что при этом имеется в виду не обязательно монокристалл, но любое тело с единственным направлением легчайшего намагничивания.

Такой кристалл состоит из слоев, параллельных выделенной оси и намагниченных до насыщения в направлениях по или против нее. Тот факт, что элементарные области в кристалле не имеют нитевидной формы, а в действительности являются слоями, мы докажем позже.

Мы будем искать распределение магнитных моментов внутри кристалла по направлениям следующим образом. Магнитная энергия кристалла состоит из двух частей:

1) энергии, обязанной неоднородности в распределении магнитных моментов по направлениям. Эту энергию, отнесенную к единице объема, можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\alpha[(\nabla s_x)^2 + (\nabla s_y)^2 + (\nabla s_z)^2],$$

где s_x, s_y, s_z представляют собой компоненты магнитного момента единицы объема s (его абсолютная величина остается постоянной вдоль всего кристалла и практически равна моменту насыщения);

2) энергии магнитной анизотропии, связанной с наличием оси легчайшего намагничивания. Если выбрать систему координат с осью Z вдоль этой оси, энергия анизотропии, отнесенная к единице объема, может быть записана в виде

$$\frac{1}{2}\beta(s_x^2 + s_y^2),$$

учитывая, что минимум энергии получается, когда s направлено вдоль легчайшей оси.

Распределение s по направлениям можно тогда найти, потребовав, чтобы энергия кристалла была минимальна, т. е.

$$\int \left\{ \frac{1}{2}\alpha[(\nabla s_x)^2 + (\nabla s_y)^2 + (\nabla s_z)^2] + \frac{1}{2}\beta(s_x^2 + s_y^2) \right\} dV = \min, \quad (1)$$

где интеграл берется по всему объему кристалла.

При нахождении распределения моментов между двумя противоположно намагниченными слоями можно пренебречь эффектами, связанными с поверхностью кристалла. Эти эффекты являются определяющими для нахождения толщины слоев, но ими можно пренебречь, если интересоваться только распределением магнитных моментов в промежуточной области между двумя слоями внутри кристалла. Это означает, что если мы направим ось нашей координатной системы перпендикулярно слоям, то распределение магнитных моментов не будет зависеть от координат y и z . Направление s меняется только с изменением x , переходя в промежуточной области от некоторого определенного направления вдоль оси Z в одном слое к противоположному направлению в соседнем. Уравнение (1) теперь можно записать как

$$\int \left[\frac{1}{2}\alpha s'^2 + \frac{1}{2}\beta(s_x^2 + s_y^2) \right] dV = \min, \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Теория выглядит так, как если бы мы считали кристалл бесконечным. Однако необходимо помнить, что в действительности в бесконечном кристалле все моменты имели бы одно и то же направление; кристалл оказался бы спонтанно намагниченным и, таким образом, слои бы отсутствовали. Существование слоев обязано конечности размеров кристалла; мы считаем кристалл бесконечным, только чтобы найти распределение моментов в промежуточных областях, далеких от поверхности кристалла; поверхностные эффекты будут обсуждаться в § 2.

В такой модели все магнитные моменты лежат в плоскости YZ . Обозначим через θ угол между s и осью Z . Тогда компоненты s будут равны

$$s_x = 0, \quad s_y = s \sin \theta, \quad s_z = s \cos \theta \quad (3)$$

и (1) приобретет вид (θ — функция только от x)¹⁾

$$\int \left(\frac{1}{2}\alpha s^2 \theta'^2 + \frac{1}{2}\beta s^2 \sin^2 \theta \right) dx = \min. \quad (4)$$

Для нахождения θ , дающего этому интегралу минимальное значение, напомним уравнение Эйлера

$$\alpha \theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (5)$$

¹⁾ До некоторой степени похожие вычисления, хотя и с другой точки зрения, были произведены Блюхом [1].

откуда

$$\theta'^2 - \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \theta = \text{const.} \quad (6)$$

Толщина слоев велика по сравнению с шириной промежуточной области. Поэтому в качестве граничных условий для уравнения, определяющего θ , можно взять следующие:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ при } x = -\infty, \quad \theta = \pi \text{ при } x = +\infty, \\ \theta' &= 0 \text{ при } x = \pm\infty \text{ или при } \theta = 0, \pi, \end{aligned} \quad (7)$$

которые показывают, что в двух примыкающих слоях направления s противоположны. Тогда видно, что постоянная в (6) равна нулю, и мы получаем

$$\theta'^2 = \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \theta. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, находим решение, удовлетворяющее (7), в виде

$$\cos \theta = -\text{th} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x. \quad (9)$$

Оно дает распределение направлений s между двумя слоями.

Приблизительное численное значение постоянной α можно получить следующим образом. Энергия $\frac{1}{2} \alpha s'^2$ имеет максимально возможное значение, когда s меняет свое направление каждый раз при смещении на расстояние, равное постоянной решетки кристалла a , т.е. когда $s'^2 \approx s^2/a^2$. Этот максимум должен иметь порядок величины kT_C , где T_C — температура Кюри (k — постоянная Больцмана). Таким образом, мы находим, что приближенно

$$\alpha = \frac{kT_C}{as^2}. \quad (10)$$

Согласно (9) «ширину» промежуточной области можно определить как $\sqrt{\alpha/\beta}$. Учитывая (10), получаем

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{kT_C}{a\beta s^2}}.$$

Для Ni температура Кюри $T_C = 630^\circ \text{ К}$, момент насыщения единицы объема $s = 480$ (при 18° С) и постоянная решетки $a = 3,5 \cdot 10^{-8}$ см. Константу в энергии анизотропии β мы возьмем из экспериментов Беккера и Керстена [4]. Они измеряли магнитную восприимчивость натянутой никелевой проволоки и нашли, что минимальная величина, достигаемая при больших напряжениях, равна 0,6. Это соответствует постоянной $\beta = 1/0,6 = 1,7$. Используя это значение, находим для «ширины» промежуточной области величину $2,5 \cdot 10^{-6}$, т.е. приблизительно 70 постоянных решетки.

§ 2. Анализ, приведенный в предыдущем параграфе, дает только распределение направлений магнитных моментов в промежуточных

областях, но не позволяет определить толщину слоев. Чтобы найти эту последнюю, необходимо обсудить свойства поверхности кристалла. Для этой цели воспользуемся здесь следующим методом. Сначала мы вычислим распределение магнитных моментов вблизи поверхности кристалла при заданном значении толщины слоя d , после чего определим эту толщину, исходя из требования минимальности энергии кристалла как целого.

Вблизи поверхности имеется магнитное поле; пусть \mathbf{H} будет его макроскопической напряженностью. Внутри кристалла поле \mathbf{H} и магнитный момент должны удовлетворять уравнению

$$\text{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{s}) = 0;$$

снаружи

$$\text{div} \mathbf{H} = 0.$$

Промежуточные области между слоями, а следовательно, и энергия $\frac{1}{2} \alpha s'^2$ для нахождения распределения s вблизи поверхности несущественны. Если бы энергия магнитной анизотропии равнялась нулю, т.е. $\beta = 0$, то равновесие, т.е. распределение, дающее минимум магнитной энергии, отвечало бы полю \mathbf{H} , равному нулю. Тогда для s внутри кристалла можно было бы написать

$$\text{div} s = 0 \quad (11)$$

с граничным условием на поверхности

$$s_n = 0, \quad (12)$$

где s_n — компонента, перпендикулярная поверхности. Можно ожидать, что при малом β эти уравнения заметно не изменятся; поэтому мы воспользуемся (11) и (12) в качестве уравнений, определяющих распределение s вблизи поверхности.

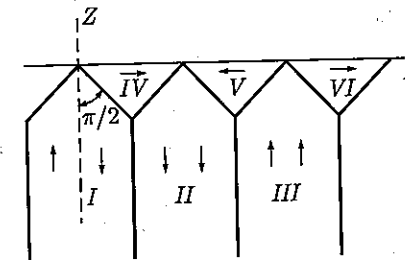


Рис. 1.

Пусть кристалл (того же типа симметрии, что и в § 1) имеет форму параллелепипеда. Рассмотрим прежде всего случаи, когда его поверхность перпендикулярна оси легчайшего намагничивания. Введем, как и в § 1, систему координат с осью Z , параллельной выделенной

оси, и плоскостью YZ , параллельной магнитным слоям в кристалле. Распределение s однородно в направлении оси Y , оно меняется с x и в направлении к поверхности — с z . Промежуточные области между слоями, как уже отмечалось, не влияют на распределение s вблизи поверхности. Поэтому можно считать, что s повсюду лежит в плоскости ZX . Обозначим через φ угол между s и Z . Тогда

$$s_x = s \sin \varphi, \quad s_y = 0, \quad s_z = s \cos \varphi. \quad (13)$$

На больших расстояниях от поверхности имеются регулярные слои, скажем, толщины d и s противоположно направленными s , т.е. φ равно попеременно нулю или π , переходя от одного из этих значений к другому периодически вдоль оси X с периодом d . Тогда распределение s дается уравнением (11) с краевым условием $\varphi = \pm\pi/2$ при $z = 0$ (плоскость XY совпадает с поверхностью кристалла); краевым условием при $z = -\infty$ является то, что φ как функция x должна изменяться от 0 к π через каждый интервал d .

Решение (11), удовлетворяющее этим условиям, можно построить, как показано на рис. 1. Этот рисунок дает распределение магнитных моментов в кристалле в плоскости XZ или любой другой параллельной ей плоскости (стрелки указывают направления s). В областях I и III моменты лежат вдоль оси Z ($\varphi = 0$), в области II — вдоль той же оси, но в противоположном направлении ($\varphi = \pi$); в областях IV, V, VI моменты параллельны поверхности, т.е. $\varphi = \pm\pi/2$. Такое решение очевидным образом удовлетворяет краевым условиям. Оно удовлетворяет также и уравнению (11), поскольку в каждой из областей I, II и т.д. s постоянно, а на границах между этими областями поверхностная дивергенция s равна нулю, так как нормальные границам компоненты s во всех случаях равны по обе стороны от этих границ.

Разумеется, можно было бы построить еще и другие решения (11), например введя где-либо внутри кристалла такое же распределение, что и на рис. 1 вблизи поверхности. Однако наше решение является единственным, которое при фиксированном d дает наименьшее значение для энергии кристалла, и в силу этого только оно допустимо из физических соображений.

Теперь мы можем вычислить энергию кристалла. Энергия, связанная с распределением магнитных моментов около поверхности кристалла, равна (на единицу объема) энергии анизотропии $\beta s_x^2/2$ (при $s_y = 0$). В областях, таких, как IV, V, VI на рис. 1, s_x равно $\pm s$, т.е. энергия единицы объема имеет вид $\beta s^2/2$. Пусть l_1, l_2, l представляют собой размеры кристалла в направлениях соответственно X, Y, Z . Тогда объем любой области типа IV, V, VI на рис. 1 равен $d^2 l_2/4$. Всего имеется l_1/d таких областей на каждой из противоположных поверхностей кристалла, и поэтому энергия, связанная с поверхностью кристалла, равна

$$E_s = \frac{1}{4} \beta d l_1 l_2 s^2. \quad (14)$$

Во внутренних частях кристалла энергия возникает из-за наличия промежуточных областей между слоями. Ее можно вычислить с помощью результатов, полученных в § 1. Для этого рассмотрим одну из таких областей. Ее энергия согласно § 1 равна

$$\frac{1}{2} l l_2 s^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta) dx = l l_2 s^2 \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\text{ch}^2 \sqrt{\beta/\alpha} x} = 2 s^2 l l_2 \sqrt{\alpha \beta}.$$

В кристалле имеется l_1/d таких областей, так что полная внутренняя энергия кристалла имеет вид

$$E_i = 2 s^2 \frac{l l_1 l_2}{d} \sqrt{\alpha \beta}. \quad (15)$$

Толщину слоев d мы найдем теперь из условия, чтобы полная энергия имела минимум. Отсюда

$$d = 2\sqrt{2} l \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/4}, \quad (16)$$

а соответствующая энергия равна

$$E = s^2 l_1 l_2 \sqrt{2 l \beta} (\alpha \beta)^{1/4}. \quad (17)$$

Если поверхность кристалла не ортогональна оси легчайшего намагничивания, то решение (11) с s , параллельным поверхности на границе кристалла, удовлетворяющее тем же самым условиям на больших расстояниях от нее, может быть построено точно таким же способом. При этом распределение s в плоскости, параллельной XY , получается таким, как показано на рис. 2.

Пусть угол между осью Z и линией пересечения поверхности кристалла с плоскостью XZ равен ϑ_1 , а такой же угол на противоположной границе равен ϑ_2 . Угол наклона поверхности к плоскости XZ для определения толщины слоев несуществен. Таким же способом, каким было получено (16), теперь найдем

$$d = 2\sqrt{l \left(\frac{1}{\sin \vartheta_1} + \frac{1}{\sin \vartheta_2}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/4}}. \quad (18)$$

Толщина кристалла l и углы ϑ_1, ϑ_2 могут, вообще говоря, меняться вдоль кристалла; с ними вместе будет меняться также и толщина слоев.

Теперь легко показать, что кристалл действительно состоит из магнитных слоев, а не нитевидных областей. Если кристалл разбивается на элементарные области спонтанного намагничивания, имеющие вид прямых призм с основанием d^2 , распределение магнитных моментов около поверхности, удовлетворяющее (11) и (12), может быть описано рис. 3, на котором показаны две элементарные области в разрезе и в плане. Энергия E_i теперь превосходит (15) вдвое, так как площадь поверхности границ между элементарными областями стала вдвое

больше, чем раньше. Поверхностная энергия, как легко вычислить, теперь равна

$$E_s = \frac{1}{6} \beta s^2 l_1 l_2 d.$$

Определив d из условия, чтобы энергия $E_i + E_s$ была минимальной, мы найдем, что эта минимальная энергия равна

$$\sqrt{\frac{8}{3}} s^2 l_1 l_2 \sqrt{l \beta (\alpha \beta)^{1/4}},$$

т. е. в $\sqrt{4/3}$ раз больше, чем (17). Мы убеждаемся, таким образом, что эта модель энергетически менее выгодна по сравнению с моделью слоев.

Для деформированного никеля с теми же характеристиками, что и в § 1, формула (16) дает числовое значение толщины слоев $d \approx 5 \times 10^{-3}$, или приблизительно 10^5 постоянных решетки (при $l = 1$ см).

§ 3. Если кристалл помещен во внешнее магнитное поле, направленное параллельно оси легчайшего намагничивания, границы между слоями придут в движение, так что слои с магнитным моментом, параллельным полю, начнут расширяться. Здесь мы определим скорость этого движения.

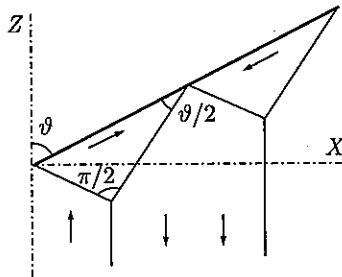


Рис. 2.

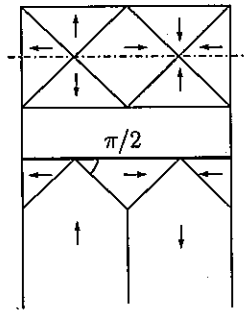


Рис. 3.

Как и в § 1, будем рассматривать только одну промежуточную область между двумя слоями и, кроме того, пренебрежем поверхностными эффектами. Распределение s дается (3) и (9) и остается неизменным, покуда поле отсутствует. При включении поля оно придет в движение вдоль оси X со скоростью v .

Если бы магнитные моменты в кристалле были свободными, т. е. не испытывали влияния других моментов, изменение s со временем определялось бы внешним полем. Влияние взаимодействия между магнитными моментами можно описать, введя некоторое «эффективное поле» следующим способом.

Если внутри кристалла имеется макроскопическое поле с напряженностью \mathbf{H} , энергию кристалла можно записать в виде

$$\int \left(\frac{1}{2} \alpha s'^2 - \frac{1}{2} \beta s_z^2 - \mathbf{H} s \right) dV \quad (19)$$

(здесь удобнее писать энергию анизотропии вместо $\frac{1}{2} \beta (s_x^2 + s_y^2)$ в виде $-\frac{1}{2} \beta s_z^2$; оба эти выражения очевидным образом эквивалентны). Мы не писали члена $\mathbf{H} s$ в формулах § 1, поскольку напряженность макроскопического поля внутри кристалла была равна нулю, когда внешнее поле отсутствовало и все моменты располагались в плоскости ZY .

В равновесии эта энергия должна иметь минимум, а значит, вариация (19) по s равняется нулю. Это дает

$$\int (\alpha s'' + \beta s_z n + \mathbf{H}) \delta s dV = 0$$

(n — единичный вектор в направлении оси Z). Но δs всегда перпендикулярно s (так как абсолютная величина s постоянна); отсюда видно, что

$$\mathbf{f} = \alpha s'' + \beta s_z n + \mathbf{H} \quad (20)$$

должно быть параллельно s . Таким образом, величина \mathbf{f} играет теперь роль «эффективного поля».

Существуют два типа взаимодействия между магнитными моментами в кристалле: обменное и релятивистское. Последнее, как правило, гораздо слабее первого. Обменное взаимодействие не может менять магнитного момента. Поэтому в присутствии поля магнитный момент вел бы себя подобно свободному моменту, т. е. вращался бы вокруг \mathbf{f} , и мы имели бы для \dot{s} (точка означает дифференцирование по времени) уравнение

$$\frac{\dot{s}}{\mu_0} = [\mathbf{f} s]$$

с $\mu_0 = e/mc$ (а не $e/2mc$, поскольку моменты s в ферромагнитном теле являются спиновыми моментами). Приближение s к \mathbf{f} связано исключительно с релятивистскими взаимодействиями. Так как эти взаимодействия слабее обменного, мы можем считать, что коэффициент перед членом $[\mathbf{f} s]$ не меняется и можно просто добавить некоторый член, обуславливающий приближение s к \mathbf{f} . Таким образом, мы приходим к уравнению вида

$$\frac{\dot{s}}{\mu_0} = [\mathbf{f} s] + \lambda \left(\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{f} s) s}{s^2} \right). \quad (21)$$

Второй член в этом уравнении представляет собой вектор, направленный от s к \mathbf{f} . Константа λ удовлетворяет неравенству $\lambda \ll s$ в соответствии с тем фактом, что релятивистское взаимодействие мало. Здесь мы вообще пренебрегли изменением абсолютной величины s .

Для применения этого уравнения к исследованию движения границы между слоями надо предварительно найти макроскопическое поле \mathbf{H} внутри кристалла. Поскольку все распределение s не зависит от координат y и z , уравнения, определяющие поле, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{s}) = 0,$$

переходят в

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(H_x + 4\pi s_x)}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

Если имеется внешнее магнитное поле h , приложенное по оси Z (h , конечно, может зависеть от времени), то, вспомнив, что внутри кристалла далеко от промежуточной области, т. е. там, где $s_x = 0$, поле \mathbf{H} должно равняться внешнему полю h , мы можем положить

$$H_x = -4\pi s_x, \quad H_y = 0, \quad H_z = h. \quad (23)$$

Если бы s_x всюду равнялось нулю, а внешнее поле отсутствовало, то \mathbf{H} также равнялось бы нулю, как в § 1.

Предположим, что поле h мало (по сравнению с $s\beta$). Когда поле отсутствует, s определяется формулами (3) и (9). В присутствии поля s_x более не равно нулю; однако если h мало, то мало также и s_x , будучи пропорционально h . Подставляя теперь (20) и (23) в (21) и пренебрегая всюду членами второго порядка по s_x и h , мы получим уравнения для компонент s :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu_0} &= \alpha(s_z s_z'' - s_y s_y'') - \beta s_y s_z - s_y h + \lambda(\alpha s_x'' - 4\pi s_x) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha(s_y s_y'' + s_z s_z'') s_x + \beta s_x s_z^2], \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu_0} &= \alpha(s_x s_z'' - s_z s_x'') + (4\pi + \beta) s_x s_z + \lambda \alpha s_y'' - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha(s_y s_y'' + s_z s_z'') s_y + \beta s_y s_z^2 + h s_y s_z], \\ \frac{\dot{s}_z}{\mu_0} &= \alpha(s_x'' s_y - s_x s_y'') - 4\pi s_x s_y + \lambda(\alpha s_z'' + \beta s_z + h) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha(s_y s_y'' + s_z s_z'') s_z + \beta s_z^3 + h s_z^2]. \quad (24) \end{aligned}$$

В отсутствие поля $\dot{s}_x = \dot{s}_y = \dot{s}_z = 0$, $h = 0$, $s_z = 0$, так что если подставить (3) в (24), то получится в точности уравнение (5). s_x , s_y , s_z являются функциями x и времени t . Предположим, что обе переменные входят только в комбинации $x - vt$, где v представляет собой скорость перемещения всего распределения вдоль оси X . Тогда $\dot{s}_x = -vs_x'$, и то же самое для \dot{s}_y , \dot{s}_z , если теперь штрихом обозначить дифференцирование по $x - vt$. Для решения (24) положим

$$s_x = s_x, \quad s_y = s \sin(\theta + \psi), \quad s_z = s \cos(\theta + \psi), \quad (25)$$

где θ определяется формулой (9) (и удовлетворяет (5) или (6)), где теперь вместо x должно стоять $x - vt$. ψ мало по сравнению с θ ; s_x и $s\psi$ оба пропорциональны h (и равны нулю, когда $h = 0$), так что можно пренебречь членами второго порядка по s_x и ψ . Мы предположим, как это подтверждается результатом, что скорость v тоже пропорциональна h ; в силу этого также пренебрежем такими членами, как vs_x или $vs\psi$.

Уравнения (24) теперь примут вид

$$\begin{aligned} s(\alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta) + \lambda[\alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos 2\theta)s_x] &= 0, \\ \lambda(\alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta) - s[\alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos 2\theta)s_x] &= \frac{sv\theta'}{\mu_0}, \end{aligned}$$

Третье уравнение совпадает со вторым. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta &= \\ = -\frac{sv\lambda\theta'}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} &= -\frac{v\lambda s}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta, \\ \alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos 2\theta)s_x &= \\ = -\frac{v\theta' s^2}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} &= -\frac{vs^2}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta, \end{aligned} \quad (26)$$

поскольку согласно (9)

$$\theta' = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta.$$

Введя θ в качестве независимой переменной вместо $x - vt$, получим из (26)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \psi &= \\ \frac{1}{s\beta \sin \theta} \left(h - \frac{v\lambda s}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right), & \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{ds_x}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{1 + 4\pi/\beta}{\sin^2 \theta} \right) s_x &= \frac{vs^2}{\mu_0\beta(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (27)$$

Оба эти уравнения относятся к типу

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) y = f(\theta).$$

Такое уравнение имеет решение только в двух случаях: 1) либо $m = 1, 2, \dots$ и $f(\theta)$ равно нулю (тогда решением являются $P_1^m(\cos \theta)$) или ортогонально решению однородного уравнения; 2) либо m не является целым числом и $f(\theta)$ отлично от нуля. Следовательно, мы видим, что

уравнения (27) могут иметь решения только, если правая часть первого из них обращается в нуль, т. е. если

$$v = \frac{\mu_0(s^2 + \lambda^2)}{\lambda s} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h. \quad (28)$$

Но $\lambda \ll s$, поэтому можно написать

$$v = \frac{\mu_0 s}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h. \quad (29)$$

Этой формулой определяется скорость движения границ между слоями во внешнем поле, направленном вдоль оси легчайшего намагничения.

Если внешнее поле h является периодическим:

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad (30)$$

намагничение кристалла в среднем равно нулю. Магнитная восприимчивость в этом случае определяется как отношение намагничения как функции времени к $h(t)$. За время t граница между двумя слоями проходит расстояние (мы подставили (30) в (29) и проинтегрировали)

$$\frac{\mu_0 s}{i\lambda\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h.$$

В кристалле имеется l_1/d слоев (обозначения те же, что в § 2). Поэтому полное намагничение кристалла равно

$$\frac{\mu_0 s^2}{i\omega\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{l_1 l_2}{d} h.$$

Отсюда магнитная восприимчивость χ_l единицы объема в продольном поле равна

$$\chi_l = \frac{\mu_0 s^2}{i\omega\lambda d} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (31)$$

Магнитная проницаемость имеет вид

$$\mu_l = 1 - \frac{4\pi i\mu_0 s^2}{\omega\lambda d} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (32)$$

Для d можно воспользоваться выражениями (16) или (18). Тем самым появляется возможность проверить зависимость d от размеров кристалла, измерив экспериментально зависимость μ_l от упомянутых размеров.

Таким образом, χ_l или μ_l как функции ω не имеют собственных частот, а только затухание. Они при $\omega = 0$ обращаются в бесконечность в соответствии с тем, что мы не принимали во внимание гистерезисных эффектов. При больших ω определяющим может стать изменение абсолютной величины s (которым мы здесь пренебрегли), и выведенная формула для μ_l может оказаться непригодной.

§ 4. Определим теперь магнитную проницаемость в поперечном поле, т. е. в поле h , направленном вдоль оси X . В этом случае влияние промежуточных областей несущественно, и мы можем считать, что в отсутствие поля все моменты расположены параллельно или антипараллельно (в различных слоях) оси Z , т. е. $s_z = \pm s$, $s_x = s_y = 0$. По той же причине оказывается несущественным член $\alpha s''$ в (20), так что для эффективного поля следует положить

$$f = H + \beta s_z n. \quad (33)$$

Компоненты H теперь равны

$$H_x = h, \quad H_y = H_z = 0, \quad (34)$$

и уравнение (21) дает для компонент \dot{s}

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu_0} &= -\beta s_y s_z + \lambda h - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_x, \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu_0} &= \beta s_x s_z - h s_z - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_y, \\ \frac{\dot{s}_z}{\mu_0} &= h s_y + \lambda \beta s_z - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_z; \end{aligned} \quad (35)$$

s_y и s_x пропорциональны h , и если предположить, как в § 3, что h мало, то можно пренебречь членами второго порядка по s_x , s_y , h . Вместо s_z можно подставить также $\pm s$, после чего из (35) получается

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu} &= \mp \beta s_y + \lambda h - \lambda \beta s_x, \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu} &= \pm \beta s_x \mp h s - \lambda \beta s_y. \end{aligned} \quad (36)$$

Третье уравнение превращается в тождество.

Если h является периодическим полем (30), уравнения (36) решаются подстановкой

$$s_x = s_{0x} e^{i\omega t}, \quad s_y = s_{0y} e^{i\omega t}.$$

При этом получаем

$$s_x = \frac{\mu_0^2 \beta (s^2 + \lambda^2) + i\omega \lambda \mu_0}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2} h, \quad (37)$$

$$s_y = \pm \frac{\mu_0^2 \beta s \lambda - \mu_0 s (i\omega + \mu_0 \beta \lambda)}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2} h; \quad (38)$$

s_y в различных слоях направлено в противоположные стороны и поэтому ничего не дает для намагниченности кристалла как целого. Из (37) мы получаем магнитную восприимчивость (единицы объема) при намагничении в направлении оси X в поперечном поле

$$\chi_t = \frac{\mu_0^2 \beta (s^2 + \lambda^2) + i\omega \lambda \mu_0}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2}.$$

Но $\lambda \ll s$, и мы можем написать

$$\chi_t = \frac{\mu_0^2 \beta s^2 + i\omega \lambda \mu_0}{\beta^2 s^2 \mu_0^2 - \omega^2 + 2i\omega \beta \lambda \mu_0} \quad (39)$$

Магнитная проницаемость равна

$$\mu_t = 1 + 4\pi \frac{\mu_0^2 \beta s^2 + i\omega \lambda \mu_0}{\beta^2 s^2 \mu_0^2 - \omega^2 + 2i\omega \beta \lambda \mu_0} \quad (40)$$

Таким образом, χ_t или μ_t как функции ω имеют собственную частоту

$$\omega_0 = \mu_0 \beta s \quad (41)$$

и затухание с декрементом

$$\gamma = \mu_0 \beta \lambda. \quad (42)$$

Поскольку $\lambda \ll s$, очевидно, что $\gamma \ll \omega_0$. Для тех же числовых величин, что и § 1, находим собственную частоту деформированного никеля равной $1,5 \cdot 10^{10}$ сек⁻¹, что соответствует длине волны в 12,6 см.

В формуле (40), которая записывается также в виде

$$\mu_t = 1 + 4\pi \frac{\omega_0^2 + i\omega \gamma}{\beta(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega \gamma)}, \quad (43)$$

можно выделить несколько частных случаев в зависимости от величины частоты:

$$\text{а) } \omega \ll \frac{\omega_0^2}{\gamma}$$

$$\mu_t = 1 + \frac{4\pi \omega_0^2}{\beta(\omega_0^2 - \omega^2)}; \quad (44)$$

$$\text{б) } \omega - \omega_0 \sim \gamma$$

$$\mu_t = 1 + \frac{2\pi \omega_0}{\beta(\omega_0 - \omega + i\gamma)}; \quad (45)$$

$$\text{в) } \omega \gg \omega_0$$

$$\mu_t = 1 - 4\pi \frac{\omega_0^2 + i\omega \gamma}{\beta \omega^2}. \quad (46)$$

Украинский физико-технический институт,
Харьков

Литература

1. F. Bloch. Zs. Phys., **74**, 295, 1932.
2. W. Heisenberg. Zs. Phys., **69**, 287, 1931.
3. Mc Keehan, Elmore. Phys. Rev., **46**, 226, 1934; N. Miller, D. Steinberg. Technical Phys., USSR, **1**, 205, 1934.
4. R. Becker, M. Kersten. Zs. Phys., **64**, 660, 1930.

18 О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОПРАВКАХ К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

Phys. Zs. Sowjet., **8**, 487, 1935.

Первый вывод члена, описывающего взаимодействие, с точностью до величин порядка v^2/c^2 , был произведен Брейтом [1]. Затем Бете и Ферми [2] вывели ту же формулу более строго с помощью квантовой электродинамики. Однако формула Брейта, как уже подчеркнул сам Брейт, содержит член, пропорциональный e^4/r^2 , в котором отсутствует \hbar , в силу чего она в классическом пределе находится в противоречии с классической электродинамикой. Кроме того, наличие такого члена противоречит эксперименту. Впрочем, позднее [3] Брейт показал, что этот лишний член можно исключить, применяя определенный способ вывода. Из всего этого приходится, однако, заключить, что применение квантовой электродинамики по меньшей мере нельзя считать бесспорным. Мне хотелось бы указать, что вывод формулы Брейта может быть произведен гораздо более естественным образом, если уже с самого начала записывать все уравнения с точностью до членов порядка v^2/c^2 . При этом уравнение Дирака принимает известный вид:

$$E\psi_1 = \left\{ \frac{p^2}{2m} + e\varphi - \frac{p^4}{8m^3 c^2} - \frac{ie\hbar}{4mc^2} \mathbf{E} \mathbf{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c} [\mathbf{v} \mathbf{E}] \boldsymbol{\mu} - \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{v}}{2} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \right\} \psi_1 \quad (1)$$

($\boldsymbol{\mu}$ — матричный вектор спинового магнитного момента). Теперь φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} можно выразить через ток и плотность второго электрона. Как известно, в выбранном нами приближении

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} + (\mathbf{j} \mathbf{n}) \mathbf{n}}{r} dV \quad (2)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}).

Вместо ρ и \mathbf{j} сюда нужно поставить

$$\rho = e \left\{ |\psi_2|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} |\nabla \psi_2|^2 \right\} + \frac{i\hbar}{2mc} \nabla \psi_2^* [\boldsymbol{\mu} \nabla \psi_2], \\ \mathbf{j} = \frac{e\hbar^2}{2im} (\psi_2^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_2^*) + c \text{rot} (\psi_2^* \boldsymbol{\mu} \psi_2) \quad (3)$$

из дираковских выражений для плотности и тока второго электрона. Брейтовская формула ([1], формула (48)) без лишнего члена получает-