

В случае малых  $a$  наблюдение описанного эффекта по отражению затруднительно. Однако, если длина тепловой волны в металле значительно больше скин-глубины, что соответствует (при  $a \ll 1$ ) малым значениям параметра  $b$ , то возможно своеобразное «затягивание» электромагнитной волны с помощью тепловой волны. Для пленок, толщина которых  $d$  удовлетворяет условиям

$$\delta_{\text{ск}} \ll d \ll \delta_T$$

( $\delta_{\text{ск}} = \sqrt{c^2 \rho_{yy} / 2 \pi \omega}$  — толщина скин-слоя,  $\delta_T = \sqrt{2 \kappa_{zz} / \omega c}$  — глубина проникновения тепловой волны), амплитуда прошедшей волны выражается через амплитуду падающей волны равенством:

$$E_{\text{прош}} / E_{\text{пад}} = - (c^2 \alpha_{yz}^2 T / 2 \pi \kappa_{zz}) \zeta_{0y}. \quad (18)$$

Последняя формула получена в предположении, что тепловой поток равен нулю на обеих сторонах пленки. Членами порядка  $\exp\{-d/\delta_{\text{ск}}\}$  мы пренебрегли.

5. Рассмотрим еще наклонное падение электромагнитной волны на изотропный проводник. У металлов поверхностный импеданс не зависит от угла падения  $\varphi$  и поляризации волны за счет того, что  $4\pi\sigma/\omega \gg 1$ . Поэтому дальнейшее рассмотрение относится к полупроводникам, для которых зависимость от угла падения существенна. Обозначая через  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$  комплексную диэлектрическую постоянную ( $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$ ), получим известное значение для импеданса в том случае, когда электрическое поле  $E$  в падающей волне перпендикулярно плоскости падения

$$\zeta = 1 / \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}.$$

Для того случая, когда  $E$  лежит в плоскости падения, учет термоэлектрических сил, естественно, изменяет значение импеданса:

$$\zeta_{\text{ад}} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \frac{T\sigma\alpha^2}{\kappa} \frac{i\varepsilon'' \sin^2 \varphi}{\varepsilon + T\sigma\alpha^2\varepsilon'/\kappa} \left[ \frac{ic^2C}{\omega\kappa} \frac{1}{1 + T\alpha^2\sigma\varepsilon'/\kappa\varepsilon} - \sin^2 \varphi \right]^{-1/2} \right\}.$$

Это выражение соответствует отсутствию потока тепла на границе. При изотермических условиях на границе тепловая волна не возбуждается и поэтому

$$\zeta_{\text{из}} = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} / \varepsilon.$$

В заключение авторы выражают благодарность Л. Д. Ландау за полезные дискуссии.

Физико-технический институт  
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию  
26 марта 1958 г.

#### Литература

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957, § 25.  
[2] Сб. физических констант, ОНТИ, Л.—М., 1937.

#### INFLUENCE OF THERMOELECTRIC FORCES ON THE SKIN EFFECT IN METALS

M. I. Kaganov, V. M. Tsukernik

The surface impedance of a metal is computed with account of the thermoelectric forces.

#### О КИНЕТИКЕ ДИФФУЗИОННОГО РАСПАДА ПЕРЕСЫЩЕННЫХ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ

И. М. Лифшиц, В. В. Слезов

Изучается кинетика диффузионного процесса образования зерен новой фазы в пересыщенном твердом растворе на поздней стадии этого процесса (коалесценция зерен). Получено и исследовано точное асимптотическое решение этой задачи — найдена асимптотика функции распределения, определена асимптотика числа и средних размеров зерен, проанализирован процесс установления асимптотических законов.

В качестве примера построенной теории рассмотрен механизм спекания.

#### 1. Введение. Постановка задачи

В диффузионном процессе образования зерен новой фазы при распаде пересыщенного твердого раствора следует различать две стадии. На первой происходит флуктуационное образование зародышей новой фазы и их рост непосредственно из пересыщенного раствора. На второй стадии, когда зерна имеют уже достаточно большой размер, а пересыщение становится чрезвычайно малым, определяющую роль играет процесс коалесценции, т. е. «поедания» мелких зерен крупными (рост более крупных зерен за счет растворения мелких). На этой, второй стадии, флуктуационное возникновение новых зародышей, разумеется, уже практически исключено, поскольку они должны иметь макроскопические размеры.

В настоящей работе рассматривается кинетика процесса роста зерен (процесс коалесценции) именно на этой поздней стадии.

Подобная задача рассматривалась ранее различными авторами [1–4], однако правильное ее решение отсутствует. Наиболее обстоятельно этот вопрос изучался Тодесом [1]. В его работе содержится правильное утверждение о том, что асимптотика процесса при больших временах не зависит от начальных условий (от начальной функции распределения зерен по размерам), а также правильно определен порядок убывания числа зерен со временем. Однако полученные им количественные решения содержат лишние физического смысла логарифмические расходимости, что свидетельствует о несостоятельности аргументации автора и ставит под сомнение даже те качественные результаты, которые в действительности оказываются верными.

Крайне своеобразное поведение точного решения задачи и весь его анализ, проводимый ниже, позволяет понять и происхождение ошибочных решений, полученных Тодесом.

При формулировке задачи мы для простоты не будем учитывать анизотропию и будем считать форму зерен сферической. Учет несферичности зерен приводит к изменению некоторых численных констант в последующих уравнениях.

Равновесная концентрация  $C_R$  у поверхности зерен связана с его радиусом  $R$  обычным соотношением

$$C_R = C_\infty + \alpha/R, \quad (1)$$

где  $C_\infty$  — концентрация насыщенного раствора, а  $\alpha$  — связано с межфазовым поверхностным натяжением:  $\alpha = (\sigma/kT)VC_\infty$  ( $V$  — объем атома растворенного вещества).

Считая пересыщение  $\Delta = C - C_\infty$  малым,  $\Delta \ll 1$ , и пренебрегая «взаимодействием» между зернами (что законно в силу малости отношения размеров зерен к среднему расстоянию между ними), мы получаем для диффузионного потока растворенного вещества на единицу площади поверхности зерна выражение<sup>1</sup>

$$j = D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{D}{R} (C - C_R) = \frac{D}{R} \left( \Delta - \frac{\alpha}{R} \right)$$

и, следовательно, для изменения радиуса зерна со временем<sup>2</sup>

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D}{R} \left( \Delta - \frac{\alpha}{R} \right). \quad (2)$$

Таким образом, при каждом пересыщении  $\Delta$  существует критический радиус  $R_k = \alpha \Delta$ , при котором зерно находится в равновесии с раствором, причем при  $R > R_k$  зерно растет, а при  $R < R_k$  — растворяется. Этот очевидный факт и является причиной «поедания» мелких зерен крупными. Само пересыщение  $\Delta$ , а с ним и  $R_k$ , меняется со временем.

В дальнейшем мы будем пользоваться безразмерными величинами  $\rho = R/R_k$ ,  $t' = t/T$ , ( $R_{k0} = \alpha/\Delta_0$ ,  $T = R_{k0}^3/\alpha D$ ,  $\Delta_0$  — начальное пересыщение,  $R_{k0}$  — начальный критический радиус). Опуская штрих при  $t'$ , получим

$$d\rho^3/dt = 3(\rho/x - 1), \quad (3)$$

$x(t)$  — безразмерный критический радиус,  $x(0) = 1$ .

Вводя функцию распределения зерен по размерам  $f(\rho, t)$  и рассматривая  $v_\rho = d\rho/dt$  как скорость перемещения зерна в пространстве размеров, мы можем записать уравнения для определения неизвестных функций  $f(\rho, t)$  и  $x(t)$ . Первое из этих уравнений есть уравнение непрерывности в пространстве размеров

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} (f v_\rho) = 0, \quad (4)$$

а второе — закон сохранения вещества:

$$Q_0 = \Delta_0 + q_0 = \Delta + q, \quad q = \frac{4\pi}{3} R_{k0}^3 \int_0^\infty f \rho^3 d\rho$$

или, учитывая, что  $x = \Delta_0/\Delta$ ,

$$1 = \frac{\Delta_0}{Q_0 x} + x \int_0^\infty f \rho^3 d\rho, \quad x = 4\pi R_{k0}^3 / 3Q_0. \quad (5)$$

В написанной формуле  $Q_0$  — полное начальное пересыщение, включая начальный объем вещества в зернах  $q_0$ . Нормировка  $f$  в (5) выбрана на единицу объема, т. е.  $n = \int_0^\infty f d\rho$  — число зерен в единице объема.

Итак, наша задача заключается в отыскании асимптотического решения уравнений (4) и (5) при заданном начальном условии  $f(\rho, 0) = f_0(\rho)$ .

<sup>1</sup> Написанное выражение для потока отвечает стационарному значению градиента  $\partial C/\partial r$  на границе зерна. Легко убедиться, что оно законно при условии малости начального пересыщения  $\Delta_0 \ll 1$ .

<sup>2</sup> Заметим, что если зерна не сферические, однако на поздней стадии процесса растут, сохраняя подобие формы (связанное с анизотропией  $\alpha$ ), то формула (2) и все дальнейшие количественные выводы остаются справедливыми, при этом, однако, величина  $R$  имеет смысл  $(3V/4\pi)^{1/3}$  ( $V$  — объем зерна), а  $\alpha$  и  $D$  отличаются от прежних лишь численным множителем (который учитывает форму зерна).

## 2. Асимптотика изменения критических размеров

Для решения поставленной задачи, в первую очередь, должна быть определена асимптотика изменения критических размеров  $x(t)$  (или, что то же, пересыщения  $\Delta(t) = \Delta_0/x(t)$ ). Картина движения точки  $\rho$ , изображающей радиус зерна на оси размеров, вытекающая из уравнения движения (3), имеет следующий характер: точки, находящиеся слева от  $x(t)$ , ускоренно движутся налево и, достигая начала координат, выходят из игры (полное растворение зерна); точки, находящиеся первоначально справа от  $x(t)$ , движутся направо (зерна растут), однако, по мере убывания пересыщения критический размер  $x(t)$  возрастает и «догоняет» поочередно точки, движущиеся направо, после чего эти точки начинают двигаться в обратном направлении и также «исчезают» в начале координат. При этом движение все время упорядочено, т. е. первоначальный порядок расположения точек сохраняется.

Как из структуры уравнения (3), так и из физического смысла величины  $x(t)$  представляется естественным в качестве независимой переменной в уравнениях (3), (4) и (5) выбрать не радиус зерна  $\rho$ , а относительный радиус (по отношению к критическому)

$$u = \rho/x(t). \quad (6)$$

Так как при  $t \rightarrow \infty$  пересыщение  $\Delta \rightarrow 0$ , то  $x(t) \rightarrow \infty$ ; вследствие этого величина  $x(t)$  может быть использована для отсчета времени<sup>3</sup>. Как оказывается, каноническую форму «уравнение движения» (3) принимает, если в качестве «времени» выбрать величину

$$\tau = \ln x^3. \quad (7)$$

Подстановка (6) и (7) в (3) дает:

$$du^3/d\tau = \gamma(u-1) - u^3, \quad (8)$$

$$\gamma = \gamma(\tau) = 3dt/dx^3. \quad (9)$$

Если через  $u(v, \tau)$  обозначить решение уравнения (8) при начальном условии  $u|_{\tau=0} = v$  и учесть, что  $\rho(v, \tau) = x u(v, \tau)$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\tau|_{t=0} = 0$ , то полное количество  $q$  вещества в зернах может быть записано через начальную функцию распределения  $f_0(\rho)$  в виде

$$q = x Q_0 \int_{v_0(\tau)}^\infty f_0(v) x^3(\tau) u^3(v, \tau) dv. \quad (10)$$

Здесь  $v_0(\tau)$  — решение уравнения  $u(v_0(\tau), \tau) = 0$ , т. е. нижняя граница первоначальных размеров зерен, не растворившихся к моменту  $\tau$ . Замечая, что  $x^3 = e^\tau$ , мы можем записать уравнение (5) в форме

$$1 - e^{-\tau/3} = x e^\tau \int_{v_0(\tau)}^\infty f_0(v) u^3(v, \tau) dv. \quad (11)$$

Уравнения (8) и (11) представляют собой полную систему. В этих уравнениях неизвестной функцией является  $\gamma(\tau) = 3dt/dx^3$ , и они могут быть

<sup>3</sup> Формально, исключением является случай, когда начальное распределение представляет собой  $\delta$ -функцию ( $f_0 = A \delta(\rho - \rho_0)$ ) или сумму  $\delta$ -функций. В этом случае  $x(t) \rightarrow \text{const}$ , когда общий размер  $\rho$  приобретает равновесное значение. Однако этот случай является неустойчивым — сколь угодно малое размытие начального распределения приводит к  $x(t) \rightarrow \infty$ .

использованы для ее определения, т. е. в конечном счете, для определения  $x(t)$ .

Существуют три возможности для асимптотического поведения  $\gamma(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ : 1)  $\gamma(\tau) \rightarrow \infty$ ; 2)  $\gamma(\tau) \rightarrow \text{const}$ ; 3)  $\gamma(\tau) \rightarrow 0$ .

Анализ этих возможностей мы начнем со случая  $\gamma = \text{const}$ . В зависимости от значения  $\gamma$  график скорости  $du^3/d\tau$ , как функции  $u$  может касаться оси абсцисс (при  $\gamma = \gamma_0 = 27/4$ ), либо проходить ниже этой оси (при  $\gamma < \gamma_0$ ), либо иметь участок положительных значений (при  $\gamma > \gamma_0$ ) (см. рис. 1, 2, 3).

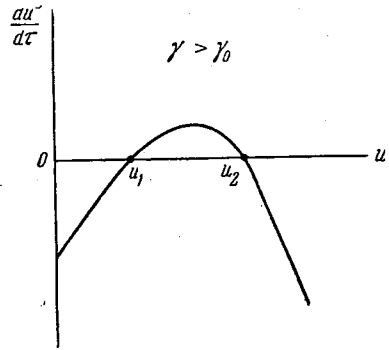


Рис. 1

а) В случае  $\gamma > \gamma_0$  все точки, находящиеся слева от  $u_1$ , движутся налево и исчезают, достигая начала координат; все точки, находящиеся справа от  $u_1$ , движутся к точке  $u_2$  и асимптотически приближаются к ней слева или справа. Поэтому интеграл, стоящий в правой части (11), стремится при  $\tau \rightarrow \infty$  к постоянному значению

$$I_0 = u_2^3 \int_{u_1}^{\infty} f_0(v) dv,$$

а суммированный объем зерен  $q$ , стоящий в правой части, возрастает, как  $e^\tau$ :

$$q = \kappa I_0 e^\tau \rightarrow \infty, \quad (12)$$

и уравнение (11) не удовлетворяется. Если учесть, что постоянное значение  $\gamma > \gamma_0$  достигается лишь асимптотически, то это не меняет сделанных утверждений: следует лишь сместить начало отсчета времени и выражение

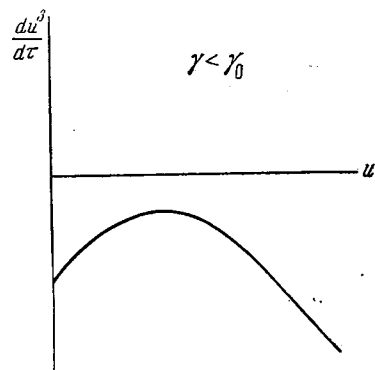


Рис. 2

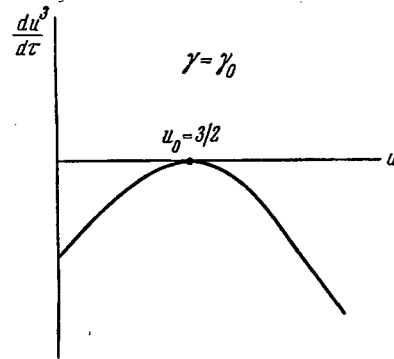


Рис. 3

$f_0(v)$  отнести к тому моменту, когда  $\gamma(\tau)$  уже близко к своему асимптотическому значению.

б) В случае  $\gamma < \gamma_0$  все точки движутся влево и за конечное время достигают начала координат. К моменту  $\tau$ , как следует из (8), растворяются все зерна, первоначальный размер которых меньше  $v_0(\tau)$ , определяемого из уравнения

$$\int_0^{v_0(\tau)} \frac{3u^2 du}{u^3 - \gamma(u-1)} = \tau.$$

При  $\tau \gg 1$  имеем  $v_0(\tau) = e^{\tau/3}$ . Поэтому суммарный объем зерен будет определяться «хвостом» первоначального распределения  $f_0(v)$ :

$$q(\tau) = \kappa e^\tau \int_{e^{\tau/3}}^{\infty} f_0(v) u^3(v, \tau) dv \sim \kappa \int_{e^{\tau/3}}^{\infty} f_0(v) v^3 dv \rightarrow 0 \quad (13)$$

(так как  $u(v, \tau) \sim v e^{-\tau/3}$ )<sup>4</sup>. Таким образом,  $q(\tau)$  в этом случае стремится к нулю, и уравнение (11) снова не имеет решения.

В случаях  $\gamma \rightarrow \infty$  и  $\gamma \rightarrow 0$  аргументация, проведенная соответственно для  $\gamma > \gamma_0$  и  $\gamma < \gamma_0$ , лишь усиливается. Таким образом, должен быть исследован лишь случай  $\gamma(\tau) \rightarrow \gamma_0 = 27/4$ .

Прежде всего заметим, что при точном равенстве  $\gamma = \gamma_0$  все точки, лежащие справа от точки касания  $u_0 = 3/2$ , двигаясь влево, не могут пересечь точку касания  $u_0$  и «застревают» в этой точке. Поэтому, как и в случае  $\gamma > \gamma_0$ , уравнение (11) не может быть удовлетворено ( $q(\tau) \sim e^\tau \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ). Это означает, что выражение  $\gamma(\tau)$  должно стремиться к  $\gamma_0$  снизу, т. е.

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 (1 - \varepsilon^2(\tau)). \quad (14)$$

При этом точки, подходящие справа к  $u_0$ , все медленнее «просачиваются» через «запирающую» точку  $u_0 = 3/2$ . Скорость этого просачивания определяется значением  $\varepsilon(\tau)$ , которое, как и  $\gamma(\tau)$ , должно быть определено из уравнения (11) и уравнения движения (8):

$$\frac{du^3}{d\tau} = -\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 (u + 3) - \frac{1}{2} \gamma_0 \varepsilon^2(\tau), \quad (15)$$

$\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Вблизи точки  $u_0 = 3/2$  это уравнение имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{2}{3} \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2(\tau). \quad (16)$$

Вводя новую функцию  $z = (u - 3/2)/\varepsilon$ , мы запишем его в форме

$$\frac{3}{2} \frac{dz}{\varepsilon d\tau} = -z^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} z \frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}.$$

Исследование, подобное предыдущему, показывает, что асимптотически

$$\frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon^2 \rightarrow \frac{3}{4\tau^2}. \quad (17)$$

При этом

$$\frac{3}{2} \frac{dz}{d \ln \tau} \rightarrow -\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

<sup>4</sup> Точное значение  $u(v, \tau)$  является решением уравнения

$$R(u) = R(v) e^{-\tau/3}, \quad R(u) = \exp \left[ \int_0^u \frac{u^2 du}{u^3 - \gamma(u-1)} \right],$$

$R(0) = 1$ ,  $R(v) = v$  при  $v \gg 1$ ; поэтому при  $v \gg 1$  имеем  $v = R(u) e^{\tau/3}$ , и точное выражение асимптотики  $q$  имеет вид

$$q(\tau) \sim \kappa x^4 \int_1^{\infty} f_0(xR) u^3(R) dR; \quad x = e^{\tau/3}.$$

При  $u \gg 1$ ,  $R \approx u$ , и мы получаем оценку (13).

т. е. скорость  $dz/d \ln \tau$  асимптотически обращается в нуль в «запирающей» точке  $z_0 = \sqrt{3}/2$ .

Таким образом, при достаточно больших  $\tau$  уточненное значение  $\gamma(\tau)$  будет

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 (1 - 3/4 \tau^2), \quad (18)$$

а уточненное положение «запирающей точки» на оси —

$$u = 3/2 + z_0 \varepsilon(\tau) = 3/2 + 3/4 \tau. \quad (19)$$

Продолжая такие же рассуждения, можно получить асимптотическое разложение для  $\gamma(\tau)$ <sup>5</sup>:

$$3 \frac{dt}{dx^3} = \gamma(\tau) = \gamma_0 \left[ 1 - \frac{3}{4\tau^2} \left( 1 + \frac{1}{(\ln \tau)^2} (1 + \dots) \right) \right], \quad (20)$$

и соответственно

$$x^3 = \frac{4}{9} t \left( 1 + \frac{3}{4(\ln t)^2} (1 + \dots) \right). \quad (21)$$

В этом разложении каждый предыдущий член может быть оставлен лишь при условии малости последующего. В частности, основное приближение  $\gamma(\tau) = \gamma_0$  и, соответственно,  $x^3 = \frac{4}{9} t$  справедливо при условии  $\tau^2 = (\ln t)^2 \gg 1$ .

Любопытной особенностью написанных разложений (20) и (21) является то, что, хотя относительное значение поправок к  $\gamma_0$  быстро убывает по мере роста  $\tau$  и первое приближение (21) становится все более точным, поведение решения вблизи запирающей точки определяется именно этими поправками.

Во всей остальной области (вне окрестности точки  $u_0 = 3/2$ ) скорость  $du/d\tau$  имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = -g(u); \quad g(u) = \left( u - \frac{3}{2} \right)^2 (u + 3) / 3u^2. \quad (22)$$

### 3. Асимптотика функции распределения

В соответствии с результатами предыдущего раздела, функцию распределения мы также будем искать в новых переменных  $u, \tau$ . Функция распределения  $\varphi(u, \tau)$  по относительным размерам  $u = \rho/x$  связана с  $f(\rho, t)$  очевидным соотношением

$$\varphi(u, \tau) du = f(\rho, t) d\rho = x f(\rho, t) du,$$

откуда

$$f = \varphi(u, \tau) / x.$$

Уравнение непрерывности для  $\varphi(u, \tau)$  всюду, за исключением окрестности точки  $u_0$ , имеет при  $\tau \gg 1$  вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi g(u)}{\partial u} = 0. \quad (23)$$

Решение этого уравнения слева от  $u_0$  имеет вид:

$$\varphi = \chi(\tau + \psi) / g(u),$$

<sup>5</sup> Формально  $\gamma(\tau)$  может быть записано в виде  $\gamma(\tau) = \gamma_0 (1 - 3/4 w(\tau))$ , где  $w(\tau)$  удовлетворяет функциональному уравнению  $w(z) = z^{-2} (1 + w(\ln z))$ , справедливому при  $z > 1$ .

где введено обозначение

$$\psi = \int_0^u \frac{du}{g(u)} = \frac{4}{3} \ln(u + 3) + \frac{5}{3} \ln\left(\frac{3}{2} - u\right) + \frac{1}{1 - 2u/3} - \ln \frac{3^3 e}{2^{3/2}},$$

а  $\chi$  — некоторая произвольная функция, которую нужно еще определить.

Как следует из анализа уравнения движения (8), (15), т. е. характеристик уравнения (23), проведенного в предыдущем разделе, окрестность точки  $u_0$  следует считать стоком для всех точек  $u > u_0$  и источником для области  $u < u_0$  (в области  $u < u_0$  стоком является начало координат  $u = 0$ ). Двигаясь справа налево, все точки проходят через окрестность запирающей точки  $u_0$ , причем чем позднее они попадают в эту окрестность, тем дольше они там находятся.

Функция распределения справа от точки  $u_0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  определяется бесконечно удаленной частью «хвоста» первоначального распределения, и ее интегральный вклад как в абсолютном, так и в относительном выражении, быстро стремится к нулю (см. Приложение, п. 1).

Как будет показано ниже, относительный вклад от окрестности точки  $u_0$  также стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$  (см. Приложение, п. 2).

Таким образом, подавляющий вклад в закон сохранения вещества дают зерна со значениями  $u < u_0$ . Отсюда следует, что закон сохранения вещества можно использовать как интегральное уравнение для определения асимптотического поведения функции распределения в нулевом приближении для  $u < u_0$ . (Функция распределения для  $u > u_0$  в этом приближении равна нулю). Для этого подставим решение уравнения (23) в закон сохранения вещества и, учтя сказанное выше, получим асимптотическое уравнение для  $\chi$ :

$$1 = x e^\tau \int_0^{3/2} \chi(\tau + \psi) \frac{u^3}{g(u)} du. \quad (24)$$

Из этого уравнения легко определим  $\chi(\tau + \psi)$ , а с ней и  $\varphi(u, \tau)$ :

$$\chi(\tau + \psi) = A e^{-\tau - \psi}, \quad (25)$$

$$\varphi(u, \tau) = A e^{-\tau - \psi} \frac{1}{g(u)} = \frac{3^4 e}{2^{3/2}} A e^{-\tau} \frac{u^2 \exp[-1/(1 - 2u/3)]}{(u + 3)^{3/2} (3/2 - u)^{1/2}},$$

где

$$A = \left[ x \int_0^{3/2} e^{-\psi} \frac{u^3}{g(u)} du \right]^{-1} = \frac{3Q_0}{4\pi R_{h_0}^3 \cdot 1,11} \approx 0,22 \frac{Q_0}{R_{h_0}^3}. \quad (26)$$

Отсюда видно, что асимптотическое поведение функции распределения для  $u < u_0$  не зависит от вида начальной функции распределения<sup>6</sup>.

Количество частиц в единице объема, согласно (25), будет

$$n(\tau) = \int_0^{3/2} \varphi(u, \tau) du = A e^{-\tau} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{A}{t}. \quad (27)$$

Пусть  $P(u) du$  есть вероятность для частицы иметь размер между  $u$  и

<sup>6</sup> Следует заметить, что распределение, написанное Годесом, формально соответствует в этой схеме случаю  $\gamma < \gamma_0$ ; как ясно из предыдущего, такое распределение никогда не может возникнуть, и сам случай  $\gamma < \gamma_0$  не имеет смысла; именно с этим и связана расходимость интегралов в формулах Годеса.

$u + du$ . Тогда

$$\varphi(u, \tau) = n(\tau) P(u), \quad (28)$$

где

$$P(u) = \begin{cases} \frac{3^4 e^{-u} \exp[-1/(1-2u/3)]}{2^{1/3} (u+3)^{7/3} (3/2-u)^{11/3}}, & u < u_0 = 3/2; \\ 0 & u > u_0 = 3/2. \end{cases} \quad (29)$$

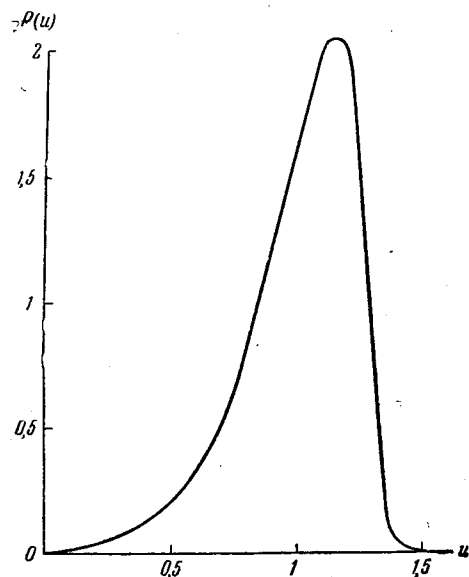


Рис. 4

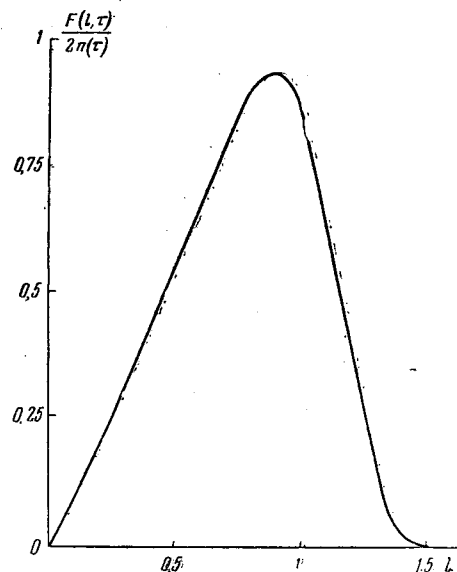


Рис. 5

Удобно выразить эту же вероятность в несколько других относительных переменных, введя максимальный размер

$$\rho_m = 3x/2, \quad v = \rho/\rho_m = u/u_m = 2u/3.$$

Тогда

$$P(u) du = P_1(v) dv, \quad P(u) = 2P_1(v)/3;$$

$$P_1(v) = \begin{cases} 2^{1/3} e^{-v} \exp[-1/(1-v)] / (v+2)^{7/3} (1-v)^{11/3}, & v < 1; \\ 0 & v > 1. \end{cases}$$

Таким образом, эти формулы полностью определяют асимптотическое распределение частиц по размерам и во времени<sup>7</sup>. Зависимость вероятности  $P(u)$  изображена на рис. 4.

Заметим теперь, что

$$\int_0^{3/2} e^{-\psi} \frac{u-1}{g(u)} du = \int_0^{\infty} e^{-\psi} (u(\psi) - 1) d\psi = e^{-\psi} u^3(\psi) \Big|_0^{\infty} = 0. \quad (30)$$

<sup>7</sup> Если измерения проводятся на шлифе, то функция распределения  $\Phi(r, \tau)$  по размерам лунок  $r$ , как легко показать, будет

$$F(l, \tau) dl = \Phi(r, \tau) dr, \quad \Phi(r, \tau) = x^{-1} F(r/x(\tau), \tau),$$

$$F(l, \tau) = 2x(\tau) \int_l^{3/2} \frac{\varphi(u, \tau) du}{V(u/l)^2 - 1}, \quad l = \frac{r}{x(\tau)}, \quad r = \frac{R}{R_{k0}}$$

(см. рис. 5).

Здесь мы использовали соотношение

$$du^3/d\psi = u^3 - 4(u-1)/27. \quad (31)$$

Это означает, что  $\bar{u} = 1$ ; отсюда следует:

$$\bar{\rho} = \bar{u}x = x(\tau). \quad (32)$$

Для того, чтобы получить функцию распределения по абсолютным размерам  $\rho$ , нужно только в выражении (25) заменить  $u$  на  $\rho/x$  и разделить на  $x$ , где

$$x^3 = 4t/9. \quad (33)$$

Учитывая, что согласно (32)  $u = R/\bar{R}$ , и возвращаясь к исходным размерным величинам, мы получим

$$\begin{aligned} f(R, t) &= n(t) P(R/\bar{R})/\bar{R}, \\ n(t) &= \beta Q_0/\bar{R}^3 = B/t, \quad \beta \approx 0,22, \quad B \approx 1/2D\alpha, \\ \bar{R}^3 &= 4Dat/9, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $P(u)$  дается формулой (28). Пересыщенность в данный момент времени дается выражением

$$\Delta(t) = \frac{\Delta_0}{x(t)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \Delta_0 \left(\frac{T}{t}\right)^{1/3} = \lambda t^{-1/3}, \quad \lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\alpha^2}{D}\right)^{1/3}. \quad (35)$$

Остановимся, в заключение, на вопросе о пределе применимости найденных формул. Как следует из предыдущего анализа, написанные асимптотические выражения справедливы при условии

$$\tau^2 = (3 \ln x)^2 = 9 \left(\ln \frac{\bar{R}}{R_{k0}}\right)^2 \gg 1; \quad \bar{R} \gg R_{k0}.$$

Здесь  $R_{k0} = \alpha/\Delta_0$  — начальный критический радиус для процесса коалесценции (соответственно,  $\Delta_0$  — начальное пересыщение). По этому поводу необходимо учесть следующее: если начальные средние размеры зерен порядка критических ( $\bar{R}_0 \sim R_{k0}$ ), то эти размеры и фигурируют в приведенной выше оценке. Однако, если  $\bar{R}_0 \gg R_{k0}$ , то на первой стадии происходит рост зерен непосредственно из раствора; этот процесс продолжается до тех пор, пока пересыщение не упадет настолько, что средние размеры станут порядка критических ( $\bar{R}_1 \sim R_{k1}$ ), после чего, собственно говоря, и начнется процесс коалесценции. Эти размеры и должны фигурировать в качестве начальных. Их величина определяется существенным образом не только исходным пересыщением, но и исходным числом зародышей (если его можно считать фиксированным).

Так, если исходное пересыщение было  $\Delta_0$ , исходное число зерен  $n_0$ , причем  $\bar{R}_0 \gg R_{k0} = \alpha/\Delta_0$ , то рост из раствора будет продолжаться до размеров

$${}^{4/3} \pi \bar{R}_1^3 \approx \Delta_0/n_0,$$

причем на начальной стадии процесса

$$\frac{d\bar{R}^2}{dt} = 2D \left( \Delta_0 - \frac{4\pi}{3} \bar{R}^3 n_0 \right) = 2D \Delta_0 \left( 1 - (\bar{R}/R_{k1})^3 \right). \quad (36)$$

Продолжительность первой стадии  $t_1 \sim \bar{R}_1^2/D\Delta_0$ .

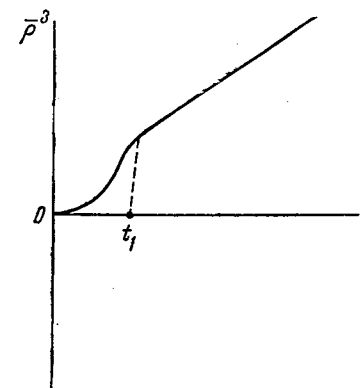


Рис. 6

Характерное время для начального этапа второй стадии (коалесценции)

$$t_0 \sim \bar{R}_1^3 / D\alpha \sim t_1 \bar{R}_1 / R_{k0};$$

в обсуждаемом случае  $\bar{R}_1 \gg R_{k0}$ , т. е.  $t_0 \gg t_1$ . Ход зависимости средних размеров от времени в этом случае схематически изображен на рис. 6.

#### 4. Учет границы. Теория спекания

В предыдущих разделах был изучен процесс коалесценции в неограниченном пространстве. Поэтому в задаче отсутствовали макроскопические диффузионные потоки растворенного вещества.

Положение изменяется, если пространственная однородность отсутствует; наиболее важный случай такого рода возникает при наличии границы между раствором и другой фазой. Если этой второй фазой является чистое растворенное вещество (или, более общё, та фаза, рост зерен которой изучается), то на этой границе пересыщение  $\Delta_{z=0} = 0$  и это вызывает макроскопический диффузионный поток к границе.

Важным частным случаем является тот, когда роль атомов растворенного вещества играют вакансии (пустые места), а роль зерен — поры, получающиеся за счет коагуляции вакансий в кристалле, «пересыщенном вакансиями». При наличии свободной поверхности в таком кристалле будут происходить два конкурирующих процесса: в областях, далеких от границы, рост пор (кристаллов пустоты) и их коалесценции по схеме, разработанной ранее; вблизи границы, наоборот, растворение пор и вытеснение вакансий диффузионным потоком на границу (которая может рассматриваться как пор бесконечно большого радиуса). С этим процессом вытеснения пор и связано явление спекания.

В дальнейшем мы будем говорить об этом конкретном процессе, хотя все результаты относятся, разумеется, и к более общим случаям пересыщенных растворов.

В случае полупространства уравнения для роста зерен (3) и для функции распределения (4) (или эквивалентные им (8) и (10)), естественно, сохраняются. Однако вместо закона сохранения ( $Q_0 = \Delta + q$ ), который соответствует уравнению (5) (или соответственно (11)), должно быть написано уравнение диффузии. При этом каждая точка  $z$  является источником (или стоком) с интенсивностью  $dq/dt$ ,  $q = q(z, t)$  за счет растворения пор. Таким образом, точная система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial(\Delta + q)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2}, \quad \Delta|_{z=0} = 0; \quad (37)$$

$$q = \kappa x^3 \int_{v(\tau)}^{\infty} f_0(v) u^3(v, \tau) dv, \quad x = \Delta_0 / \Delta(z, t), \quad (38)$$

где  $u(v, \tau)$  удовлетворяет уравнению (8) и само определяется видом функции  $\Delta(z, t)$ .

Анализ, проделанный в разделе 2, показал своеобразную «устойчивость» найденного асимптотического закона изменения пересыщения (35)

$$\Delta = \lambda t^{-1/3},$$

а именно: сколь угодно малое замедление асимптотического падения пересыщения вызывает неограниченный рост вещества в зернах ( $q \rightarrow \infty$ ) и поэтому невозможно. С другой стороны, даже малое ускорение асимптотического падения пересыщения приводит относительно быстро к полному растворению зерен ( $q \rightarrow 0$ ). Поэтому асимптотическая картина процесса спекания должна выглядеть следующим образом. Существуют три достаточно резко отделенные друг от друга области:

а) наиболее удаленная от границы область ( $z_2 < z < \infty$ ), в которой влияние границы еще не сказывается, и пересыщение, как и в случае неограниченного пространства, дается формулой (35);

б) область  $z_1 < z < z_2$ , в которой происходит растворение пор (зерен);

в) область  $0 < z < z_1$ , где поры уже полностью отсутствуют и происходит чисто диффузионное вытеснение вакансий. Границы этих областей  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  перемещаются в глубь образца, и, таким образом, «корка», свободная от пор, все время утолщается. Собственно говоря, система уравнений (37) и (38) должна решаться только для промежуточной области  $z_1 < z < z_2$ . Как будет показано ниже, однако,  $(z_2 - z_1)/z_2 \ll 1$ . Поэтому мы в первом приближении положим  $(z_1 + z_2)/2 = \zeta$  и, заменив эту область соответствующим граничным условием, определим положение границы  $\zeta(t)$  и ход концентрации в поверхностном слое  $0 < z < \zeta$  (в корке). Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2}; \quad (39)$$

$$\Delta|_{z=0} = 0; \quad \Delta|_{z=\zeta} = \lambda t^{-1/3}; \quad D \frac{\partial \Delta}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = Q_0 \frac{d\zeta}{dt}. \quad (40)$$

Последнее условие заменяет собой переходную область и выражает тот факт, что граница  $\zeta(t)$  представляет собой источник мощностью  $Q_0 d\zeta/dt$  (так как справа практически все избыточные вакансии находятся в порах). Решение уравнения (38) с учетом граничного условия ( $\Delta|_{z=0} = 0$ )

будем искать в виде  $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) z^n$ ; тогда из уравнения (39) получим

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{p}^n \alpha_1(t)}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \hat{p} = \frac{1}{D} \frac{d}{dt}.$$

Прежде чем удовлетворить остальным двум граничным условиям заметим, что  $\alpha_1(t)$  асимптотически является убывающей функцией времени (так как она представляет собой поток на границе  $z=0$ ,  $\alpha_1(t) = D \partial \Delta / \partial z|_{z=0}$ ).

Поэтому будем искать асимптотическое значение  $\alpha_1$  в виде  $\alpha_1 = B/t^s$ ,  $s > 0$ . Тогда из (39) получим:

$$\Delta = B \frac{z}{t^s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z^2}{Dt} \right)^n \frac{s(s+1) \dots (s+n)}{(2n+1)!}. \quad (41)$$

Как будет показано ниже,  $\zeta^2(t)$  асимптотически меняется медленнее, чем  $t$  (т. е.  $\zeta^2(t)/t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Таким образом, в асимптотике основную роль играет член с  $n=0$

$$\Delta = Bz/t^s \equiv \alpha_1 z. \quad (42)$$

Подставляя (41) в (39), имеем

$$\alpha_1 \zeta = \lambda t^{-1/3}, \quad \alpha_1 = \frac{Q_0}{D} \frac{d\zeta}{dt}.$$

В результате получим

$$\zeta = \sqrt{3} (3/2)^{1/3} \bar{R} / Q_0^{1/2} = m (D\alpha t)^{1/3} / Q_0^{1/2}; \quad m_1 = (3/2)^{1/3} \sqrt{3} \approx 2; \quad (43)$$

$$\Delta = \lambda t^{-1/3} z / \zeta = \frac{m}{3} Q_0^{1/2} \frac{\alpha^{1/2} z}{(Dt)^{1/3}}.$$

Теперь остается определить относительную ширину промежуточной области. Согласно (43),

$$\delta\zeta/\zeta = \delta t/3t = T_p(t)/3t, \quad (44)$$

где  $T_p$  — время растворения наибольших зерен, существующих на границе к моменту  $t$ ,  $R_{\max} = 3R_{\text{кр}}/2$ . Критический размер как функция времени в области (I) имеет вид

$$R_{\text{кр}}^3 \sim t^2.$$

Простой расчет показывает, что в уравнении движения (8)  $\gamma = 3dt/dx^3 \leq \leq 27/8 < \gamma_0$ . Из этого уравнения находим время растворения наибольших зерен ( $u_0 = 3/2$ ),  $T_p(t) \approx t/3$ . Это дает для относительной ширины

$$\delta\zeta/\zeta \approx 1/9.$$

Кстати, заметим, что

$$\delta\zeta/\bar{R} = 1/3 Q_0^{1/2} \gg 1. \quad (45)$$

Кроме того

$$\delta\zeta/l \approx Q_0^{1/2}/3Q_0^{1/2} = 1/3 Q_0^{1/2} \gg 1, \quad (46)$$

где  $l$  — среднее расстояние между зернами. Неравенства (45), (46) означают, что  $\delta\zeta \gg l \gg \bar{R}$ , т. е. ширина промежуточной области значительно больше, чем среднее расстояние между порами и чем средний размер поры (зерна) и одновременно значительно меньше первой области (корки). Это и означает, что все наши предположения при нахождении асимптотик справедливы.

Времена, при которых можно пользоваться асимптотической формулой (43), те же, что и для асимптотик коалесценции в неограниченном объеме.

Несколько своеобразная ситуация возникает в случае учета конечных размеров образца (а не только наличия одной границы). Например, для пластины толщиной  $a$  существуют три характерные времени: время диффузионного выхода вакансий на поверхность из пластины  $T_0 \sim a^2/D$ ; время роста пор из раствора  $T_1 \sim \bar{R}_1^2/D\Delta_0$  (см. стр. 487, 488) и характерное время коалесценции  $T_k \sim \bar{R}^3/D\alpha$ .

Для того, чтобы вся описанная картина «коркового» механизма спекания могла иметь место, необходимо, чтобы время диффузионного выхода  $T_0$  было значительно больше  $T_k$ , т. е.  $a^2 \gg \bar{R}_1^3/\alpha$ ; средние размеры пор, которые фигурируют в написанном неравенстве, должны соответствовать развившемуся процессу коалесценции  $\bar{R} \gg R_1$ . В другом предельном случае  $T_0 \ll T_1$  вакансии уйдут наружу, не успев образовать пор. В промежуточном случае  $a^2 \sim R_1^3/\alpha$  кинетика процесса определяется различными факторами, связанными с начальной функцией распределения и не имеет универсального характера.

Метод, предложенный в этой задаче, может быть применен и к ряду других задач подобного рода, рассмотрению которых будет посвящено отдельное сообщение.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ $u > u_0$ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $u_0$

1. Определим функцию распределения для  $u > u_0$ . Введем  $\psi = \int du/g(u)$  и заметим, что  $g(u) \rightarrow u/3$ ,  $u \rightarrow e^{\psi/3}$  при  $u \rightarrow \infty$ , т. е.

$$ux^{1/3} \rightarrow \exp[(\tau + \psi)/3].$$

Кроме того, решение справа при  $u \rightarrow \infty$  должно иметь вид, определяемый начальной функцией распределения:

$$\chi(\tau + \psi) \rightarrow f_0(ux^{1/3})x^{1/3}g(u),$$

где  $f_0$  — начальная функция распределения по  $\rho$ . Из этого условия и определим распределения для  $u > u_0$ :

$$\chi(\tau + \psi) = f_0(z)z/3, \quad z = e^{(\tau + \psi)/3}$$

или

$$\varphi(u, \tau) = f_0(z)z/3g(u).$$

$f_0(z)$  меняется по крайней мере быстрее, чем  $z^{-4}$  (это необходимо для существования  $\int_0^\infty f_0(z)z^3 dz$ ). Обычно  $f_0(z)$  меняется экспоненциально с  $z$ . Отсюда плотность вероятности для  $u > u_0$  в нулевом приближении — нуль:

$$P(u, \tau) = \varphi(u, \tau)/n(\tau) = \frac{1}{3A} f_0(z)z^4 \frac{e^{-\psi}}{g(u)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Плотность же вероятности для  $u < u_0$ , как известно, конечна.

2. Покажем, что интегральный вклад от окрестности точки пренебрежимо мал при  $\tau \rightarrow \infty$ . Количество вещества в этой окрестности определяется как

$$q_\delta = x^3 \int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta} \varphi u^3 du = u_0^3 e^\tau n_\delta(\tau),$$

$$n_\delta(\tau) = \int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta} \varphi du, \quad 1 \gg \delta \gg \varepsilon(\tau).$$

Из уравнения непрерывности найдем

$$\frac{dn_\delta}{d\tau} = \varphi g(u) \Big|_{u_0-\delta}^{u_0+\delta} = A e^{-\tau} e^{-\psi(u_0-\delta)} = A e^{-\tau} \exp(-3/2\delta)$$

(поток справа определяется при  $\tau \rightarrow \infty$  бесконечно удаленным хвостом распределения и поэтому им можно пренебречь),

$$n_\delta = A e^{-\tau} \exp(-3/2\delta) + B; \quad q_\delta = A \exp(-3/2\delta) + B e^\tau.$$

Очевидно, что  $B = 0$ , так как должен выполняться закон сохранения вещества.

В итоге получим количество вещества в окрестности  $u_0$  при  $\tau \rightarrow \infty$

$$q_\delta = A \exp(-3/2\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

3. Покажем, как строится более точное выражение для функции распределения в окрестности точки  $u_0 = 3/2$ .

Уравнение непрерывности в окрестности этой точки имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial u} \varphi g(u) = 0, \quad g(u) = -\frac{2}{3} \left[ \left( u - \frac{3}{2} \right)^2 + \varepsilon^2(\tau) \right], \quad \varepsilon(\tau) = 3/4 \tau.$$

Введем обозначение

$$z = \frac{2}{3} \left( u - \frac{3}{2} \right) \tau, \quad f(z, \tau) dz = \varphi(u, \tau) du.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \ln \tau} - \frac{\partial}{\partial z} f g(z) = 0, \quad g(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Его решение будет

$$f = f \left( \ln \left[ \tau \exp \int \frac{dz}{g(z)} \right] \right).$$

Теперь заметим, что

$$\tau + \int_0^u \frac{du}{g(u)} \rightarrow \tau \exp \int \frac{dz}{g(z)}, \quad \frac{1}{g(z)} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{\tau^2}{g(z)} \exp \int \frac{dz}{g(z)},$$

$$1 \gg \left| u - \frac{3}{2} \right| \gg \varepsilon(\tau).$$

Действительно

$$\tau + \int_0^u \frac{du}{g(u)} = \tau \left( 1 - 1 / \frac{2}{3} \left( u - \frac{3}{2} \right) \tau \right) = \tau \left( 1 - \frac{1}{z} \right) = \tau \exp \int \frac{dz}{g(z)}; \quad z \gg 1.$$

Кроме того, для таких же значений  $u$  должна получаться прежняя функция распределения в нулевом приближении:

$$f \frac{dz}{du} \rightarrow \frac{A}{2/3 (u - 3/2)^2} \exp \left\{ - \left( \tau - \frac{1}{2/3 (u - 3/2)} \right) \right\}, \quad z \gg 1.$$

Отсюда сразу определим

$$f = A \frac{\tau}{g(z)} \exp \left[ \int \frac{dz}{g(z)} - \tau \exp \int \frac{dz}{g(z)} \right].$$

Физико-Технический институт  
Академии наук Украинской ССР.  
Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
24 марта 1958 г.

#### Литература

- [1] О. М. Годес. ЖФХ, 20, 630, 1946.  
[2] О. М. Годес, В. В. Хрущев. ЖФХ, 21, 302, 1947.  
[3] Н. Н. Сирота. ДАН СССР, 40, 265, 1943.  
[4] И. В. Салли, В. И. Псарев. Физика металлов и металловед. 5, 268, 1957.

#### ON THE KINETICS OF DIFFUSIONAL DECAY OF SUPERSATURATED SOLID SOLUTIONS

I. M. Lifshitz, V. V. Slezov

The kinetics of the diffusional process of formation of grains of a new phase in a supersaturated solid solution is studied at a late stage of the process (coalescence of the grains). The exact asymptotic solution of this problem has been obtained and investigated. The asymptotic distribution function has been derived, the asymptotic number and average dimensions of the grains have been determined and the process of establishment of the asymptotic laws has been analyzed.

As an example of application of the theory the mechanism of sintering is considered.

#### ПРОЕКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Ф. И. Федоров

При помощи минимальных полиномов матриц релятивистских волновых уравнений и спиновых матриц строятся проективные матрицы — диады, описывающие любое возможное состояние свободной частицы с произвольным спином. Основные физические величины (энергия-импульс, ток-заряд, вероятность перехода) выражаются непосредственно через эти проективные операторы инвариантным образом (независимо от выбора базиса представления). В результате расчет разнообразных эффектов для любых спиновых частиц сводится к вычислению следов от некоторых комбинаций матриц. В качестве приложения метода получены общие условия дефинитности энергии и заряда для частиц с одной массой и дан простой вывод общих перестановочных соотношений для частиц с любым спином.

При различных расчетах, относящихся к спиновым частицам, приходится находить волновые функции свободного поля, являющиеся решениями уравнений первого порядка

$$(\gamma_k \nabla_k + \kappa) \psi = 0,$$

где  $x_4 = it$ ,  $c = \hbar = 1$ ,  $\gamma_k$  — квадратные матрицы. Для плоских волн  $\psi \sim e^{ipx}$ , отвечающих 4-импульсу  $p = (p_k)$ , уравнение (1) принимает вид

$$(ip_k \gamma_k + \kappa) \psi = 0. \quad (1)$$

Обозначим  $\hat{p} = ip_k \gamma_k$ . Как показано в [1], минимальное уравнение для матрицы  $\hat{p}$  в общем случае имеет вид

$$P(\hat{p}) = \hat{p}^n (\hat{p}^2 + \lambda_1^2 p^2) (\hat{p}^2 + \lambda_2^2 p^2) \dots (\hat{p}^2 + \lambda_q^2 p^2) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, q)$  — различные между собой, отличные от нуля собственные значения матрицы  $\gamma_4$ . Каждому значению  $\pm \lambda_l$  соответствуют свои состояния частицы.

Так как  $p^2 = -m^2$  и  $\lambda_l = \frac{\kappa}{m_l}$ , где  $m_l^2 = -p^{(l)2}$ , то вместо (2) можно написать

$$P(\hat{p}) = \hat{p}^n \left( \hat{p}^2 - \kappa^2 \frac{m^2}{m_1^2} \right) \left( \hat{p}^2 - \kappa^2 \frac{m^2}{m_2^2} \right) \dots \left( \hat{p}^2 - \kappa^2 \frac{m^2}{m_q^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Введем оператор

$$\sigma = \frac{i}{2|\mathbf{p}|} \delta_{abc} p_a J^{bc}; \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $J^{bc}$  — инфинитезимальные матричные операторы представления группы Лоренца в пространстве функций  $\psi$ , отвечающие пространственным поворотам,  $\mathbf{p}$  — трехмерный вектор импульса. Используя условие инвариантности уравнений (1)

$$[\gamma_k J^{lm}] = \delta_{kl} \gamma_m - \delta_{km} \gamma_l, \quad (5)$$

нетрудно убедиться, что операторы  $\hat{p}$  и  $\sigma$  коммутируют между собой. Поэтому при задании  $p^{(l)}$  и  $\lambda_l$  состояния частицы могут характеризоваться