И. М. Лифшиц, В. В. Слезов, О динамическом равновесии облака тумана над поверхностью жидкости, *Докл. АН СССР*, 1962, том 146, номер 4, 799–802

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 146, № 4

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ЛИФШИЦ, В. В. СЛЕЗОВ

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ ОБЛАКА ТУМАНА НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Картина динамического равновесия облака пересыщенного пара над поверхностью жидкости имеет следующий вид: в пересыщенном паре, поднимающемся от поверхности жидкости конвективным потоком воздуха, рождаются капельки жидкости. Двигаясь в облаке, они все время растут, т. е. поглощают избыточный пар, и в конце концов падают на поверхность жидкости. Таким образом, в динамическом равновесии все количество пара, поступающее от поверхности жидкости, поглощается каплями, находящимися в воздухе.

Будем описывать облако тумана над поверхностью жидкости функцией распределения $f(R, x)$ по размерам капелек на данной высоте x и пересыщенностью пара $\Delta(x)$. Полная система уравнений состоит из уравнения непрерывности в пространстве размеров и координат и уравнения баланса вещества. Уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f\cdot v_x}{\partial x}+\frac{\partial f\cdot v_R}{\partial R}=w(R, \Delta(x)); \tag{1}$$

$w(R, \Delta(x))$ — количество капель размера R, появляющихся в единице объема в единицу времени. Можно показать, что если учесть поверхностное натяжение и убывание пересыщенности с высотой, то устойчивыми будут только капли, размеры которых превышают некоторое критическое значение. Нас интересуют капли, значительно бо́льшие этого критического размера, поэтому можно считать, что рождаются капли нулевого размера, и одновременно пренебречь в выражении для скорости роста капли v_R членом, связанным с поверхностным натяжением. Тогда в гидродинамическом приближении $v_R=\frac{D}{R}\Delta$; $D=D_0\frac{\rho_п}{\rho_ж}$; v_R — диффузионная скорость роста капли, D_0 — коэффициент диффузии пара; Δ — пересыщенность пара; R — размер капли; $v_x=u-\beta R^2$ представляет собой установившуюся стоксовскую скорость движения капли в облаке; u — скорость конвективного потока воздуха; $\beta=\frac{2}{9}\frac{\rho_п}{\eta}\cdot g$; g — ускорение силы тяжести; η — вязкость воздуха; $\rho_п$ — плотность пара; $\rho_ж$ — плотность жидкости.

Уравнение баланса вещества имеет вид

$$-u\frac{\partial C}{\partial x}=-u\frac{\partial\Delta}{\partial x}=4\pi\frac{\rho_ж}{\rho_п}\int\limits_0^\infty f v_R R^2 dR+\frac{\partial\Delta}{dt}; \qquad \Delta=C-C(T),$$

$$\Delta|_{x=0}=\Delta_0; \tag{2}$$

$C(T)$ — равновесная концентрация пара.

Граничное условие $\Delta|_{x=0}=\Delta_0$ возникает, например, в результате перепада температуры в некотором тонком слое у поверхности жидкости; поэтому пар испаряясь сразу попадает в область более низкой температуры и становится пересыщенным: $\Delta_0=C(T_1)-C(T_2)$; здесь T_1 — температура жидкости, T_2 — температура окружающего воздуха.

Таким образом, уравнение (1) в стационарном случае имеет вид

$$(u-\beta R^2)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial R}(f v_R)=w(R. \Delta)=n(\Delta)\delta(R). \tag{3}$$

Его решение $f = \frac{R}{D}\frac{n(\Delta(x_0))}{\Delta(x_0)}$; $f = 0$, $R > R_{\max}(x)$, где $x_0 = x_0(R, x)$ — интеграл уравнения характеристики

$$(u - \beta R^2)\, dR = v_R\, dx. \tag{3*}$$

Величина $\alpha = n(\Delta)/\Delta$, вообще говоря, сильно зависит от условий, в которых находится облако тумана: загрязненности, ионизации и т. д.

Определим теперь $\Delta(x)$. Для того чтобы упростить задачу, учтем, что на данной высоте наибольшее количество составляют капли, приходящие из верхних слоев облака, которые являются стоками пара на данной высоте. Траектории этих капель можно получить из (3*). Из этого уравнения видно, что капля с ростом размера сначала, замедляясь, поднимается вверх, а потом опускается вниз. В верхней точке траектории ее размер достигает величины $R^0 = \sqrt{u/\beta}$. Расстояние от места ее зарождения $l_0 = u\frac{R^{0^3}}{4D\Delta_0}$. Путь, пройденный каплей за время падения, порядка характерного размера облака L. Мы предполагаем, что выполняется соотношение $(R^0/\overline{R})^2 \ll 1$, $\overline{R}$ — средний размер капли. Это, как мы увидим, эквивалентно условию

$$\gamma_в \mid \Delta_0\rho_п \ll 1;$$

$\gamma_в$ — количество воды в каплях, приходящееся на 1 см^3 облака. Отсюда следует, что можно пренебречь ростом капли за время подъема. Тогда уравнение характеристики принимает вид

$$-\frac{\beta R^2}{v_R}\, dR = dx, \qquad \frac{\beta R^4}{4} = \int_x^{x_0} D\Delta(x)\, dx; \tag{4}$$

x_0 — координата рождения капли.

Таким образом, задача решается с точностью до членов порядка $R^0/\overline{R}$ включительно.

Введем безразмерные переменные $\alpha(\Delta) = \frac{n(\Delta(\zeta_0))}{\Delta(\zeta_0)}\frac{\Delta_0}{n(\Delta_0)}$; $\Delta \to \frac{\Delta}{\Delta_0}$; $\zeta = \frac{x}{L_0}$; $r = \frac{R}{R^0}$; $\varepsilon = \frac{l_0}{L_0}$; $\frac{1}{L_0} = 4\pi\frac{\rho_ж}{\rho_п}\frac{R^{0^3}}{u}\frac{n(\Delta_0)}{\Delta_0}$. В новых обозначениях уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d\Delta}{d\zeta} = -\frac{\Delta}{4\varepsilon}\int_\zeta^\infty \alpha(\Delta(\zeta_0))\,\Delta(\zeta_0)\frac{d\zeta_0}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^{\zeta_0}\Delta d\zeta\right)}; \qquad \Delta|_{\zeta=0} = 1. \tag{5}$$

Прежде чем искать решение этого уравнения, необходимо задаться предположением относительно $\alpha(\Delta)$. Простейшее предположение о линейной зависимости $n(\Delta)$ выше порога $\Delta_{кр}$ дает

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} 1 & \Delta > \Delta_{кр}, \\ 0 & \Delta < \Delta_{кр}. \end{cases}$$

В силу $\alpha(\Delta) = 0$, $\Delta < \Delta_{кр}$, начиная с некоторой высоты $\zeta = \zeta_{кр}$, стационарного состояния не будет, а область, где $\Delta = \Delta_{кр}$, монотонно растет со временем.

Для решения (5) удобно ввести новую переменную $\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\int_\zeta^{\zeta_{кр}} \Delta\, d\zeta$.

Тогда (5) примет вид

$$\frac{d\Delta}{d\Phi} = \frac{\varepsilon}{4}\int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{(\Phi - \Phi')^{1/4}}; \qquad \Delta|_{\Phi=0} = \Delta_{кр}, \tag{6}$$

а его решением будет

$$\Delta - \Delta_{\text{кр}} = \frac{4}{21}\,\varepsilon\Phi^{7/4}; \quad \zeta = \frac{4}{7}\left(\frac{21}{4}\right)^{4/7}\varepsilon^{3/7}\int\limits_{\Delta}^{1}\frac{d\Delta'}{\Delta'\,(\Delta' - \Delta_{\text{кр}})^{3/7}}. \tag{7}$$

Если пересыщенность в основании облака значительно больше критической, то для большей части облака можно пользоваться приближенным выражением для $\Delta(\zeta)$:

$$\Delta(\zeta) = \left(1 + \frac{\zeta}{4/3\,(21/4)^{4/7}\,\varepsilon^{3/7}}\right)^{-7/3}. \tag{8}$$

Максимальный размер капель на данной высоте найдем из (4):

$$r_{\max}(\zeta) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\zeta}^{\zeta_{\text{кр}}}\Delta\,d\zeta\right]^{1/4} = \Phi^{1/4} = \frac{21}{4}\left(\frac{\Delta - \Delta_{\text{кр}}}{\varepsilon}\right)^{1/7}. \tag{9}$$

Наше приближение годится, как мы указывали выше, при условии $(R^0/\overline{R})^2 \simeq r_{\max(\zeta)}^{-2} \cong \varepsilon^{2/7} \ll 1$. Найдем, чему это соответствует. Для этого вычислим водность в основании облака (количество воды в 1 см^3):

$$\gamma_{\text{в}} = \frac{4\pi}{3}\,\rho_{\text{ж}}\int\limits_{0}^{\infty} fR^3\,dR = \frac{4}{15}\,\Delta_0\rho_{\text{п}}r_{\max}^5(0)\,\varepsilon \cong \Delta_0\rho_{\text{п}}\varepsilon^{2/7}.$$

Отсюда

$$\varepsilon^{2/7} \simeq \frac{\gamma_{\text{в}}}{\Delta_0\rho_{\text{п}}}. \tag{10}$$

Таким образом, наше приближение годится, когда избыточная вода в облаке находится главным образом в виде пара.

При достаточно большой пересыщенности, когда поведение облака в большей своей части не зависит от критического пересыщения, его можно считать равным нулю. В этом случае можно найти решение (5) и когда $\alpha(\Delta) = \Delta^k$, где $k > 0$.

Если $0 \leqslant k < 1$, то удобно пользоваться переменной $\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\zeta}^{\infty}\Delta\,d\zeta$. В случае $k \geqslant 1$ за новую переменную лучше выбрать $\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\int\Delta\,d\zeta$. В обоих случаях решение можно искать в виде $\Delta = A\Phi^{\beta}$.

В результате получим:

для $0 \leqslant k < 1$

$$\Delta(\zeta) = (\varepsilon C)^{\frac{1}{1-k}}\,\Phi(\zeta)^{\frac{7}{4}\frac{1}{1-k}}, \quad \Phi(\zeta) = r_{\max}^4(\zeta),$$

$$\Delta(\zeta) = \left(1 + \frac{[1 - 4/7\,(1-k)]\,C^{4/7}}{4/7\,(1-k)\,\varepsilon^{3/7}}\,\zeta\right)^{-\frac{1}{1-4/7\,(1-k)}},$$

$$f(r, \zeta) = \frac{R^0 n\,(\Delta_0)}{D\Delta_0}\,(\varepsilon C)^{\frac{k}{1-k}}\,r\,(r_{\max}^4(\zeta) - r^4)^{\frac{7}{4}\frac{k}{1-k}},$$

$$C = \frac{1-k}{7}\;\frac{\Gamma\left(\frac{3/4\,k+1}{1-k}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\,\frac{1}{1-k}\right)};$$

для $k = 1$

$$\Delta(\zeta) = e^{-\alpha\Phi}, \quad \alpha = \left[\frac{\varepsilon}{4}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^{4/7},$$

$$\Delta(\zeta) = \left(1 + \frac{\alpha}{\varepsilon}\,\zeta\right)^{-1},$$

$$f(r,\zeta)=\frac{R^0 n(\Delta_0)}{D\Delta_0}re^{-\alpha(r^4+\Phi(\zeta))}=\frac{R^0 n(\Delta_0)}{D\Delta_0}\frac{r}{1+\frac{\alpha}{\varepsilon}\zeta}e^{-\alpha r^4};$$

для $k>1$

$$\Delta=(\varepsilon p)^{-\frac{1}{k-1}}\Phi(\zeta)^{-\frac{7}{4}\frac{1}{k-1}},\quad p=\frac{k-1}{7}\frac{\Gamma\left(\frac{3/4+k}{k-1}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\frac{k}{k-1}\right)},$$

$$\Delta(\zeta)=\left(1+\frac{(4/7(k-1)+1)\,p^{4/7}}{4/7(k-1)\,\varepsilon^{3/7}}\zeta\right)^{-\frac{1}{1+4/7(k-1)}},$$

$$f(r,\zeta)=\frac{R^0 n(\Delta_0)}{D\Delta_0}(\varepsilon p)^{-\frac{k}{k-1}}r\left(r^4+\Phi(\zeta)\right)^{-\frac{7}{4}\frac{k}{k-1}}.$$

Применимость этих формул обеспечивается одним и тем же малым параметром

$$(R^0/\overline{R})^2\cong\varepsilon^{2/7}\cong\frac{\gamma_{\text{в}}}{\Delta_0\rho_{\text{п}}}\ll 1.$$

Полученные формулы применимы и к легким облакам, в которых можно пренебречь коагуляционным слиянием капель $\left(\text{это возможно при }\lambda_{\text{ст}}\sim\frac{1}{n\sigma}\sim\frac{\rho_{\text{ж}}\overline{R}}{\gamma_{\text{в}}}\gg L\right)$. В этом случае под Δ_0 нужно понимать пересыщенность в основании облака. Эта пересыщенность поддерживается за счет того, что капли, падающие через основание облака, попадают в ненасыщенную атмосферу и, испаряясь, в виде пара возвращаются обратно конвективным потоком воздуха, где пар поглощается растущими каплями. Сама же пересыщенность создается за счет какой-нибудь внешней причины (например, градиента температуры), приводящей к уменьшению равновесной концентрации с высотой.

Если не учитывать переходного слоя, то пересыщенность у основания облака меняется скачком. Таким образом, относительная пересыщенность $\frac{\Delta}{\Delta_0}$ будет $\left.\frac{\Delta}{\Delta_0}\right|_{\zeta\to+0}=1$; $\left.\frac{\Delta}{\Delta_0}\right|_{\zeta\to-0}=1-\rho$; $\rho=\frac{|C(T_1)-C(T_2)|}{\Delta_0}$.

Обычно $p\gg 1$. Поскольку скорость пропорциональна пересыщенности, то отношение размера переходной области к характерному размеру облака l/L будет $l/L\sim\frac{1}{p}\ll 1$.

В заключение отметим, что мы не учитывали градиента температуры, который создается в результате выделения тепла при конденсации пара. Это можно делать, если изменение температуры ΔT в облаке за счет конденсации пара значительно меньше $\delta T=T_1-T_2$ — скачка температуры в основании облака, так как в этом случае $\frac{d\Delta}{dz}\gg\frac{\partial\Delta}{\partial T}\nabla T$. Действительно, соответствующие оценки с привлечением уравнения конвективной теплопроводности дают

$$\frac{\Delta T}{\delta T}\cong\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}}\frac{q_0}{4\pi c_v T}C(T)\frac{q}{kT}\ll 1,$$

где q_0 — скрытая теплота конденсации пара; c_v — теплоемкость воздуха; $C(T)\cong e^{-q/kT}$ — равновесная концентрация пара.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступило 31 V 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Сборн. Новые идеи в области изучения аэрозолей, 1952.