

апрель 2026

**ФЛУКТУАЦИИ И КОГЕРЕНТНЫЕ ВИХРИ  
В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

**ИТФ им. Л.Д.ЛАНДАУ**

**Развитой турбулентностью называется сильно неравновесное состояние материи (сред, полей), при котором масштабы вброса и диссипации энергии экстремально разнесены**

## 1 Обратный каскад энергии в двумерной турбулентности

Рассмотрим турбулентность несжимаемой жидкости в двух измерениях. Очевидными физическими приложениями такой модели являются турбулентные состояния мыльных пленок и тонких слоев различных жидкостей. Однако самой важной ситуацией, где двумерная картина служит хорошим приближением, является крупномасштабная атмосферная турбулентность. Действительно, размеры циклонов и антициклонов, как правило, много больше толщины атмосферы и скорость ветра существенно меньше скорости звука, что оправдывает несжимаемость. Детальный анализ требует также учета вращения Земли, чем мы заниматься не будем, а рассмотрим идеальную ситуацию.

Оказывается, что свойства двумерной турбулентности качественно отличаются от трехмерного случая. Связано это с тем, что в отсутствие накачки и при пренебрежении диссипацией в двумерном уравнении Навье-Стокса (точнее, при описанных условиях - в

уравнении Эйлера) возникает дополнительный интеграл движения – интегральный квадрат завихренности, называемый также энстрофией. Завихренность  $\Omega$  определяется как ротор скорости, в двух измерениях являющийся скалярной величиной:

$$\Omega = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon_{\alpha\beta}$  – абсолютно антисимметричный двумерный тензор, и, как всегда, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Уравнение движения можно написать в терминах завихренности :

$$\partial_t \Omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega = \nu \Delta \Omega - \alpha \Omega + \phi, \quad (2)$$

Здесь  $\phi = \epsilon_{\beta\alpha} \partial_\beta f_\alpha(\mathbf{x}, t)$  – эффективная накачка для завихренности  $\Omega$  и добавлено (в сравнении с трехмерным случаем) диссипативное слагаемое  $\alpha \Omega$ , описывающее трение о дно. Оно получается из уравнения Навье-Стокса (с диссипацией и накачкой) (выпишем

покомпонентно):

$$\partial_t u_\beta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\beta = \nu \Delta u_\beta - \partial_\beta P + f_\beta(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

действием на обе части оператором  $\epsilon_{\beta\alpha} \partial_\beta$ . Из двумерного тождества

$$\partial_\alpha v_\beta - \partial_\beta v_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \Omega,$$

и несжимаемости следует соотношение:

$$\epsilon_{\mu\lambda} \partial_\mu v_\alpha \partial_\alpha v_\lambda = 0.$$

Действие оператора  $\epsilon_{\beta\alpha} \partial_\beta$ , таким образом, приводит к уравнению (2). Вязкость  $\nu$  и трение  $\alpha$  по-прежнему малы. Введем в игру еще размер системы  $L$ . Длина  $l_f = k_f^{-1}$  корреляции хаотической накачки  $\phi(\mathbf{r}, t)$  предполагается малой в сравнении с  $L$  (заметим, что в трех измерениях в этом случае размер  $L$  никак себя не проявлял, но сейчас это не так - см. ниже). Скорость восстанавливается по завихренности:

$$u_\mu = \epsilon_{\mu\beta} \frac{\partial_\beta}{\Delta} \Omega$$

Рассмотрим сначала масштабы  $r$  меньшие, чем масштаб накачки  $l_f$ , но большие, чем вязкий масштаб  $r_\nu \ll l_f$  (он не совпадает с колмогоровским масштабом  $\eta$  из предыдущего раздела; сейчас важно, что он убывает вместе с вязкостью – точное определение получим ниже). Тогда накачкой и вязкостью в уравнении эволюции завихренности (2) можно пренебречь, и оно вырождается в уравнение переноса:

$$\partial_t \Omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega = 0. \quad (4)$$

Это уравнение сохраняет интегралы по пространству от степеней завихренности, в частности, энстрофию  $H$ :

$$H = \int d^2 \mathbf{x} \Omega^2. \quad (5)$$

Физически это означает, что флуктуация с характерной (среднеквадратичной) завихренностью  $\bar{\omega}$ , созданная накачкой, изменяет свою форму, но не амплитуду. Если размер уменьшился до мас-

штаба  $r$  (сохранение площади означат, что начальное пятно вытянулось в одном направлении и сжалось в другом до размера  $r$ ), то сохранение завихренности приводит к тому, что на этом масштабе среднеквадратичная амплитуда флуктуации скорости  $\delta u(r) \sim r\bar{\omega}$ . Но это означает, что энергия флуктуаций уменьшается с их масштабом. Вязкий масштаб  $r_\nu$  определяется балансом переносного и вязкого членов в уравнении эволюции для завихренности (2):  $(\mathbf{u}_\nu \cdot \nabla)\Omega \sim \nu\Delta\Omega$ , где  $u_\nu \sim r_\nu\bar{\omega}$  – характерная флуктуация скорости на масштабе  $r_\nu$ , а  $\bar{\omega} \sim (\epsilon/l_f^2)^{1/3}$  – среднеквадратичная завихренность, создаваемая накачкой ( $\epsilon$  здесь – это энергия, вкачиваемая в систему в единицу времени на единицу массы). В итоге получаем оценку для вязкого масштаба  $r_\nu$ :

$$r_\nu \sim \sqrt{\nu/\bar{\omega}}. \quad (6)$$

Диссипация происходит на вязком масштабе. Энергия, диссипируемая в единицу времени на единицу массы, оценивается, как обычно:  $\epsilon_d \sim \nu u_\nu^2/r_\nu^2 \sim \nu\bar{\omega}^2 \ll \epsilon \sim \bar{\omega}^3 l_f^2$ . Последнее неравенство является

прямым следствием предположения  $r_\nu \ll l_f$ ; в противном случае вся вкачиваемая на масштабе  $l_f$  энергия на нем бы и диссипировала и никакой развитой турбулентности не возбуждалось бы.

Таким образом, естественное предположение о прямом (с больших масштабов на малые) каскаде завихренности (более формально, энстрофии) приводит к утверждению, что диссипируется ничтожная часть вкачиваемой в систему энергии. Прямой же каскад энергии, очевидно, противоречит сохранению энстрофии в области применимости уравнения (4). Возникает вопрос – что происходит с энергией? В 1968 году Р.Крайчнан предположил, что для энергии имеет место обратный каскад, а именно, в пределе бесконечного размера системы энергия переходит к флуктуациям все больших и больших масштабов. Если нет дополнительных каналов диссипации, то система будет пребывать в существенно нестационарном состоянии. Стационар наступит, если имеется, например, трение о дно.

Ничтожность вязкой диссипации означает, что в стационарном

состоянии, определяемом таким уравнением, среднеквадратичная амплитуда флуктуации скорости дается простым соотношением:

$$\langle v^2 \rangle = \epsilon / \alpha. \quad (7)$$

Если трение достаточно мало:  $\alpha \ll \bar{\omega}$  (что тоже условие возбуждения развитой турбулентности), то можно сказать, что система накапливает энергию на временах  $1/\alpha$ . Характерный масштаб  $L_\alpha$  получившихся стационарных флуктуаций равен произведению характерной скорости из (7) на это время:

$$L_\alpha = \sqrt{\epsilon / \alpha^3} \gg l_f. \quad (8)$$

Роль инерционного интервала для обратного каскада играют масштабы  $l_f \ll r \ll L_\alpha$ .

## 2 Когерентные вихри, порождаемые обратным каскадом в ограниченной системе

Теперь пусть размер системы  $L$  меньше, чем масштаб обратного каскада  $L_\alpha$ :  $L \ll L_\alpha$ . В этом случае флуктуации достигнут предельного размера раньше, чем остановится перекачка энергии. Недавние численные и натурные эксперименты показали, что в конце концов из хаотических флуктуаций могут возникнуть когерентные вихри, причем средний профиль скорости оказывается возможным определить аналитически. *Могут и не возникнуть. На это, как увидим ниже, влияет тонкая игра диссипаций.*

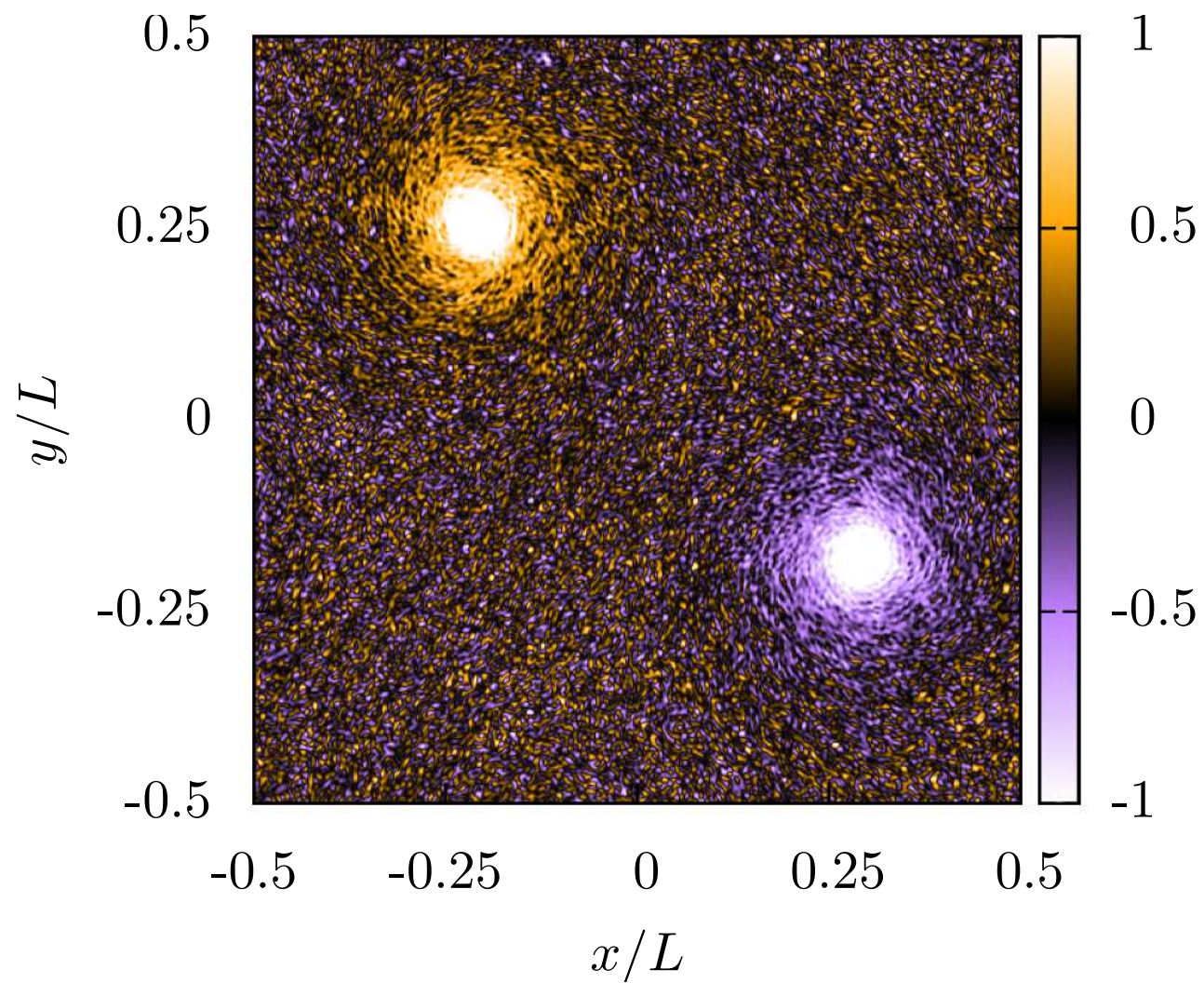


Рис. 1: Vortex dipole

Мы будем сразу изучать накачку, имеющую конечное время корреляции (оказывается, это проясняет некоторую часть физики явления). В этом случае ее коррелятор не обладает галилеевской инвариантностью. А эти вихри, вообще говоря, двигаются как целое (и это может оказаться важным!-см. ниже). Поэтому корреляционную функцию накачки мы задаем сразу в системе покоя этих вихрей – сразу через фурье-представление:

$$\langle \phi(t, \mathbf{r}) \phi(0, \mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} k^2 F(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (9)$$

Так вот,  $l_f$  и  $k_f$  – характерный масштаб  $k$ -зависимости функции  $F(\omega, \mathbf{k})$ . Характерная частотная ширина  $\Delta_\omega$  этой функции и время корреляции  $\tau_c$  связаны очевидным соотношением:  $\Delta_\omega \sim 1/\tau_c$ . Наиболее часто изучаемому случаю короткокоррелированной во времени накачки соответствует спектральная плотность, не зависящая от частоты  $F(\omega, \mathbf{k}) = \chi(\mathbf{k})$ .

Уравнение на профиль вихря  $U(\mathbf{r})$  (круглой его части; букваль-

но - на нулевую угловую гармонику) следует из уравнения Навье-Стокса

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

после разделения скорости на среднюю (вихрь) и флуктуации:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$$

Амплитуда конденсата (просто из закона сохранения энергии и представления, что вся энергия в нем):

$$U \sim \sqrt{\frac{\epsilon}{\alpha}}$$

Это уравнение имеет вид:

$$\alpha U = - \left( \partial_r + \frac{2}{r} \right) \Pi(r). \quad (11)$$

$$\Pi(r) = \langle v_\varphi v_r \rangle - \nu \Sigma(r), \quad \Sigma(r) = U' - \frac{U}{r}, \quad (12)$$

где вся научная составляющая сосредоточена в корреляторе  $\langle v_\varphi v_r \rangle$ .

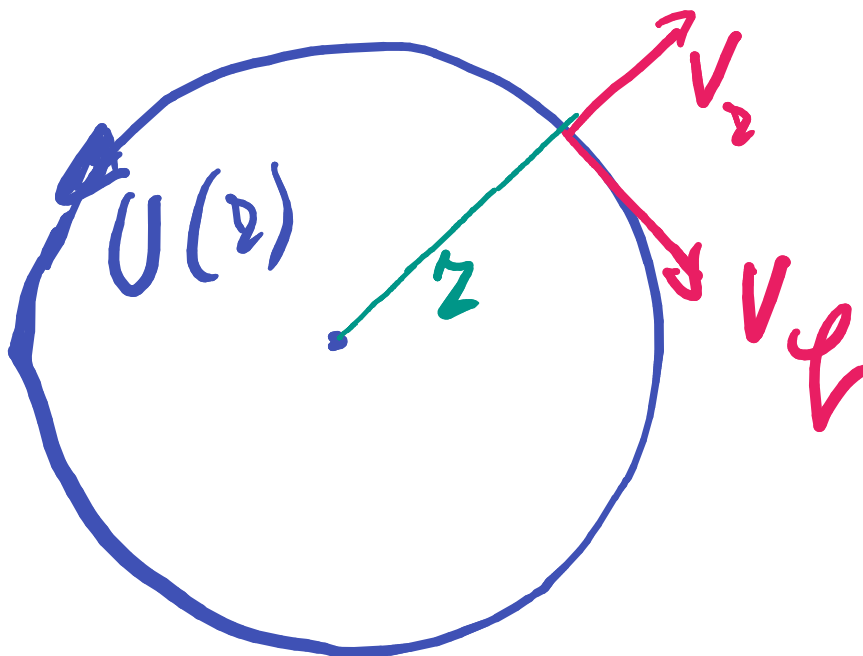


Рис. 2: круглый вихрь

При достаточно малом  $\alpha$  перенос вихрем (дифференциальное вращение) доминирует над самодействием флуктуаций и их можно вычислять исходя из линеаризованного уравнения эволюции. Кроме того, вихрь большой, то есть, много больше размера накачки (иначе бы это был не вихрь). Это означает, что в теле вихря имеется малый параметр

$$l_f/r \ll 1$$

Флуктуации скорости восстанавливаем по флуктуационной завихренности  $\varpi$ . Малый в сравнении с радиусом масштаб накачки позволяет использовать сдвиговое приближение, представив в окрестности данного радиуса  $R$  (фиксирован) радиальную координату как  $r = R + x_1$  и как вторую координату  $x_2 = R\varphi$ :

$$\partial_t \varpi + U \partial_2 \varpi + x_1 \Sigma \partial_2 \varpi - (\nu \nabla^2 - \alpha) \varpi = \phi, \quad (13)$$

$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$  и  $U, \Sigma = r \partial_r (U/r)$  взяты в точке  $r = R$ . Кроме сдвигового параметра  $\Sigma$  в игру вступает перенос самой скоростью  $U$ . Уравнение для флуктуаций решается переходом к волновым век-

торам  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ :

$$\partial_t \varpi(\mathbf{k}) + ik_2 U \varpi(\mathbf{k}) - \Sigma k_2 \frac{\partial \varpi(\mathbf{k})}{\partial k_1} + \Gamma \varpi(\mathbf{k}) = \phi, \quad (14)$$

$\Gamma = \nu k^2 + \alpha$  Возможность использовать простое Фурье-преобразование радикально упрощает обращение лапласиана при восстановлении скоростей по завихренности:

$$v_\mu(\mathbf{k}) = -i \frac{\epsilon_{\mu\beta} k_\beta}{k^2} \varpi_{\mathbf{k}}$$

Явный вид «аномального среднего»

$\Pi = \langle v_r v_\varphi \rangle$  для  $k_f R = R/l_f \gg 1$  устроено так, что в нем

чудесным образом сам возникает частотный Фурье-образ коррелятора накачки:

$$\begin{aligned} \Pi = & - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \mathbf{q}^2 F(q_2 U, q) \\ & \times \int_0^\infty d\tau \frac{q_2(q_1 - \tau \Sigma q_2)}{[(q_1 - \tau \Sigma q_2)^2 + q_2^2]^2} \tilde{W}^2(\tau, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\ln \tilde{W}(t, \mathbf{q}) = -\alpha\tau - \nu q^2 \tau + \nu \Sigma \tau^2 q_1 q_2 - \nu \Sigma^2 q_2^2 \tau^3 / 3. \quad (16)$$

Имеется следующее замечательное соотношение:

$$\frac{q_2(q_1 - \tau \Sigma q_2)}{[(q_1 - \tau \Sigma q_2)^2 + q_2^2]^2} = \frac{1}{\Sigma} \partial_\tau \frac{1}{[(q_1 - \tau \Sigma q_2)^2 + q_2^2]}. \quad (17)$$

Интегрирование по частям приводит к представлению:

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_\nu, \quad (18)$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{2\Sigma} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} F(q_2U, q). \quad (19)$$

$$\Pi_\nu = -\frac{\nu}{\Sigma} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \mathbf{q}^2 F(q_2U, q) \tilde{W}^2. \quad (20)$$

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2\Sigma} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{\alpha}{\alpha + \nu q^2/3} F(0, q), \quad (21)$$

Условие существования самой турбулентности эквивалентно  $\nu k_f^2 \ll \Sigma$ ,  $\Pi_\nu$  оказывается  $\propto (\nu k_f^2/\Sigma)^{1/3}$  и его можно выбросить.

Если трение  $\alpha$  мало в сравнении с вязкой релаксацией на масштабе накачки  $\nu k_f^2$ , то доминирует  $\Pi_0$  – напомним –

$$\Pi_0 = \frac{1}{2\Sigma} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} F(q_2 U, q), \quad (22)$$

которое говорит нам, что флуктуации передают свою энергию среднему течению, если в их спектре (или, что то же, в спектре накачки) есть частоты, удовлетворяющие резонансному условию Ландау:

$$\omega = \mathbf{q}\mathbf{U} \quad (23)$$

Но это именно *антизатухание Ландау*.

Если накачка в лабораторной системе статическая (как в настоящих экспериментах), то вихрю, чтобы существовать, нужно двигаться: корреляции по времени в системе покоя вихря станут конечными:

$$\langle \phi_{lf}(t, \mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \phi_{lf}(0, 0) \rangle,$$

Имеется явная демонстрация этого в натурном эксперименте.

Если же оказалось, что трение  $\alpha$  одного порядка с вязкой релаксацией на масштабе накачки  $\nu k_f^2$  (как в экспериментах с тонким слоем жидкости и несмазанным дном), то возникает отрицательный вклад  $\Pi_1$  того же порядка, что и  $\Pi_0$ . Он уменьшает амплитуду вихря, и есть критическое отношение диссипаций, когда вихрь пропадает, поскольку при  $\alpha \gg \nu k_f^2$ :

$$\Pi \approx \frac{1}{2\Sigma} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} [F(q_2 U, q) - F(0, q)].$$

что для любой разумной накачки - отрицательная величина. Такой переход наблюдался в натурном эксперименте

Ну а если вихрь есть, то он имеет плоский профиль вдали от вязкого кора. В короткокоррелированном по времени пределе явное выражение имеет простой вид

$$U(r) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\alpha}} \quad (24)$$

в области вязкого кора:

$$U \rightarrow r \ln(Cr)$$

### 3 Нелинейные эффекты

Вообще-то полные уравнения эволюции нелинейны.

$$\partial_t \varpi + \mathbf{v} \nabla \varpi + \Sigma x_2 \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = -\alpha \varpi + \nu \nabla^2 \varpi + \phi, \quad (25)$$

Поэтому флуктуации, даже если их амплитуда относительно мала, взаимодействуют между собой. На фоне сильного сдвигового течения это взаимодействие можно учесть по теории возмущений. Самым ярким эффектом нелинейности флуктуаций является возникновение третьего момента завихренности. В ведущем порядке теории возмущений оказалось возможным получить простое замкнутое выражение:

$$\langle \varpi^3 \rangle = -\frac{6\pi\epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^2 \nu} c_2 \ln \frac{\Sigma}{\nu k_f^2}, \quad (26)$$

Численный множитель  $c_2 \approx 0.187$ . Здесь  $\Sigma > 0$ , в общем случае нужно умножить на  $sign \Sigma$ .