Лекция 1.

Квазичастицы в кристалле и в сверхтекучей жидкости

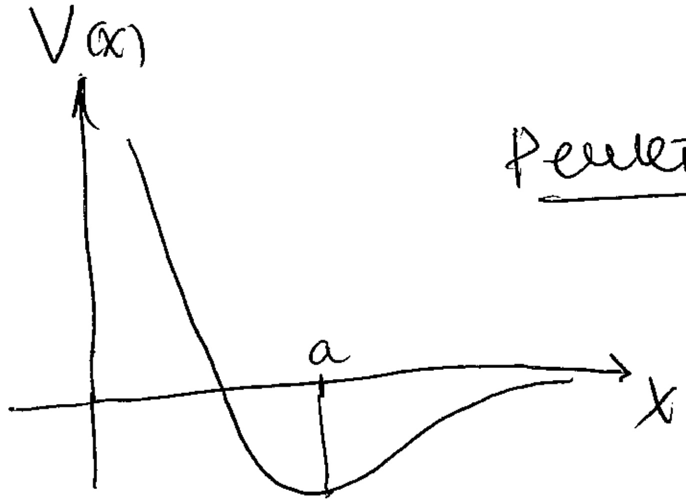
① Общая постановка задачи: как избавиться от сильных взаимодействий, т.е. найти „правильные" переменные, в которых многочастичная задача превращается в набор одночастичных?

"Математическая" постановка того же вопроса: как выполнить разделение переменных в функциональном интеграле, который описывает нашу квантовую систему?

② Фононы в кристалле

$$\hat{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{(ij)} V(x_i - x_j)$$

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$$ — импульс i-ой частицы



Решетка: $x_i = x_i^{(0)} + u_i$

$x_i^{(0)} = i \cdot a$

u_i - отклонение координаты i-ого атома от положения в регулярной р-ке.

Потенциальная энергия решетки:

$$U_{pot} = N V(a) + \frac{1}{2} \sum_{(ij)} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{x=a}}_{\varkappa} (u_i - u_j)^2 + O(u^3)$$

Разложим смещения u_j в ряд Фурье:

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k Q_k e^{ikaj}$$ $Q_{-k} = Q_k^*$ N - число узлов

$$\hat{p}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k P_k e^{ikaj}$$ P_k - обобщенные импульсы для Q_k

$$[P_k, Q_{k'}] = -i\hbar\, \delta_{k,k'}$$

В гармоническом приближении:

$$\hat{H}_{harm} = \frac{1}{2m} \sum_k \hat{P}_k \hat{P}_{-k} + \frac{\varkappa}{2} \sum_k 2(1-\cos ka) Q_k Q_{-k}$$

Получили набор осцилляторов, по одному на каждый $(k, -k)$

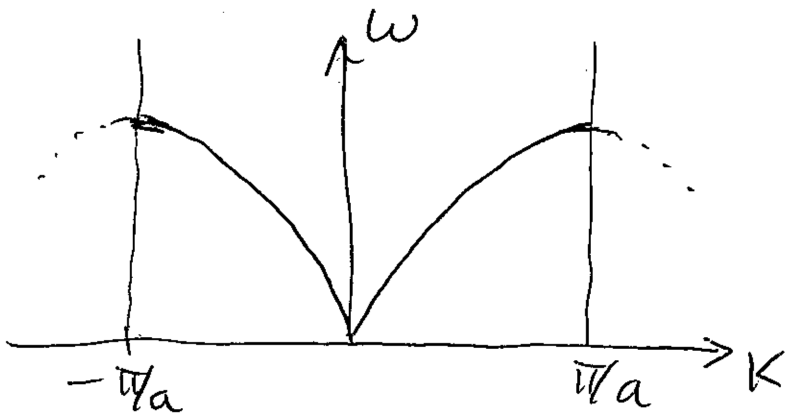
Находим частоты:

$$\boxed{\omega_k^2 = \frac{2\varkappa}{m}(1-\cos ka)} \xrightarrow[ka\ll 1]{} \frac{\varkappa a^2}{m}k^2$$

Получим звуковой спектр $\boxed{\omega_k = s k}$

$$s = a\sqrt{\varkappa/m}$$

Элементарные возбуждения — фононы



$|k| \le \pi/a$ — зона Бриллюэна

Далее спектр продолжается периодически.

Волновые вектора k и $k+\frac{2\pi}{a}$ физически эквивалентны т.к. приводят к одинаковым u_j.

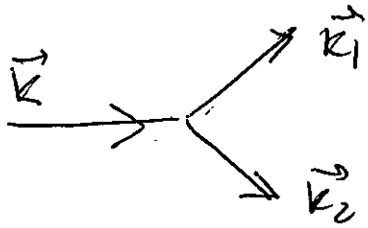
Замечание о квантовой статистике:

фононы — всегда бозоны, независимо от статистики атомов решётки. Это простейший пример „трансмутации статистики"

Роль негармонических членов

1) они малы, пока $\langle u^2 \rangle \ll a^2$

2) при "нераспадном" спектре $\omega_k = sk - \gamma k^3$ $(\gamma > 0)$ нелинейность не приводит к распаду фонона $1 \to 2$



не идет, т.к. нельзя выполнить законы сохранения энергии и импульса вместе

Если бы оказалось, что

$$\omega_k = sk + \gamma k^3 \quad (\gamma > 0)$$

то фононы имели бы конечное время жизни τ_k

Задача: Найти его!

3) Сверхтекучая жидкость

Колебания плотности (массы) $\delta\rho(\vec r)$ и скорости $\vec v(\vec r)$ в сверхтекучей жидкости составляют ее „элементарные возбуждения", подобные фононам в решетке.

Выведем зависимость $\omega(k)$

1) $\dot\rho + \vec\nabla(\rho\vec v) = 0$ уравнение непрерывности

$$\rho(r) = \bar\rho + \delta\rho \quad (\delta\rho \ll \bar\rho)$$

2) колебания скорости чисто продольные

$$\vec v_{\vec p} = \frac{\vec p}{p} v_{\vec p}$$

это свойство именно сверхтекучей жидкости

3) Гамильтониан в квадратичном приб-нии:

$$\hat H^{(2)} = \frac{\bar\rho}{2}\int \vec v^{\,2} d^3r + \frac{1}{2}\iint \varphi(\vec r - \vec r\,')\,\delta\rho(\vec r)\,\delta\rho(\vec r\,')\,d\vec r\,d\vec r\,'$$

кинетическая энергия — потенциальная энергия

Выразим $\vec{v}_{\vec{p}}$ (компонента Фурье скорости) через $\rho_{\vec{p}}$ при помощи 1) + 2):

$$\vec{v}_p = -i \frac{\vec{p}}{\bar{\rho}\, p^2} \dot{\rho}_p$$

$\boxed{\vec{p} - \text{импульс}}$

и запишем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \left[\frac{|\dot{\rho}_p|^2}{2\bar{\rho}\, p^2} - \frac{\varphi_{\vec{p}}}{2} |\rho_{\vec{p}}|^2 \right] \quad (\text{II})$$

объем

Здесь $\varphi_{\vec{p}}$ – Фурье комп. $\varphi(\vec{r}-\vec{r}')$

$\rho_{\vec{p}}$ – координата осциллятора с импульсом $\vec{p}$.

Его частота $\boxed{\omega_{\vec{p}} = p\sqrt{\bar{\rho}\, \varphi_p}}$ (*)

При $p \to 0$ φ_p стремится к $\partial^2 E / \partial \rho^2$ – т.е. сжимаемость

$\varphi_{p=0} = \text{const} \cancel{\neq} 0$ для локальных взаимодействий

Поэтому $\boxed{\omega_{\vec{p}} = s p}$ $\quad s = \sqrt{\varphi_{p=0}\, \bar{\rho}}$

фононы

Спектр для произвольных $\vec{p}$ и „структурный фактор" $S(\vec{p})$

$\rho(\vec{r}) = m\,n(\vec{r})$ $\qquad n(\vec{r})$ – плотность частиц

Корреляции плотности частиц:

$$S(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\langle \delta n(\vec{r})\, \delta n(\vec{r}\,')\rangle}{\bar{n}}$$

$n(\vec{r}) = \sum\limits_j \delta(\vec{r}-\vec{r}_j)$ – сумма по частицам

$$S(\vec{R}) = \delta(\vec{R}) + \nu(\vec{R})$$

$\nu(\vec{R})$ – регулярная функция

$\delta(\vec{R})$ – это от членов вида $\sum\limits_j \delta(\vec{r}-\vec{r}_j)\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_j)$

Преобразование Фурье от $S(\vec{R})$ есть $S(\vec{p}) = \dfrac{1}{m\bar{\rho}}\langle|\rho_{\vec{p}}|^2\rangle$

Это среднеквадратичная флуктуация „координаты осциллятора" $\rho_{\vec{p}}$ при нулевых колебаниях.

Осциллятор задан Лагранжианом (II) на стр 6

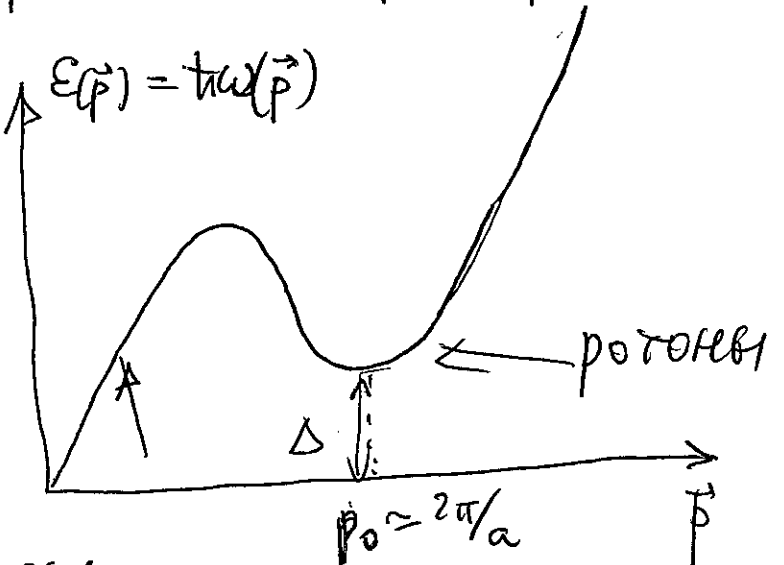
$$\langle |\rho_{\vec p}|^2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varphi_{\vec p}}}\,|\vec p|$$ — для осциллятора

Используя (*) и связь $S(\vec p) = \frac{1}{m\rho}\langle|\rho_{\vec p}|^2\rangle$

Находим $$\boxed{\hbar\omega_p = \frac{p^2}{2m S(\vec p)}}$$

$S(\vec p)\sim p$ при $p\to 0$ $\quad\omega_p \to sp$

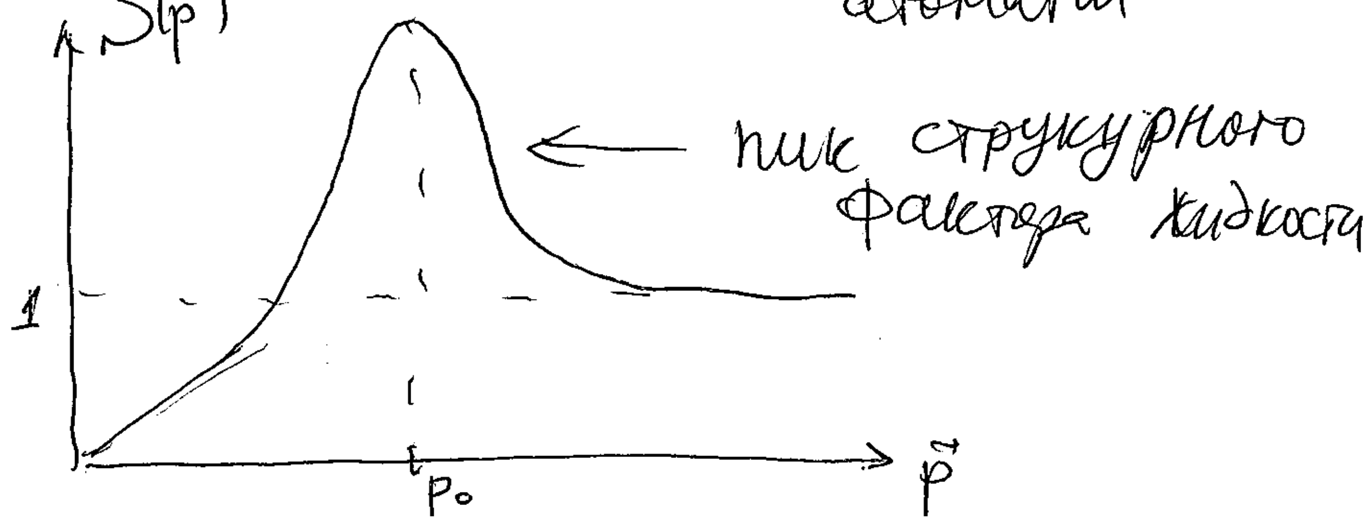
$S(\vec p)\to 1$ при $p\to\infty$ $\quad\omega_p\to p^2/2m$



фононы

$\varepsilon = \hbar s\cdot p$

a — ~~среднее~~ расстояние между ближайшими атомами



Теплоемкость ^4He при низких температурах:

Числа заполнения $f(\vec{p}) = \dfrac{1}{e^{\hbar s p/T} - 1}$

$$E(T) = V \int \hbar s p \, f(\vec{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = V \frac{\pi^2 T^4}{30 (\hbar s)^3}$$

$$\frac{dE}{dT} = C(T) \leftarrow \text{теплоемкость}$$

$$\boxed{\frac{C(T)}{V} = \frac{2\pi^2}{15} \frac{T^3}{(\hbar s)^3}}$$

Теплоемкость ^4He на единицу объема

Неплохо описывает экспер. данные при $T \lesssim 0.6\ K$

При больших T надо учитывать вклад ротонов

$$\varepsilon(p) = \Delta + \frac{(|\vec{p}| - p_0)^2}{2\mu}$$

$\frac{p_0}{\hbar} \simeq 2 \cdot 10^{8}\ cm^{-1}$

$\Delta \simeq 8.6\ K$

$\mu \simeq m_{He}/4$

Критерий сверхтекучести $\min\limits_{p \to 0} \left(\frac{\varepsilon(p)}{p} \right) > 0$

Условие устойчивости относительно рождения возбуждений:

$$E = \varepsilon + \vec{p}\vec{V} + \frac{MV^2}{2} > \frac{MV^2}{2}$$

$$V > \varepsilon/p \Rightarrow V_c = \min\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)$$

Задачи к лекции 1

① Пусть спектр фононов $\omega(q) = sq + \gamma q^3$ $(\gamma > 0)$
Найти скорость распада фонона $\gamma(\omega)$ как функцию его частоты ω (малые q, ω)

② Рассмотреть Бозе-жидкость из частиц взаимодействующих по закону Кулона $U(r) = e^2/r$
а) в объеме б) на поверхности тв. тела
Найти $\omega(q)$ при малых q в обоих случаях, аналогично выводу формулы $\omega(q) = sq$ для обычного Бозе-газа

③ Вычислить ротонный и фононный вклады в теплоемкость сверхтекучего ^4He и выяснить, при какой T ротонный становится больше фононного.