

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем

В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов

Рассматриваются два альтернативных сценария эволюции нелинейных волновых систем: солитоны и волновые коллапсы. Для первого сценария достаточно, чтобы гамильтониан был ограничен снизу (сверху), и тогда солитон, реализующий его минимум (максимум), будет устойчивым (по Ляпунову). Приход к такому экстремуму осуществляется за счёт излучения волн малой амплитуды — процесса, отсутствующего в системах с конечным числом степеней свободы. На примере нелинейного уравнения Шрёдингера и системы трёх волн показано, как, используя метод интегральных оценок, основанный на теоремах вложения Соболева, можно строго доказать ограниченность гамильтонианов и соответственно устойчивость солитонов, реализующих минимум. В случае неограниченности гамильтонианов снизу в волновых системах должен реализовываться коллапс, который можно рассматривать как процесс падения некоторой частицы в неограниченном потенциале. Излучение волн малой амплитуды в этом случае способствует коллапсу.

PACS numbers: 42.65.Jx, 42.65.Tg, 47.35.Fg, 47.35.Jk, 52.35.Sb

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201206a.0569

Содержание

1. Введение (569).
2. Основные уравнения (571).
 - 2.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера. 2.2. Гамильтонова структура. 2.3. Система трёх волн и её редукции.
3. Устойчивость по Ляпунову для скалярных моделей (574).
 - 3.1. Устойчивость солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера. 3.2. Устойчивость по Ляпунову для анизотропного уравнения Кортевега – де Вриза.
4. Солитоны в системе трёх волн (577).
 - 4.1. Нелинейная устойчивость солитонов в системе трёх волн.
5. Линейная устойчивость (579).
 - 5.1. Линейная устойчивость одномерных солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера. 5.2. Устойчивость солитонов для взаимодействия первой и второй гармоник.
6. Волновые коллапсы (581).
 - 6.1. О роли излучения. 6.2. Теорема вириала. 6.3. Сильный коллапс. 6.4. Коллапс в пограничном слое. 6.5. Слабый коллапс. 6.6. Режим чёрной дыры.
7. Роль дисперсии в коллапсе (586).

В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация; Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Академгородок, 630090 Новосибирск, Российская Федерация
Тел. (499) 132-67-51, (495) 334-05-33. Факс (495) 938-20-77
E-mail: zakharov@itp.ac.ru, kuznetsov@itp.ac.ru

Статья поступила 14 июля 2011 г.

8. Коллапс в уравнениях типа уравнений Кадомцева – Петвиашвили (587).

- 8.1. Вириальные неравенства.

9. Заключение (590).

Список литературы (590).

1. Введение

Основная цель настоящего обзора — продемонстрировать на основе гамильтонова подхода разницу между двумя главными нелинейными волновыми явлениями: солитонами, или уединёнными волнами, и волновым коллапсом — процессом, при котором за конечное время возникает особенность волнового поля. Тип особенности зависит от физической модели. Например, при опрокидывании волн звукового типа происходит образование резких градиентов (градиентная катастрофа) или, как говорят математики, возникает складка [1, 2]. При самофокусировке света — другом примере волнового коллапса — интенсивность света при приближении к фокусу становится аномально большой. Для волн на воде сингулярности поверхности имеют вид угла. В этом случае вторая производная от профиля поверхности оказывается бесконечной.

Коллапсы играют значительную роль в различных областях физики, не только в нелинейной оптике и гидродинамике, но и в физике плазмы, физике атмосферы и океана, физике твёрдого тела. Коллапс как процесс возникновения особенности за конечное время во многих физических системах представляет собой один из наиболее эффективных механизмов диссипации волновой энергии в тепло. Например, коллапс плазменных волн определяет эффективность различных коллективных методов нагрева плазмы для задач управляемого

термоядерного синтеза. В нелинейной оптике этот процесс останавливается вследствие многофотонного поглощения для умеренных интенсивностей, а для больших амплитуд — в результате ионизации атомов. Поэтому коллапс в нелинейной оптике может быть использован для исследования взаимодействия света с веществом в широком диапазоне интенсивностей, включая процессы ионизации сильными электромагнитными полями и формирования пучков релятивистских частиц. Другая возможность в оптических системах — использование коллапсов для получения сверхкоротких импульсов — давно обсуждается, но пока остаётся нереализованной в эксперименте.

Говоря о солитонах, мы подразумеваем, во-первых, что время их жизни, определяемое затуханием, достаточно велико, так что динамику солитонов, например при их взаимодействии друг с другом, можно считать гамильтоновой, что и будет предполагаться практически всюду в обзоре. Во-вторых, существование солитонов предполагает их устойчивость. Мы рассмотрим два подхода к исследованию устойчивости солитонов: исследование устойчивости в малом, т.е. на основе линеаризованных уравнений и последующего анализа линейных спектральных задач, и решение задачи об устойчивости на основе метода Ляпунова — наиболее продуктивного метода, позволяющего установить факт устойчивости не только относительно малых, но и конечных возмущений. Согласно теореме Ляпунова, солитон будет устойчивым, если он реализует минимум (или максимум) гамильтониана.

Впервые наиболее полно проблема устойчивости солитонов обсуждалась нами в соавторстве с А.М. Рубенчиком в обзоре [3], опубликованном более двадцати пяти лет назад. С тех пор в исследовании устойчивости солитонов многое изменилось, особенно это касается использования интегральных мажорирующих неравенств, следующих из теорем вложения Соболева. Ранее в обзорах подробным образом не обсуждался вопрос о роли неустойчивых солитонов в процессе формирования особенности — волновом коллапсе. Мы покажем, что волновой коллапс происходит в основном в системах с неограниченными гамильтонианами и он может быть интерпретирован как процесс падения частицы в неограниченном потенциале. В этом случае солитон представляет собой седловую точку, перевалив которую система переходит в режим волнового коллапса.

В основном в данном обзоре речь пойдёт о двух моделях: нелинейном уравнении Шрёдингера (НУШ) и системе трёх волн. Эти модели имеют множество приложений в оптике, физике плазмы, гидродинамике и пр. (см., например, обзор [4]). НУШ принадлежит к классу универсальных моделей, оно может быть выведено для описания распространения волновых пакетов в слабонелинейной среде в случае, когда взаимодействие с низкочастотными (НЧ) волнами звукового типа не существенно. Например, хорошо известно [5, 6], что распространение оптических солитонов в световолокнах с хорошей точностью может быть описано одномерным НУШ. Двумерное НУШ описывает стационарную самофокусировку света в средах с керровской нелинейностью. Универсальность НУШ проявляется, в частности, в универсальности методов исследования устойчивости солитонов (см., например, обзор [3]).

Система трёх волн описывает солитоны в средах с квадратичной нелинейностью, называемых в оптике $\chi^{(2)}$ -средами. Эта система записывается для амплитуд трёх волновых пакетов, связанных квадратичной нелинейностью. В частном случае эта система описывает взаимодействие первой и второй гармоник. Когда разность в групповых скоростях трёх пакетов достаточно велика, эта система переходит в уравнения Бломбергена [7], которые могут быть проинтегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния [8]. Для близких групповых скоростей, что типично для нелинейной оптики, необходимо учитывать как дисперсионный, так и дифракционный члены [9–11]. Модель в этом случае представляет собой векторную систему типа НУШ, но с квадратичной нелинейностью.

Солитоны для обеих систем существуют как результат баланса нелинейного взаимодействия и дисперсионных эффектов. Солитонные решения для этих двух систем представляют собой стационарные точки гамильтониана при фиксированных других интегралах движения, таких как импульс, число частиц или интегралы Менли–Роу. То есть речь идёт об условном экстремуме. Это очень важное обстоятельство. Если бы это было не так, например, солитону отвечала бы стационарная точка только одного гамильтониана, то в этом случае такая стационарная точка была бы неустойчивой для систем с неограниченными снизу гамильтонианами (т.е. в отсутствие вакуума). Последнее утверждение является основной частью аргументов Деррика [12]. К счастью, солитоны как стационарные точки гамильтониана представляют собой его *условные* экстремумы, что позволяет исследовать их устойчивость, используя теорему Ляпунова. В этом случае для доказательства устойчивости солитона достаточно показать ограниченность гамильтониана (при фиксированных других интегралах движения). Очевидно, что солитон, реализующий минимум (или максимум) данного гамильтониана, будет устойчивым — устойчивым по Ляпунову. Впервые такой подход был применён к солитонам Кортевега–де Вриза (КдВ) Бенжаминном (1972 г.) [13], а впоследствии — к трёхмерным ионнозвуковым солитонам в сильно замагниченной плазме (1974 г.) авторами данного обзора [14]. Сейчас это один из самых мощных методов исследования устойчивости солитонов.

Необходимо отметить, что часто доказательство устойчивости по Ляпунову оказывается более простой задачей, чем задача линейной устойчивости. В последнем случае необходимо установить полноту всех собственных функций линеаризованных уравнений, что является чрезвычайно трудной задачей. В настоящем обзоре мы уделим особое внимание теоремам вложения и покажем, как с их помощью можно получить интегральные оценки, используемые потом для доказательства ограниченности гамильтонианов.

Когда гамильтониан ограничен и солитон реализует соответствующий экстремум, можно говорить об энергетическом принципе. Солитон, реализующий минимум, будет выступать в качестве аттрактора. В частности, при столкновении двух таких солитонов будет энергетически выгодным образование одного более мощного солитона с наименьшей энергией. Но при таком слиянии должны сохраняться не только энергия, но и другие интегралы, например число частиц. Это возможно только в исключительных случаях, например для интегрируемых моде-

лей. Для неинтегрируемых систем имеет место неупругое рассеяние, в результате которого формируется солитон большей амплитуды. Этот процесс сопровождается излучением волн несолитонного сектора, которые вдали от рассеяния благодаря дисперсии превращаются в линейные волны. Излучение здесь играет роль трения, обеспечивая образование более мощного солитона. При многократном рассеянии в таких системах выживают солитоны с большой амплитудой, которые находятся в равновесии с излучением — линейными волнами. Солитоны при этом представляют собой своеобразные капли, названные В.В. Янковым [15, 16] статистическими аттракторами, для которых излучение играет роль пара.

Если гамильтониан неограничен, то его неограниченность указывает на то, что солитоны должны представлять собой седловые точки гамильтониана, будучи неустойчивыми образованиями. В этом случае поведение системы не может быть стационарным. Возможны два варианта: либо система за счёт дисперсии стремится к полному расплыванию, когда на больших временах нелинейное взаимодействие является несущественным и волны становятся линейными, либо система коллапсирует, в результате чего происходит формирование особенности поля. Последний процесс можно рассматривать в качестве аналога падения частицы на центр в неограниченном потенциале. Исходя из факта неограниченности гамильтониана можно выяснить, какова роль излучения в процессе волнового коллапса. Как впервые было показано В.Е. Захаровым (1972 г.) на примере коллапса ленгмюровских волн [17], излучение способствует коллапсу. Это есть общее свойство, присущее многим волновым коллапсирующим системам.

Однако из этих соображений невозможно сделать заключение о конечности времени коллапса. Только строгие теоремы, наподобие теоремы Власова–Петрищева–Таланова [18], позволяют установить достаточный критерий коллапса как процесса формирования особенности за конечное время.

Применение метода, основанного на теореме Ляпунова, оказывается затруднительным при исследовании устойчивости локальных стационарных точек. Наиболее эффективным представляется анализ линейной устойчивости. В данном обзоре, следуя работе Вахитова и Колоколова [19], мы получим критерий устойчивости для солитонов НУШ. Главный пункт вывода этого критерия основан на осцилляционной теореме для оператора Шрёдингера, которая устанавливает однозначное соответствие между номером уровня и числом нулей соответствующей волновой функции. Важно, что данная теорема справедлива только для скалярного оператора Шрёдингера и она, например, не может быть применена для векторного оператора Шрёдингера. Это означает, что критерии типа Вахитова–Колоколова, как правило, являются только достаточными критериями неустойчивости солитонов и они не могут быть использованы в качестве необходимого условия устойчивости. Как будет показано в обзоре, система трёх волн как раз представляет пример такого рода.

Для системы трёх волн линеаризованный оператор является произведением двух матричных (3×3) операторов Шрёдингера, для которых осцилляционная теорема неприменима. Мы детально обсудим данную ситуацию для солитонов, описывающих связанное состояние первой и второй гармоник, и на этом примере

покажем, как работают оба подхода — метод Ляпунова и линейный анализ устойчивости. В частности, будет рассмотрено, как на устойчивость солитонов влияет фазовая расстройка.

2. Основные уравнения

Начнём изложение с основных уравнений — нелинейного уравнения Шрёдингера и системы трёх волн.

2.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера

В безразмерных переменных нелинейное уравнение Шрёдингера записывается в следующем каноническом виде:

$$i\psi_t + \frac{1}{2} \Delta \psi + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (1)$$

В контексте нелинейной оптики ψ в уравнении (1) имеет смысл амплитуды огибающей электрического поля с определённой поляризацией (например, линейной), а время t представляет собой координату вдоль распространения волнового пакета. Второй член в (1) описывает как дифракцию, так и положительную дисперсию групповой скорости, что реализуется в оптике для области аномальной дисперсии. В случае нормальной дисперсии оператор Δ заменяется гиперболическим оператором $\Delta_\perp - \partial_z^2$. Нелинейный член $|\psi|^2 \psi$ в (1) соответствует керровской добавке к показателю преломления.

Необходимо отметить, что НУШ, моделирующее широкий круг нелинейных волновых явлений, играет центральную роль в теории волнового коллапса. Особенно это стало ясным после предсказания самофокусировки света [20] и развития соответствующей теории [21–25] (см. также монографию [26]). Приложения этой модели волнового коллапса не исчерпываются только самофокусировкой света — НУШ имеет разнообразные применения во многих других областях физики (см., например, обзоры [4, 27–29] и приведённые в них ссылки). Обычно НУШ и его модификации возникают в результате редукции уравнений движения нелинейной среды к уравнениям для огибающей квазимонохроматической волны, что предполагает усреднение исходных уравнений по быстрым пространственным и временным осцилляциям. Поэтому НУШ очень часто рассматривается как уравнение для огибающих. Необходимо упомянуть монографию [30], которая посвящена полностью нелинейному уравнению Шрёдингера; в [30] помимо физического содержания отражены многие математические аспекты НУШ.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (1) часто называют уравнением Гросса–Питаевского [31, 32], которое с высокой точностью описывает длинноволновые колебания конденсата слабонеидеального бозе-газа с отрицательной длиной рассеяния. В настоящее время (1) является основной моделью в исследованиях нелинейной динамики бозе-конденсатов (см., например, [33–38]). В этом случае (1) представляет собой уравнение Шрёдингера, а ψ является волновой функцией. Соответственно уравнение (1) описывает движение квантово-механической частицы в самосогласованном потенциале с притяжением: $U = -|\psi|^2$. Именно притяжение является причиной возникновения особенности. С точки зрения квантовой механики, коллапс в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера можно интерпретировать как процесс падения частицы на центр (точку коллапса) [39].

Однако коллапс в НУШ (1) возможен не для всех размерностей D пространства, а только для $D \geq 2$. В одномерном (1D) случае, как было показано Захаровым и Шабатом [40] в 1971 г., уравнение (1) может быть точно проинтегрировано с помощью метода обратной задачи рассеяния. Эта теория продемонстрировала, что солитоны как стационарные локализованные объекты играют существенную роль в динамике нелинейных волн, описываемых НУШ. Солитоны в одномерном случае оказались структурно устойчивыми образованиями, т.е. устойчивыми относительно не только малых, но и конечных возмущений, например, таких, которые солитон испытывает при рассеянии на других солитонах. Именно это очень привлекательное свойство солитонов лежало в основе применения оптических солитонов в оптических волокнах [5]. Сейчас эта идея реализована на практике (см., например, [41]).

Однако при больших размерностях солитоны играют другую роль.

2.2. Гамильтонова структура

Хорошо известно (см., например, [11]), что нелинейное уравнение Шрёдингера (1) принадлежит к уравнениям гамильтонова типа и оно может быть записано в следующем виде:

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad (2)$$

где гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \left(\int |\nabla \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right) \equiv \frac{1}{2} (I_1 - I_2). \quad (3)$$

Кроме H , это уравнение имеет два других простых интеграла движения: число частиц (совпадающее с точностью до постоянного множителя с энергией волнового пакета),

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad (4)$$

и импульс

$$\mathbf{P} = \frac{i}{2} \int (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Сохранение N связано с калибровочной симметрией: $\psi \rightarrow \psi \exp(i\alpha)$, а сохранение \mathbf{P} обусловлено симметрией относительно трансляций. Эти две симметрии обеспечивают инвариантность (1) относительно преобразований Галилея. В частности, простейшее решение уравнения (1),

$$\psi_s = \psi_0(\mathbf{r}) \exp \frac{i\lambda^2 t}{2}, \quad (6)$$

с $\psi_0(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, соответствует покоящемуся солитону. Решение для движущегося солитона получается с помощью применения к (6) преобразования Галилея.

Легко также устанавливается, что солитонное решение (6) представляет собой стационарную точку гамильтониана H при фиксированном числе частиц (ср. с [3]):

$$\delta(H + \lambda^2 N) = 0, \quad (7)$$

где λ^2 — множитель Лагранжа. Вариационная задача (7) эквивалентна нахождению решения для стационарного НУШ:

$$-\lambda^2 \psi + \Delta \psi + |\psi|^2 \psi = 0.$$

Отсюда можно получить зависимость N от λ на солитонном решении (6):

$$N_s = \lambda^{2-D} N_0, \quad N_0 = \int |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (8)$$

где f удовлетворяет уравнению

$$-f + \frac{1}{2} \Delta f + |f|^2 f = 0.$$

Зависимость (8) оказывается ключевой для критерия линейной устойчивости солитонов, о чём пойдёт речь в разделе 3.

2.3. Система трёх волн и её редукции

Обратимся теперь к системе трёх волн, которая может быть записана в виде (см., например, [10, 11])

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \omega_1 \psi_1 + i(\mathbf{v}_1 \nabla) \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_1^{z\beta} \partial_{z\beta}^2 \psi_1 = V \psi_2 \psi_3, \quad (9)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \omega_2 \psi_2 + i(\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 + \frac{1}{2} \omega_2^{z\beta} \partial_{z\beta}^2 \psi_2 = V \psi_1 \psi_3^*, \quad (10)$$

$$i \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \omega_3 \psi_3 + i(\mathbf{v}_3 \nabla) \psi_3 + \frac{1}{2} \omega_3^{z\beta} \partial_{z\beta}^2 \psi_3 = V \psi_1 \psi_2^*. \quad (11)$$

Здесь амплитуды трёх волновых пакетов $\psi_l(\mathbf{x}, t)$ ($l = 1, 2, 3$) представляют собой медленно меняющиеся функции \mathbf{x} ($k_l L_l \gg 1$, где \mathbf{k}_l — несущий волновой вектор l -го пакета, L_l — его характерная ширина), $\mathbf{v}_l = \partial \omega_l(\mathbf{k}_l) / \partial \mathbf{k}_l$ — групповые скорости пакетов, $\omega_l^{z\beta}$ — дисперсионный тензор,

$$\omega_l^{z\beta} = \frac{\partial^2 \omega_l(\mathbf{k}_l)}{\partial k_{lz} \partial k_{l\beta}},$$

V — трёхволновой матричный элемент, который без ограничения общности можно считать действительным. Предполагается, что несущие частоты $\omega_l = \omega_l(\mathbf{k}_l)$ близки к резонансу:

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) = \omega_2(\mathbf{k}_2) + \omega_3(\mathbf{k}_3), \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (13)$$

Как и НУШ, система уравнений (9)–(11) является гамильтоновой:

$$i \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi_l^*}, \quad (14)$$

где

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = \sum_{l=1}^3 \left(\int \omega_l |\psi_l|^2 d\mathbf{r} - i \int \psi_l^* (\mathbf{v}_l \nabla) \psi_l d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \nabla_z \psi_l^* \omega_l^{z\beta} \nabla_\beta \psi_l d\mathbf{r} \right), \quad (15)$$

$$H_1 = V \int (\psi_1 \psi_2^* \psi_3^* + \psi_1^* \psi_2 \psi_3) d\mathbf{r}. \quad (16)$$

Здесь H_0 отвечает линейным волнам: первый член в правой части (15) даёт основной вклад в энергию, второй соответствует движению пакетов с групповой скоростью, третий ответствен за дисперсионное расплывание пакетов. Следует отметить, что дисперсионный член мал по сравнению со вторым членом по параметру $\Delta k_l/k_l$. Поэтому удерживать третье слагаемое в H_0 нужно только тогда, когда разности между групповыми скоростями малы. Например, такая ситуация реализуется в оптике.

Если несущие ω_l и \mathbf{k}_l точно удовлетворяют резонансным условиям (12), то члены $\sim \omega_l$ исключаются с помощью преобразования $\psi_l \rightarrow \psi_l \exp(-i\omega_l t)$.

Отметим, что трёхволновая система (9)–(11) имеет одну физически важную редукцию, соответствующую взаимодействию первой (ψ_1) и второй (ψ_2) гармоник. В этом случае гамильтониан принимает вид

$$H = \sum_{l=1}^2 \left(\int \omega_l |\psi_l|^2 d\mathbf{r} - i \int \psi_l^* (\mathbf{v}_l \nabla) \psi_l d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \partial_\alpha \psi_l^* \omega_l^{\alpha\beta} \partial_\beta \psi_l d\mathbf{r} \right) + V \int (\psi_2^* \psi_1^2 + \text{c.c.}) d\mathbf{r},$$

а соответствующие уравнения движения записываются как

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \omega_1 \psi_1 + i(\mathbf{v}_1 \nabla) \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_1^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \psi_1 = 2V \psi_2 \psi_1^*, \quad (17)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \omega_2 \psi_2 + i(\mathbf{v}_2 \nabla) \psi_2 + \frac{1}{2} \omega_2^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \psi_2 = V \psi_1^2, \quad (18)$$

где $\omega_2 \simeq 2\omega_1$. При точном резонансе члены, пропорциональные ω_l , исключаются с помощью преобразования $\psi_l \rightarrow \psi_l \exp(-i\omega_l t)$, $\psi_2 \rightarrow \psi_2 \exp(-i2\omega_1 t)$. В одномерном случае система трёх волн (9)–(11) допускает упрощения. Вводя новые переменные

$$\psi_l = \tilde{\psi}_l(x - vt, t) \exp(i\kappa_l x), \quad \kappa_l = \kappa_2 + \kappa_3, \quad (19)$$

можно исключить первые производные, если выбрать скорость v и волновые числа κ_l в виде

$$v = \frac{v_1 d_1 - v_2 d_2 - v_3 d_3}{d_1 - d_2 - d_3}, \quad \kappa_l = d_l(v - v_l), \quad d_l = \frac{1}{\omega_l''}. \quad (20)$$

(Отметим, что при $d_1 = d_2 + d_3$ уравнения оказываются инвариантными относительно преобразования Галилея.) В результате система (9)–(11) в одномерном случае приобретает вид (далее опускаем знак тильды над ψ_l , а матричный элемент трёхволнового взаимодействия V полагаем равным -1):

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \Omega_1 \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_1'' \psi_{1xx} = -\psi_2 \psi_3, \quad (21)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \Omega_2 \psi_2 + \frac{1}{2} \omega_2'' \psi_{2xx} = -\psi_1 \psi_3^*, \quad (22)$$

$$i \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \Omega_3 \psi_3 + \frac{1}{2} \omega_3'' \psi_{3xx} = -\psi_1 \psi_2^*, \quad (23)$$

где

$$\Omega_l = \omega_l + \kappa_l v_l + \frac{\omega_l'' \kappa_l^2}{2}. \quad (24)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что новые частоты близки к резонансу,

$$\Omega_1 \approx \Omega_2 + \Omega_3,$$

иными словами, расстройка частоты считается малой.

На следующем шаге Ω_2 и Ω_3 могут быть исключены с помощью преобразований

$$\psi_1(x, t) \rightarrow \psi_1(x, t) \exp[-i(\Omega_2 + \Omega_3)t],$$

$$\psi_2(x, t) \rightarrow \psi_2(x, t) \exp(-i\Omega_2 t),$$

$$\psi_3(x, t) \rightarrow \psi_3(x, t) \exp(-i\Omega_3 t).$$

В результате уравнения (21)–(23) записываются в виде

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \Omega \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_1'' \psi_{1xx} = -\psi_2 \psi_3, \quad (25)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega_2'' \psi_{2xx} = -\psi_1 \psi_3^*, \quad (26)$$

$$i \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega_3'' \psi_{3xx} = -\psi_1 \psi_2^*. \quad (27)$$

Здесь $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3$ — частотная расстройка, характеризующая, насколько несущие частоты трёх волновых пакетов далеки от резонанса (12).

Система уравнений (25)–(27) сохраняет свою каноническую структуру с гамильтонианом

$$H = \int \Omega |\psi_1|^2 dx + \sum_l \int \frac{1}{2} \omega_l'' |\psi_{lx}|^2 dx - \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \text{c.c.}) dx. \quad (28)$$

Кроме H , эти уравнения (так же как и нетрансформированные) имеют два дополнительных интеграла движения — так называемые интегралы Менли–Роу:

$$N_1 = \int (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dx, \quad N_2 = \int (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) dx. \quad (29)$$

Инварианты N_1 и N_2 возникают как результат процедуры усреднения, исключающей все нерезонансные члены, кроме члена, соответствующего трёхволновому взаимодействию.

Аналогично (19) преобразуется одномерная система (17), (18), описывающая взаимодействие первой и второй гармоник:

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega_1'' \psi_{1xx} = -2\psi_2 \psi_1^*, \quad (30)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \Omega \psi_2 + \frac{1}{2} \omega_2'' \psi_{2xx} = -\psi_1^2, \quad (31)$$

где частоты Ω_l определены выражениями (24) с κ_l , заданными соотношениями (20). Для системы (30), (31) есть только один интеграл Менли–Роу:

$$N = \int (|\psi_1|^2 + 2|\psi_2|^2) dx. \quad (32)$$

Аналогичные преобразования для системы трёх волн (21)–(23) (а также для взаимодействия первой и второй гармоник (17), (18)) можно провести и в многомерном случае. Для этого нужно во всех интегралах движения сделать замену $\omega_l'' \psi_{lxx} \rightarrow \omega_l^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \psi_l$. Вместо d_l необходимо подставить матрицу, обратную $\omega_l^{\alpha\beta}$, а скорости v_l считать

векторами. Следует отметить, что для системы трёх волн при $D \leq 3$ различие между одномерным и многомерным случаями оказывается не столь существенным, в отличие, например, от такового для НУШ. Особенно это видно при исследовании устойчивости солитонов — связанных состояний трёх волновых пакетов.

В заключение этого раздела укажем ещё одну важную редукцию системы (9)–(11), соответствующую стационарным волнам, когда производная по времени в уравнениях отсутствует. В этом случае система уравнений, которая также является гамильтоновой, описывает пространственные солитоны — распределения, локализованные в одном направлении или в плоскости (более подробно см., например, статьи [42–44]).

3. Устойчивость по Ляпунову для скалярных моделей

3.1. Устойчивость солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера

Начнём с исследования устойчивости солитонов одномерного НУШ

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*} = -\frac{1}{2} \psi_{xx} - |\psi|^2 \psi, \quad (33)$$

где гамильтониан H задаётся соотношением (3), в котором интегрирование производится только по координате x . Как отмечалось в разделе 2, с квантовомеханической точки зрения уравнение (33) описывает движение частицы в самосогласованном потенциале с притяжением $U = -|\psi|^2$. Однако в одномерном случае нелинейное притяжение не может превзойти дисперсию ($\sim \psi_{xx}$), приводящую к расплыванию. Точный баланс этих двух противоположных эффектов приводит к существованию солитона — стационарного решения уравнения (33) вида $\psi(x, t) = \psi_0(x) \exp(i\lambda^2 t/2)$, где

$$\psi_0(x) = \lambda \operatorname{sech}(\lambda x) \quad (34)$$

удовлетворяет стационарному НУШ

$$-\lambda^2 \psi_0 + \psi_{0xx} + 2|\psi_0|^2 \psi_0 = 0. \quad (35)$$

Простейшее решение (34) описывает покоящийся солитон. Двигающиеся солитоны получаются отсюда посредством преобразования Галилея.

Легко проверить, что решение (34) представляет собой стационарную точку гамильтониана при фиксированном числе частиц $N = \int |\psi|^2 dx$, так как стационарное НУШ (35) непосредственно следует из вариационной задачи

$$\delta \left(H + \frac{\lambda^2 N}{2} \right) = 0. \quad (36)$$

Легко установить также, что для этих решений число частиц возрастает линейно с увеличением λ : $N_s = 2\lambda$. Здесь и всюду ниже индекс s означает, что функционал (в данном случае N) вычислен на солитонном решении.

Для доказательства устойчивости солитона (34), в соответствии с теоремой Ляпунова, достаточно показать, что солитон реализует минимум гамильтониана.

(Неограниченность H сверху очевидна: при фиксированном N , по сути — нормировке волновой функции, гамильтониан может стать сколь угодно большим за счёт кинетической энергии I_1 на классе сильно изрезанных функций ψ .)

Вначале приведём простые (по сути, размерностные) оценки, указывающие на то, что H ограничен снизу. Пусть A — характерное значение амплитуды солитона, а l — его характерный размер. Тогда для числа частиц можно приближённо записать $N \approx A^2 l$, откуда $A^2 \approx N l^{-1}$. Соответственно для интегралов I_1 и I_2 имеем оценки

$$I_1 \approx \frac{A^2}{l} \approx \frac{N}{l^2}, \quad I_2 \approx A^4 l \approx \frac{N^2}{l},$$

откуда гамильтониан оценивается как

$$H \approx \frac{1}{2} \left(\frac{N}{l^2} - \frac{N^2}{l} \right).$$

Из последнего выражения немедленно следует, что H как функция размера солитона l положительна при малых l (возрастает как l^{-2}), а при больших l является отрицательной и стремится к нулю снизу. Очевидно, что эта функция ограничена снизу. Её минимуму будет отвечать солитон размером $l_s \approx 2/N$.

К такому же заключению можно прийти, если рассмотреть масштабные преобразования, сохраняющие число частиц,

$$\psi(x) \rightarrow a^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{a}\right). \quad (37)$$

В результате преобразования (37) гамильтониан становится функцией масштабного параметра a :

$$H(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a} \right). \quad (38)$$

Функция $H(a)$ имеет минимум в точке $a = 1$, соответствующий солитону (рис. 1):

$$\left. \frac{\partial H}{\partial a} \right|_{a=1} = 0 \Rightarrow 2I_{1s} = I_{2s} = \frac{4\lambda^3}{3}, \quad H_s = -\frac{1}{2} I_{1s} = -\frac{\lambda^3}{3}. \quad (39)$$

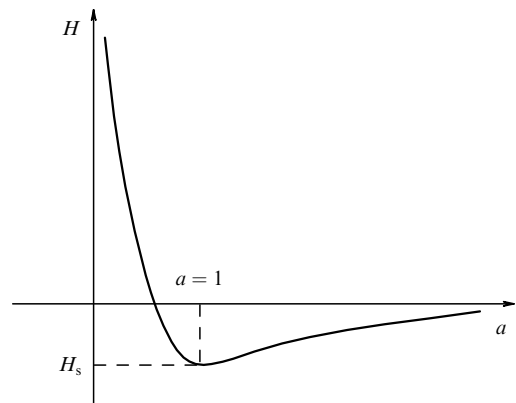


Рис. 1. Зависимость $H(a)$.

Можно, кроме того, убедиться, что солитон реализует минимум H относительно фазовых преобразований $\psi_0(x) \rightarrow \psi_0(x) \exp(i\chi(x))$, также сохраняющих N ,

$$H = H_s + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \psi_0^2 dx.$$

Два простейших преобразования, (37) и (38), таким образом, дают минимум H , что указывает на устойчивость солитона, но, строго говоря, не доказывает его устойчивости.

Дадим строгое доказательство этого факта. Главный момент этого доказательства основывается на интегральных оценках соболевского типа, которые следуют из общих теорем вложения Соболева. Теорема Соболева гласит, что пространство L_p может быть вложено в пространство Соболева W_2^1 , если размерность пространства R^D , по которому производится интегрирование,

$$D < \frac{2}{p} (p + 4).$$

Это означает, что нормы

$$\|u\|_p = \left[\int |u|^p d^D x \right]^{1/p}, \quad p > 0,$$

$$\|u\|_{W_2^1} = \left[\int (\mu^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) d^D x \right]^{1/2}, \quad \mu^2 > 0,$$

связаны следующим неравенством (см., например, [45]):

$$\|u\|_p \leq M \|u\|_{W_2^1}, \quad (40)$$

где M — некоторая положительная константа. В частности, при $D = 1$ и $p = 4$ неравенство (40) может быть представлено в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dx \leq M_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 |\psi|^2 + |\psi_x|^2) dx \right)^2. \quad (41)$$

Отсюда можно получить мультипликативный вариант неравенства Соболева, так называемое неравенство Гальярдо–Ниренберга [46] (см. также [29, 45, 47]). Для этого в неравенстве (41) проведём масштабные преобразования $x \rightarrow \alpha x$, в результате чего правая часть (41) приобретёт зависимость от параметра α :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dx \leq M_1 \left(\alpha \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_x|^2 dx \right)^2.$$

Последнее неравенство справедливо при любых положительных α , включая значения, при котором правая часть неравенства минимальна, что даёт неравенство Гальярдо–Ниренберга:

$$I_2 \leq C N^{3/2} I_1^{1/2}, \quad (42)$$

где I_1 и I_2 — интегралы, определённые соотношением (3) при $D = 1$, C — новая константа.

Неравенство (42) может быть уточнено, если известно минимальное значение константы C . Для того чтобы его найти, необходимо рассмотреть все экстремумы функ-

ционала

$$J\{\psi\} = \frac{I_2}{N^{3/2} I_1^{1/2}}, \quad (43)$$

определяемые из вариационной задачи $\delta J = 0$. Легко увидеть, что эта задача сводится к отысканию решений стационарного НУШ (35):

$$-\lambda^2 \psi + \psi_{xx} + 2|\psi|^2 \psi = 0.$$

Решение последнего уравнения является единственным (с точностью до постоянного фазового множителя) и представляет собой одномерный солитон НУШ (34):

$$\psi = \frac{\lambda}{\cosh \lambda x}.$$

Отсюда находим, что наилучшая константа C_{best} равняется значению $J\{\psi\}$ на солитонном решении (34):

$$C_{\text{best}} = \frac{I_{2s}}{N_s^{3/2} I_{1s}^{1/2}} = \frac{2 I_{1s}^{1/2}}{N_s^{3/2}}. \quad (44)$$

Неравенство (42) с $C = C_{\text{best}}$ позволяет сразу получить доказательство устойчивости одномерного солитона.

Подстановка (42) с $C = C_{\text{best}}$ в (3) при $D = 1$ даёт искомую оценку для нижней границы гамильтониана:

$$H \geq \frac{1}{2} (I_1 - C_{\text{best}} I_1^{1/2} N^{3/2}) = H_s + \frac{1}{2} (I_1^{1/2} - I_{1s}^{1/2})^2. \quad (45)$$

Неравенство (45) становится точным равенством на солитонном решении, что доказывает устойчивость солитона НУШ по Ляпунову — устойчивость не только к малым, но и к конечным возмущениям.

Аналогичным образом можно установить устойчивость "основного" солитона — радиально-симметричного решения, не имеющего нулей, — для многомерного НУШ со степенной нелинейностью

$$i\psi_t + \frac{1}{2} \Delta \psi + \frac{\sigma}{2} |\psi|^{2\sigma-2} \psi = 0, \quad (46)$$

где $\sigma > 1$.

Гамильтониан для уравнения (46) записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int (|\nabla \psi|^2 - |\psi|^{2\sigma}) d^D x \equiv I_1 - I_\sigma, \quad (47)$$

при этом "основное" солитонное решение вида $\psi_s = \exp(i\lambda^2 t/2) \lambda^{1/(\sigma-2)} g(\lambda r)$ с функцией $g(\xi)$, удовлетворяющей уравнению

$$-g + \nabla_\xi^2 g + \sigma |g|^{2\sigma-2} g = 0,$$

представляет собой стационарную точку гамильтониана H при фиксированном числе частиц N ,

$$\delta \left(H + \frac{\lambda^2}{2} N \right) = 0.$$

Проводя, как и прежде, масштабные преобразования,

$$\psi_s(r) \rightarrow a^{-D/2} \psi_s \left(\frac{r}{a} \right),$$

сохраняющие полное число частиц, находим, что соответствующая гамильтонова функция

$$H(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{a^2} - \frac{I_\sigma}{a^{(\sigma-1)/D}} \right)$$

оказывается ограниченной снизу и имеет минимум только при

$$\frac{\sigma-1}{D} < 2.$$

Этот минимум (при $a = 1$) отвечает "основному" солитонному решению, что служит указанием на его устойчивость. Для строгого доказательства устойчивости нужно воспользоваться соответствующим мультипликативным неравенством для I_σ , следующим из (40),

$$I_\sigma = \int |\psi|^{2\sigma} d^D x \leq M_\sigma \left[\int |\psi|^2 d^D x \right]^\alpha \left[\int |\nabla \psi|^2 d^D x \right]^\beta \quad (48)$$

с $\alpha = D/2 + \sigma(1 - D/2)$ и $\beta = (\sigma - 1)D/2$. Затем, как и в случае одномерного кубического НУШ (33), необходимо найти наилучшую константу M_σ как минимум функционала $N^\alpha I_1^\beta / I_\sigma$. Легко проверяется, что этот минимум достигается на основном солитонном решении (46).

Подставляя теперь неравенство (48) с наилучшей константой M_{best} в выражение для гамильтониана (47),

$$H \geq \frac{1}{2} (I_1 - M_{\text{best}} N^\alpha I_1^\beta),$$

находим, что правая часть последнего неравенства как функция I_1 является ограниченной снизу и достигает минимума на основном солитонном решении, что как раз и доказывает устойчивость этого решения по Ляпунову.

Критерий устойчивости (45) и его обобщение для $(\sigma - 1)/D < 2$ могут быть рассмотрены в качестве энергетического принципа. Если не учитывать интегрируемость одномерного НУШ (с $\sigma = 2$) [40], то слияние двух солитонов должно быть энергетически выгодным. Последнее означает, что новый солитон, возникающий в результате взаимодействия двух солитонов, должен иметь меньшую энергию (энергия солитона отрицательна!), чем энергия взаимодействующих солитонов. В общем случае взаимодействие солитонов должно сопровождаться излучением волн с малой амплитудой. Почему излучение способствует возникновению более глубокого солитона?

Рассмотрим область G , в которой гамильтониан отрицателен, $H_G < 0$. Тогда для интеграла $I_\sigma = \int_G |\psi|^{2\sigma} dx$ справедлива следующая очевидная оценка:

$$\int_G |\psi|^{2\sigma} dx \leq \left(\max_x |\psi|^2 \right)^{2\sigma-2} \int_G |\psi|^2 dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\max_G |\psi|^2 \right)^{2\sigma-2} \geq \frac{|H_G|}{N_G}. \quad (49)$$

Отметим, что неравенство (49) справедливо для произвольной физической размерности D .

Пусть теперь из области G происходит излучение волн малой амплитуды. Такие волны будут уносить положительную энергию (поскольку нелинейность для них не существенна). В результате, в силу сохранения

гамильтониана и числа частиц, $|H_G|$ будет возрастать, а число волн N_G — уменьшаться. Таким образом, их отношение за счёт излучения будет возрастать и соответственно будет увеличиваться значение $\max |\psi|^2$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока в области G не сформируется солитон — стационарное устойчивое состояние, реализующее минимум H_G при фиксированном N_G .

Следует отметить, что в некоторых, весьма специальных, случаях излучения может и не быть. Излучение будет отсутствовать, если соблюдены два закона сохранения — энергии и числа частиц:

$$E(N) = E(N_1) + E(N_2),$$

$$N = N_1 + N_2,$$

где N_1 (N_2) — полное число частиц для первого (второго) солитона. Последние уравнения удовлетворяются не при произвольной зависимости $E(N)$. Например, если $E(N) \sim N^\alpha$ ($\alpha > 0$), то система этих уравнений не имеет решения.

В противоположном случае, когда $(\sigma - 1)/D > 2$, функция $H(a)$ оказывается неограниченной снизу при $a \rightarrow 0$ и вместо минимума при $(\sigma - 1)/D < 2$ имеет максимум, что указывает на неустойчивость солитонного решения.

3.2. Устойчивость по Ляпунову для анизотропного уравнения Кортевега–де Вриза

Следующий пример, который мы рассмотрим, — это анизотропное уравнение КдВ [14], полученное нами в 1974 г.:

$$u_t + \frac{\partial}{\partial z} \Delta u + 6uu_z = 0, \quad (50)$$

где Δ — трёхмерный оператор Лапласа. В одномерном случае (50) переходит в классическое уравнение КдВ.

Уравнение (50) описывает трёхмерные ионно-звуковые солитоны $u = u_s(z - Vt, r_\perp)$, распространяющиеся вдоль вектора магнитного поля (параллельного оси z) в сильно замагниченной плазме, когда тепловое давление плазмы nT (где n — плотность, T — температура плазмы) мало по сравнению с магнитным давлением $B^2/8\pi$, т.е. их отношение $\beta = 8\pi nT/B^2 \ll 1$. Решения солитонного типа находятся интегрированием уравнения

$$-Vu_s + \Delta u_s + 3u_s^2 = 0.$$

Легко увидеть, что локализованные решения ($u_s \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) возможны только при положительной скорости V . Явное выражение для солитонного решения может быть получено только в одномерном случае — это классический солитон КдВ:

$$u = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t)}, \quad V = 4\kappa^2.$$

В многомерном случае локализованное решение может быть найдено только численно (см. [14]).

Для уравнения (50), как и для НУШ, солитоны представляют собой стационарные точки гамильтониана

$$H = \int \left(\frac{1}{2} (\nabla u)^2 - u^3 \right) d\mathbf{r} \equiv \frac{1}{2} I_1 - I_2 \quad (51)$$

при фиксированном импульсе $P = (1/2) \int u^2 dr$, т.е. солитоны являются решением вариационной задачи $\delta(H - VP) = 0$, в которой скорость V выступает в качестве множителя Лагранжа.

Масштабные преобразования

$$u(r) \rightarrow \frac{1}{a^{D/2}} u\left(\frac{r}{a}\right), \quad (52)$$

сохраняющие P , приводят примерно к такой же зависимости:

$$H(a) = \frac{1}{2} \frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a^{D/2}}, \quad D \leq 3,$$

что и для одномерного НУШ (ср. с зависимостью рис. 1).

Отсюда, по аналогии с НУШ, для солитонного решения (точка $a = 1$, где $\partial H / \partial a = 0$) имеем

$$I_{2s} = \frac{2}{D} I_{1s}, \quad H_s = \frac{D-4}{2D} I_{1s} \equiv \frac{D-4}{6-D} VP_s,$$

т.е. $H_s < 0$ при $D \leq 3$.

Мультипликативный вариант неравенства Соболева в этом случае имеет вид

$$I_2 \leq CP^{1/(4-D)} I_1^\beta,$$

где $\beta = (1/2)(10 - 3D)/(4 - D)$. Наилучшее значение $C = C_{\text{best}}$ определяется основным (без нулей) солитоном. Подстановка последнего неравенства с наилучшей константой в соотношение (51) показывает ограниченность H при всех размерностях пространства ($D = 1, 2, 3$):

$$H \geq \frac{1}{2} I_1 - C_{\text{best}} P^{1/(4-D)} I_1^\beta \geq H_s.$$

Последние неравенства превращаются в равенства на солитонном радиально-симметричном решении без нулей, что и доказывает устойчивость многомерных ионно-звуковых солитонов в замагниченной плазме [14]. Как частный результат отсюда следует доказательство устойчивости классических солитонов КдВ. Для одномерных солитонов КдВ такой подход впервые был использован в работе Бенжамина [13] 1972 г. Однако к тому времени благодаря Гарднеру, Грину, Крускалу и Миура [48] факт интегрируемости уравнения КдВ с помощью метода обратной задачи рассеяния уже был известен. В частности, в работе [48] было установлено, что солитон КдВ является структурно-устойчивым образованием.

4. Солитоны в системе трёх волн

Рассмотрим решения солитонного типа системы (25)–(27) в виде

$$\psi_1(x, t) = \psi_{1s}(x) \exp[i(\lambda_1 + \lambda_2)t],$$

$$\psi_2(x, t) = \psi_{2s}(x) \exp(i\lambda_1 t),$$

$$\psi_3(x, t) = \psi_{3s}(x) \exp(i\lambda_2 t).$$

Здесь $\psi_{1s}(x)$, $\psi_{2s}(x)$, $\psi_{3s}(x)$ предполагаются действительными, не имеющими нулей (основное состояние) и затухающими на бесконечности. Эти функции удовле-

творяют уравнениям

$$L_1 \psi_{1s} = -\psi_{2s} \psi_{3s}, \quad L_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \Omega) + \frac{1}{2} \omega_1'' \partial_x^2, \quad (53)$$

$$L_2 \psi_{2s} = -\psi_{1s} \psi_{3s}, \quad L_2 = -\lambda_1 + \frac{1}{2} \omega_2'' \partial_x^2, \quad (54)$$

$$L_3 \psi_{3s} = \psi_{1s} \psi_{2s}, \quad L_3 = -\lambda_2 + \frac{1}{2} \omega_3'' \partial_x^2. \quad (55)$$

Решения системы уравнений (53)–(55) представляют собой стационарные точки гамильтониана при двух фиксированных интегралах Менли–Роу, N_1, N_2 :

$$\delta(H + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2) = 0. \quad (56)$$

Солитонные решения будут экспоненциально затухать на бесконечности при выполнении трёх неравенств:

$$\mu_1^2 \equiv d_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \Omega) > 0, \quad \mu_2^2 \equiv d_2 \lambda_1 > 0, \quad \mu_3^2 \equiv d_3 \lambda_2 > 0, \quad (57)$$

где $d_l = 1/\omega_l''$.

К этому же результату можно прийти также другим путём, если определить соотношения между членами гамильтониана и интегралами Менли–Роу N_1, N_2 на солитонном решении (см. детали в обзоре [4]). Для этого уравнение (53) нужно умножить на ψ_{1s} и затем проинтегрировать по x . В результате получим

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \Omega)n_1 + D_1 = -I. \quad (58)$$

Аналогичная процедура, применённая к уравнениям (54) и (55), даёт

$$-\lambda_1 n_2 + D_2 = -I, \quad (59)$$

$$-\lambda_2 n_3 + D_3 = -I, \quad (60)$$

где

$$n_l = \int |\psi_{ls}|^2 dx, \quad D_l = \frac{1}{2} \int \omega_l'' \left| \frac{d\psi_{ls}}{dx} \right|^2 dx, \quad I = \int \psi_{1s} \psi_{2s} \psi_{3s} dx.$$

Эти интегральные соотношения необходимо дополнить условием, следующим из вариационной задачи, если к ней применить масштабные преобразования, сохраняющие N_1, N_2 :

$$\psi_{ls}(x) \rightarrow a^{-1/2} \psi_{ls}\left(\frac{x}{a}\right).$$

При таких преобразованиях гамильтониан становится функцией параметра a :

$$H(a) = \sum_l \int \left(\Omega_l |\psi_{ls}|^2 + \frac{1}{2a^2} \omega_l'' |\psi_{lsx}|^2 \right) dx - \frac{2}{a^{1/2}} \int \psi_{1s} \psi_{2s} \psi_{3s} dx.$$

Используя последнее соотношение, а также (56), легко получить

$$\left. \frac{dH}{da} \right|_{a=1} = 0, \quad \text{или} \quad \sum_l \int \omega_l'' |\psi_{lsx}|^2 dx - \int \psi_{1s} \psi_{2s} \psi_{3s} dx = 0. \quad (61)$$

Учитывая соотношения (58)–(61) и принимая во внимание положительность n_l (по определению), можно прийти к условиям (57). Таким образом, для существования солитонов все операторы L_l должны иметь одну и ту же (или положительную, или отрицательную) знакоопределённость. Отметим, что это требование имеет место для всех физических размерностей $D \leq 3$. Соответственно все матрицы $\omega_l^{\alpha\beta}$ обязаны иметь одну и ту же знакоопределённость, например должны быть положительно определены. В частности, если одна из матриц не является знакоопределённой, то многомерные солитоны в этом случае отсутствуют. Похожая ситуация имеет место для солитонов огибающих в среде с нормальной дисперсией (см., например, [49]).

Следует также отметить, что знакоопределённость матриц $\omega_l^{\alpha\beta}$ представляет собой простое физическое требование отсутствия резонанса черенковского типа между солитоном и линейными волнами (см. [50, 51]).

4.1. Нелинейная устойчивость солитонов в системе трёх волн

Покажем, как устойчивость по Ляпунову может быть получена для солитонных решений системы трёх волн. Поскольку в этом случае у нас есть три поля — три амплитуды ψ_i , необходимо рассматривать два пространства, $L_{3,3}$ и W_2^1 , с нормами

$$\|u\|_{L_{3,3}} = \left[\int (|\psi_1|^3 + |\psi_2|^3 + |\psi_3|^3) d^D x \right]^{1/3},$$

$$\|u\|_{W_2^1} = \left[\tilde{\lambda}_1 \int (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) d^D x + \tilde{\lambda}_2 \int (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) d^D x + \frac{1}{2} \sum_l \int \partial_\alpha \psi_l^* \omega_l^{\alpha\beta} \partial_\beta \psi_l d^D x \right]^{1/2},$$

где константы $\tilde{\lambda}_{1,2} > 0$ и тензоры $\omega_l^{\alpha\beta}$ предполагаются положительно определёнными.

Тогда неравенство Соболева имеет вид

$$\|u\|_{L_{3,3}} < M \|u\|_{W_2^1}. \quad (62)$$

Заметим, что норма $\|u\|_{L_{3,3}}$ и гамильтониан взаимодействия связаны следующим простым неравенством:

$$\|u\|_{L_{3,3}}^3 \geq \frac{3}{2} \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \text{c.c.}) d^D x. \quad (63)$$

Мультипликативный вариант неравенства Соболева получается аналогично таковому для НУШ. В частности, при $D = 1$ имеем

$$J \leq M_1 (\tilde{\lambda}_1 N_1 + \tilde{\lambda}_2 N_2)^{5/4} I^{1/4},$$

где

$$J = \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \text{c.c.}) d^D x, \quad I = \frac{1}{2} \sum_l \int \partial_\alpha \psi_l^* \omega_l^{\alpha\beta} \partial_\beta \psi_l d^D x$$

и $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ пока полагаются произвольными положительными параметрами. Минимизация по $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ даёт

$$J \leq C (N_1 N_2)^{5/8} I^{1/4}. \quad (64)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти наилучшую константу C как минимум функционала:

$$C_{\text{best}} = \min_{[\psi]} F[\psi], \quad F = \frac{J}{(N_1 N_2)^{5/8} I^{1/4}}.$$

Как можно увидеть, этот минимум достигается на основном солитоне:

$$C_{\text{best}} = F[\psi_s]. \quad (65)$$

Используя уточнённое неравенство (64), приходим к необходимой оценке для гамильтониана в случае нулевой расстройки, $\Omega = 0$:

$$H \geq I - 2I_s^{3/4} I^{1/4} \geq H_s(\Omega = 0),$$

что доказывает устойчивость солитонного решения (основное состояние) в одномерном случае при нулевой расстройке. Как и ранее, последние неравенства становятся равенствами на солитонном решении. По той же схеме доказывается устойчивость солитонов для произвольной физической размерности $D \leq 3$.

При ненулевой расстройке гамильтониан в одномерной постановке имеет вид

$$H = \Omega \int |\psi_1|^2 dx + \tilde{H},$$

где \tilde{H} совпадает с гамильтонианом при $\Omega = 0$:

$$\tilde{H} = \sum_l \int \frac{1}{2} \omega_l'' |\psi_{lx}|^2 dx - \int (\psi_1^* \psi_2 \psi_3 + \text{c.c.}) dx.$$

Рассмотрим теперь, каким образом частотная расстройка Ω влияет на устойчивость солитонов. Очевидно, что область существования солитонов сильно несимметрична относительно знака расстройки Ω . При положительной расстройке, $\Omega > 0$, имеет место очевидное неравенство:

$$H \geq H_s(\Omega = 0),$$

откуда следует, что гамильтониан ограничен снизу значением H_s на основном солитонном решении с нулевой расстройкой.

При отрицательной расстройке, $\Omega < 0$,

$$H \geq H_s(\Omega = 0) - |\Omega| \int |\psi_1|^2 dx, \quad (66)$$

где интеграл $\int |\psi_1|^2 dx$ всегда ограничен снизу значением $\min(N_1, N_2)$. Поэтому оценка для H записывается как

$$H \geq H_s(\Omega = 0) - |\Omega| \min(N_1, N_2).$$

Таким образом, мы доказали устойчивость основных (без узлов) солитонов, описывающих связанное состояние трёх волновых пакетов. В частности, в отсутствие расстройки солитон реализует минимум гамильтониана, что строго доказывается с помощью мажорирующих неравенств соболевского типа. Следует отметить, что факт ограниченности гамильтониана для системы трёх волн впервые был продемонстрирован Канашевым и

Рубенчиком (1981 г.) [10] для изотропных сред. Позднее Турицын (1995 г.) [52] показал, что при нулевой расстройке для взаимодействия первой и второй гармоник, когда дисперсионные операторы — лапласианы, гамилтониан достигает минимума на основном солитоне (без нулей). В 1997 г. Berge, Bang, Rasmussen и Mezentsev [53] показали ограниченность H при ненулевой расстройке для взаимодействия первой и второй гармоник. Общий случай ограниченности H для системы трёх волн приведён в [54, 55].

5. Линейная устойчивость

Обратимся теперь к задаче о линейной устойчивости солитонов, рассмотренных в разделах 2–4.

5.1. Линейная устойчивость одномерных солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера

Начнём с одномерного НУШ, полагая

$$\psi(x, t) = (\psi_0(x) + u + iv) \exp \frac{i\lambda^2 t}{2}, \quad \psi_0 \gg u, v.$$

Линеаризованные уравнения для возмущения представляют собой гамильтоновы уравнения

$$u_t = \frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta v}, \quad v_t = -\frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta u}, \quad (67)$$

где u и v — канонически сопряжённые величины, \tilde{H} — вторая вариация $F = H + \lambda^2 N/2$,

$$\tilde{H} = \langle v | L_0 | v \rangle + \langle u | L_1 | u \rangle \quad (68)$$

с $L_0 = \lambda^2 - \partial_x^2 - 2\psi_0^2$, $L_1 = \lambda^2 - \partial_x^2 - 6\psi_0^2$. Первый член в \tilde{H} — среднее значение оператора L_0 — играет роль кинетической энергии, второе слагаемое, $\langle u | L_1 | u \rangle$, — потенциальной энергии.

Таким образом, устойчивость или неустойчивость солитона определяются свойствами операторов L_0 и L_1 . Первое свойство L_0 следует непосредственно из стационарного НУШ:

$$L_0 \psi_0 = \lambda^2 \psi_0 - \partial_x^2 \psi_0 - 2\psi_0^3 \equiv 0, \quad (69)$$

т.е. ψ_0 — основное состояние L_0 (без нулей). Поэтому $\langle v | L_0 | v \rangle \geq 0$.

Таким образом, устойчивость (или неустойчивость) солитона определяется знаком потенциальной энергии.

Оператор L_1 имеет собственную функцию с нулевым собственным значением:

$$L_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0.$$

Это безразлично-устойчивая мода, соответствующая сдвигу солитона и имеющая один узел ($x = 0$). Поэтому у оператора Шрёдингера L_1 ниже по энергии имеется только одно собственное значение с $E < 0$, которое отвечает основному состоянию ϕ_0 . Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод, что $\langle u | L_1 | u \rangle < 0$ и, следовательно, возникает неустойчивость. Но это не так, поскольку на u имеется ограничение $\langle u | \psi_0 \rangle \equiv \int u \psi_0 dx = 0$, которое является следствием закона сохранения числа частиц. Поэтому устойчивость или неустойчивость соли-

тона определяются из решения спектральной задачи

$$L_1 |\phi\rangle = E |\phi\rangle + C |\psi_0\rangle, \quad (70)$$

где C — множитель Лагранжа, при дополнительном условии $\langle u | \psi_0 \rangle = 0$.

Разлагая $|\phi\rangle$ по полному набору собственных функций $\{\phi_n\}$ оператора L_1 ($L_1 \phi_n = E_n \phi_n$),

$$\phi = \sum_n C_n \phi_n,$$

для C_n находим

$$C_n = C \frac{\langle \phi_n | \psi_0 \rangle}{E_n - E}, \quad C_1 \equiv 0.$$

Подставляя эти выражения в условие разрешимости $\langle \phi | \psi_0 \rangle = 0$, получим дисперсионное соотношение

$$f(E) \equiv \sum_n' \frac{\langle \psi_0 | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi_0 \rangle}{E_n - E} = 0. \quad (71)$$

Штрих над знаком суммы означает, что в сумме отсутствует слагаемое с энергией $E_1 = 0$ (энергии E_1 соответствует сдвиговая мода $\phi_1 = \partial \psi_0 / \partial x$).

Рассмотрим далее энергетический интервал между энергией основного состояния $E_0 < 0$ и энергией первого положительного уровня E_2 . В этом интервале $f(E)$ монотонно ($\partial f / \partial E > 0$) возрастает от $-\infty$ при $E = E_0$ до $+\infty$ при $E = E_2$. Если $f(E)$ при $E = 0$ отрицательна, то дисперсионное уравнение не имеет отрицательных собственных значений и солитон устойчив. Если $f(0) > 0$, то имеется одно собственное значение $E < 0$ и соответственно солитон неустойчив.

Для того чтобы найти $f(0)$, заметим, что

$$f(0) = \sum_n' \frac{\langle \psi_0 | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi_0 \rangle}{E_n} \equiv \langle \psi_0 | L_1^{-1} | \psi_0 \rangle.$$

Далее, дифференцируя стационарное НУШ

$$-\lambda^2 \psi_0 + \partial_x^2 \psi_0 + 2|\psi_0|^2 \psi_0 = 0$$

по λ^2 , получим

$$L_1 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} \right) = -\psi_0,$$

или

$$\langle \psi_0 | L_1^{-1} | \psi_0 \rangle = - \left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} \right. \right\rangle = - \frac{1}{2} \frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2}.$$

В результате мы приходим к так называемому критерию Вахитова–Колоколова [19]: если

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0, \quad (72)$$

то солитон устойчив, и соответственно солитон неустойчив при другом знаке производной.

Этот критерий справедлив при произвольных размерности D и зависимости нелинейного сдвига от $|\psi|^2$ (т.е. при замене $|\psi|^2$ в НУШ произвольной функцией $f(|\psi|^2)$).

Данный критерий имеет простой физический смысл. Величина $\varepsilon = -\lambda^2/2$ для стационарного НУШ представляет собой энергию связанного состояния — солитона. Если при добавлении "одной" частицы энергия связанного состояния уменьшается, то такая ситуация будет устойчивой. Если при добавлении "одной" частицы уровень $-\lambda^2$ смещается в область энергий непрерывного спектра, то солитон будет неустойчив.

Зависимость N_s от λ легко находится для кубического НУШ: $N_s \propto \lambda^{2-D}$. Отсюда следует устойчивость одномерных солитонов кубического НУШ и неустойчивость трёхмерных солитонов. Двумерный случай является вырожденным.

5.2. Устойчивость солитонов для взаимодействия первой и второй гармоник

Рассмотрим систему (30), (31), описывающую взаимодействие первой и второй гармоник, и покажем, как процедура вывода критерия Вахитова–Колоколова может быть применена в данном примере. Солитонные решения для взаимодействия первой и второй гармоник $\psi_1(x, t) = \psi_{1s}(x) \exp(i\lambda^2 t)$, $\psi_2(x, t) = \psi_{2s}(x) \exp(2i\lambda^2 t)$ определяются из уравнений для амплитуд ψ_{1s} и ψ_{2s} :

$$-\lambda^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_1'' \psi_1 = -2\psi_2 \psi_1, \quad (73)$$

$$-2\lambda^2 \psi_2 - \Omega \psi_2 + \frac{1}{2} \omega_2'' \partial_x^2 \psi_2 = -\psi_1^2. \quad (74)$$

Здесь решение ψ_{1s} и ψ_{2s} предполагается действительным и не имеющим узлов, т.е. отвечающим основному солитонному решению (индекс s у ψ_1 и ψ_2 опущен). Рассмотрим малые возмущения на фоне этого солитонного решения, положив

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= (\psi_{1s} + u_1 + iv_1) \exp(i\lambda^2 t), \\ \psi_2(x, t) &= (\psi_{2s} + u_2 + iv_2) \exp(2i\lambda^2 t). \end{aligned}$$

Линеаризация системы (30), (31) приводит к линейным (гамильтоновым) уравнениям

$$u_t = \frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \mathbf{v}}, \quad v_t = -\frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \mathbf{u}}, \quad (75)$$

где \tilde{H} , как и для НУШ, — вторая вариация $F = H + \lambda^2 N$,

$$\tilde{H} = \langle \mathbf{v} | L_0 | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | L_1 | \mathbf{u} \rangle. \quad (76)$$

Здесь \mathbf{u} и \mathbf{v} — векторы с компонентами u_1, u_2 и v_1, v_2 соответственно, а N задаётся выражением (32). Дифференциальные операторы второго порядка L_0 и L_1 в данном случае являются (2×2) -матричными операторами:

$$L_{0,1} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega_1'' \partial_x^2 \mp 2\psi_2 & -2\psi_1 \\ -2\psi_1 & 2\lambda^2 - \frac{1}{2} \omega_2'' \partial_x^2 - \Omega \end{pmatrix}.$$

Оба оператора, как и в случае НУШ, являются самосопряжёнными. С точки зрения квантовой механики эти операторы соответствуют операторам Шрёдингера для нерелятивистской частицы со спином $S = 1/2$ в неоднородном магнитном поле. Для таких операторов, как известно, осцилляционная теорема несправедлива. Основная собственная функция не имеет нулей, но

соответствие между числом нулей и номером уровня, присущее скалярному оператору Шрёдингера, здесь отсутствует. Данное несоответствие, как мы увидим ниже, не позволяет сделать такие же заключения об устойчивости солитонов, как для НУШ. Критерии типа Вахитова–Колоколова для таких матричных систем могут быть использованы только в качестве достаточного условия неустойчивости, то же утверждение справедливо и для трёхволновой системы.

Что касается свойств операторов L_0 и L_1 , то они похожи на аналогичные для НУШ. Неотрицательность оператора L_0 следует из того, что если вместо v_1 и v_2 ввести новые функции χ_1 и χ_2 , задаваемые соотношениями

$$v_1 = \psi_1 \chi_1, \quad v_2 = \psi_2 \chi_2,$$

то $\langle v | L_0 | v \rangle$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle v | L_0 | v \rangle &= \frac{1}{2} \int (\omega_1'' \psi_1^2 \chi_1^2 + \omega_2'' \psi_2^2 \chi_2^2) dx + \\ &+ \int \psi_1^2 \psi_2 (2\chi_1 - \chi_2)^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда неотрицательность L_0 становится очевидной, а для собственного вектора основного состояния

$$\chi_1 = c_1, \quad \chi_2 = c_2, \quad 2c_1 = c_2,$$

или

$$v_0 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 2\psi_2 \end{bmatrix}.$$

Этот собственный вектор, как и для НУШ, явно входит в выражение для $\delta N = 2 \int (\psi_1 u_1 + 2\psi_2 u_2) dx \equiv 2 \langle v_0 | u \rangle$, которое равно нулю в силу сохранения N . Как и в случае НУШ, $\delta N = 0$ представляет собой условие разрешимости линейной системы (75).

Последующий анализ подобен тому, который был проведён для НУШ. Вначале нужно рассмотреть задачу для собственных значений оператора L_1 :

$$L_1 |\phi\rangle = E |\phi\rangle + C |v_0\rangle, \quad (77)$$

затем разложить $|\phi\rangle$ по полному набору собственных функций $\{|\phi_n\rangle\}$ оператора L_1 . В результате решение уравнения (77) будет выражаться в виде

$$|\phi\rangle = C \sum_n \frac{|\phi_n\rangle \langle \phi_n | v_0 \rangle}{E_n - E}.$$

Аналогично, условие разрешимости приводит к дисперсионному соотношению

$$f(E) \equiv \sum_n \frac{\langle v_0 | \phi_n \rangle \langle \phi_n | v_0 \rangle}{E_n - E} = 0. \quad (78)$$

Штрих над знаком суммы, как и ранее, означает отсутствие в сумме слагаемого с $E = 0$, поскольку $\langle \Psi_x | v_0 \rangle = 0$, $L_1 |\Psi_x\rangle = 0$, где

$$\langle \Psi_x | = (\psi_{1x}, \psi_{2x}).$$

Вплоть до этого момента всё выглядит так же, как и в случае НУШ. Отличие появляется при анализе функции $f(E)$. Теперь осцилляционная теорема уже не верна.

Следовательно, ниже уровня $E = 0$ возможно наличие нескольких уровней. Поэтому дисперсионное уравнение может иметь отрицательные корни $E < 0$, независимо от того, является ли производная $\partial N_s / \partial \lambda^2$ положительной или отрицательной. В результате можно сформулировать только достаточный критерий неустойчивости, который имеет тот же вид, что и для солитонов НУШ:

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} < 0. \quad (79)$$

Но мы не можем ничего сказать относительно устойчивости в общем случае. Критерий устойчивости

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0$$

будет справедлив, только если при энергиях, меньших $E_0 = 0$, оператор L_1 имеет лишь один (основной) уровень, но это не является общим случаем. Таким образом, критерии устойчивости типа Вахитова – Колоколова применительно к векторным моделям дают только достаточное условие неустойчивости солитонов.

Тем не менее комбинация критерия Вахитова – Колоколова и метода Ляпунова может дать полный ответ при исследовании устойчивости. В заключение этого раздела мы обсудим один пример, в котором на основе комбинированного метода с помощью численного интегрирования системы (73), (74) удаётся сделать более или менее определённое заключение об устойчивости солитонов. В работе [56] численно найдены зависимости H и N (для одномерных солитонных решений) от λ при ненулевой частотной расстройке, $\Omega \neq 0$. Численное интегрирование показало, что для $\Omega < 0$ обе зависимости являются монотонными: N возрастает с увеличением λ , а H — уменьшается. В результате было показано, что существует только одна ветвь солитонных решений с однозначной зависимостью $H(N)$. При $\Omega > 0$ зависимость $N(\lambda)$ содержит две ветви. Первая ветвь лежит в области $0 < \lambda < \lambda_{\min}$. Функция $N(\lambda)$ монотонно возрастает при приближении λ к нулю. При $\lambda = \lambda_{\min}$ функция $N(\lambda)$ имеет минимум. В соответствии с критерием (79) вся эта ветвь солитонных решений будет неустойчивой. При $\lambda > \lambda_{\min}$ N монотонно возрастает, но линейный критерий устойчивости не может быть применён к этим решениям. Однако зависимость $H(\lambda)$ даёт возможность сделать некоторое заключение об устойчивости. Функция $H(\lambda)$ имеет максимум в точке $\lambda = \lambda_{\min}$, так что H как функция N имеет в этой точке особенность в виде каспа, которая разделяет две ветви солитонных решений. Верхняя ветвь имеет большие значения H , чем нижняя. Если предположить, что в данном интервале изменения N нет других солитонных решений (численно это весьма непростая задача), тогда вся нижняя ветвь представляет собой устойчивое семейство солитонных решений.

6. Волновые коллапсы

Волновой коллапс представляет собой другой вариант эволюции нелинейных волновых систем, альтернативный в определённом смысле солитонному сценарию. Как мы видели в разделах 2–4, устойчивые по Ляпунову солитоны возникали тогда, когда гамильтониан при фиксации числа частиц N или других интегралов движения представлял собой ограниченный снизу функционал,

нижняя граница которого отвечала устойчивому по Ляпунову солитону. Возникает вопрос: а что будет, если гамильтониан не ограничен снизу? Как будет себя вести система в этом случае? Один из возможных вариантов её поведения — это коллапс, образование особенности за конечное время. Тип возникающей особенности зависит от конкретной физической задачи. В данном обзоре мы ограничимся в основном рассмотрением волнового коллапса, описываемого НУШ (1) при $D \geq 2$.

Хорошо известно (см., например, [17, 29, 39]), что с увеличением размерности D роль нелинейных эффектов возрастает, аналогично тому, как в теории фазовых переходов возрастает роль кооперативных эффектов при увеличении числа соседей, например, в модели Изинга. Для НУШ это видно, в частности, из того, как изменяется H при масштабных преобразованиях, $\psi \rightarrow a^{-D/2} \psi(\mathbf{r}/a)$, сохраняющих число частиц:

$$H(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a^D} \right). \quad (80)$$

В одномерном случае ($D = 1$) $H(a)$ имеет минимум, соответствующий солитону (устойчивому). В двумерном случае $I_{1s} = I_{2s}$, поэтому на всём солитонном семействе $H(a) \equiv 0$. При $D = 3$ вместо минимума $H(a)$ имеет максимум (в действительности — седловую точку), что указывает на неустойчивость солитона. Кроме того, $H(a)$ оказывается неограниченной функцией при $a \rightarrow 0$, что представляет собой один из критериев коллапса [39] (см. также [57]). В этом случае коллапс можно рассматривать в качестве нелинейной стадии неустойчивости солитона.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, воспользуемся вариационным подходом. Для (1) в качестве пробной функции выберем ψ в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a^{-3/2} \psi_s \left(\frac{\mathbf{r}}{a} \right) \exp(i\lambda^2 t + i\mu r^2),$$

где $a = a(t)$ и $\mu = \mu(t)$ — неизвестные функции времени. После подстановки этого анзаца в действие

$$S = \frac{i}{2} \int (\psi_t \psi^* - \text{c.c.}) dt d\mathbf{r} - \int H d\mathbf{r}$$

и интегрирования по пространственным переменным возникает укороченное действие для двух функций, $a = a(t)$ и $\mu = \mu(t)$. Легко проверяется, что два уравнения Лагранжа, для $a(t)$ и $\mu(t)$, сводятся к одному уравнению второго порядка для a , которое имеет вид уравнения Ньютона

$$C\ddot{a} = -\frac{\partial H}{\partial a}, \quad (81)$$

где $C = \int \xi^2 |\psi_0(\xi)|^2 d\xi$ играет роль массы частицы, а функция (80) имеет смысл потенциальной энергии. Поведение $a(t)$ зависит от величины полной энергии

$$E = C \frac{\dot{a}^2}{2} + H(a),$$

начального положения "частицы" и размерности D . При $D = 1$ солитон реализует минимум потенциальной энергии $H(a)$, что является причиной его устойчивости. При $D = 3$, если "частица" находится в начальный момент в

максимальной точке, система, в зависимости от направления движения (по направлению к центру $a = 0$ или в противоположном направлении), будет коллапсировать ($\psi \rightarrow \infty$) или расширяться ($\psi \rightarrow 0$) вследствие дисперсии. Для коллапсирующего режима, который соответствует падению частицы на центр, $a(t)$ вблизи особенности подчиняется степенному закону:

$$a(t) \sim (t_0 - t)^{2/5}, \quad (82)$$

где время коллапса t_0 является конечным, равным времени падения частицы в потенциале $H(a)$. Как показано в [39], такая асимптотика $a(t)$ вблизи сингулярной точки с точностью до константы совпадает с точным квазиклассическим решением коллапсирующего типа, которое при $t \rightarrow t_0$ стремится к компактному распределению вида

$$|\psi| \rightarrow \lambda \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{при} \quad \xi = \frac{r}{a(t)} \leq 1$$

с $\lambda \sim (t_0 - t)^{-3/5}$.

Уже из проведённого выше рассмотрения можно сделать несколько выводов. Во-первых, влияние нелинейности возрастает с увеличением размерности пространства. Устойчивые солитоны встречаются для систем с малой размерностью, в то время как при больших размерностях мы должны ожидать не солитонов, а взрывных событий, в результате которых происходит формирование особенностей. Во-вторых, одним из критериев коллапса является неограниченность гамильтониана на малых масштабах. В этом случае коллапс можно интерпретировать как падение частицы на центр в самосогласованном потенциале, неограниченном на малых масштабах [39].

6.1. О роли излучения

В действительности, однако, картина формирования особенности является более сложной, чем рассмотренная выше. С самого начала мы имеем дело с пространственно распределённой системой, т.е. с системой, имеющей бесконечное число степеней свободы, и поэтому очевидно, что редукция НУШ с помощью вариационного подхода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (81) не учитывает роли излучения волн. Это процесс, как мы видели выше, является принципиально важным при взаимодействии солитонов. Как показано в работе [58], он является определяющим при релаксации импульса к солитону в одномерном НУШ, интегрируемом с помощью метода обратной задачи рассеяния [40]. В последнем случае вариационный подход [59, 60], достаточно популярный в настоящее время, даёт неверный ответ, предсказывая колебания солитона. Однако точный анализ показывает, что начальный импульс релаксирует к солитону колебательным образом за счёт излучения. Причём частота релаксационных колебаний далека от той, которая получается при вариационном подходе.

В случае неограниченности H снизу, когда мы ожидаем коллапса, излучение волн малой амплитуды является одним из механизмов формирования особенности. Чтобы показать это, мы можем воспользоваться той же аргументацией о роли излучения в формировании солитонов, что и в разделе 3.

Пусть гамильтониан в некоторой области G отрицателен: $H_G < 0$. Тогда в области G будет справедливо следующее неравенство (ср. с (49))

$$\max_{x \in G} |\psi|^2 \geq \frac{|H_G|}{N_G}.$$

Предположим, что вне области G значение $|\psi|$ мало. Рассмотрим, какую роль играет излучение волн из этой области. Очевидно, что излучение уносит положительную энергию, поскольку на больших расстояниях нелинейные эффекты для излучённых волн малы. Таким образом, вследствие излучения H_G становится всё большим по абсолютной величине, а N_G уменьшается. Поэтому $\max |\psi|^2$ будет неограниченно возрастать ввиду неограниченности гамильтониана снизу. Именно поэтому мы можем говорить, что излучение способствует коллапсу. Излучение в нелинейной волновой системе, таким образом, играет роль трения [17, 27, 29]. Кроме того, излучение ускоряет сжатие коллапсирующей области, что, в частности, приводит к существованию сжатия по автомодельному закону

$$r \sim (t_0 - t)^{1/2}, \quad (83)$$

отличного от квазиклассического сжатия (82). Приведённая выше аргументация, однако, не позволяет сделать вывод о конечности времени коллапса. Ответ на этот вопрос даёт теорема вириала.

6.2. Теорема вириала

Точный критерий образования особенности в рамках НУШ может быть получен из теоремы вириала. В классической механике теорема вириала легко может быть выведена, если вычислить вторую производную по времени от момента инерции и затем усреднить полученный результат, что даёт соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергий частиц, если взаимодействие между частицами имеет степенной вид.

В 1971 г. Власов, Петрищев и Таланов [18] нашли, что теорема вириала может быть применена к двумерному НУШ. Аналогом момента инерции для двумерного НУШ является среднеквадратичный размер распределения $\langle r^2 \rangle = N^{-1} \int r^2 |\psi|^2 dr$. Прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 dr = 2H. \quad (84)$$

Поскольку H — сохраняющаяся величина, уравнение (84) может быть дважды проинтегрировано:

$$\int r^2 |\psi|^2 dr = Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (85)$$

где C_1, C_2 — дополнительные интегралы движения, существование которых связано с наличием двух симметрий нётеровского типа: линзового преобразования (факт, установленный В.И. Талановым [22] в 1970 г.) и масштабных преобразований [61, 62].

Отсюда можно легко увидеть, что $\langle r^2 \rangle$ для любого распределения с отрицательным гамильтонианом,

$$H < 0, \quad (86)$$

независимо от C_1 , C_2 обращается в нуль за конечное время, что в силу сохранения N означает образование особенности поля ψ [18]. Условие (86) представляет собой знаменитый критерий Власова–Петрищева–Таланова. Этот критерий, полученный в 1971 г., является одним из основополагающих результатов в теории волновых коллапсов. Это был первый строгий результат для нелинейных волновых систем с дисперсией. Он показал, что образование особенности за конечное время возможно, несмотря на наличие линейной дисперсии волн, препятствующей, например, в линейной оптике возникновению точечных особенностей — фокусов.

Следует подчеркнуть, что критерий (86) является только *достаточным*, но не необходимым условием возникновения коллапса. Например, если в некоторой части системы, хорошо изолированной от остальной системы, гамильтониан H отрицателен, то в этой части системы будет развиваться коллапс, вне зависимости от того, является ли общий гамильтониан всей системы положительным или отрицательным.

6.3. Сильный коллапс

Отметим, что при $D = 2$ солитону соответствует равенство $H = 0$ с числом частиц $N = N_s$. Более того, при $N < N_s$ справедливо неравенство

$$H \geq \frac{1}{2} I_1 \left(1 - \frac{N}{N_s}\right) > 0$$

и, как следствие, коллапс оказывается невозможным [47]. В этом случае амплитуда волн при $t \rightarrow \infty$ вследствие дисперсии/дифракции стремится к нулю. Таким образом, можно говорить, что солитон для двумерного НУШ представляет собой сепаратрису, разделяющую многообразия коллапсирующих и неколлапсирующих распределений.

Из соотношения (85) можно увидеть, что для режимов с $H < 0$ характерный размер a коллапсирующей области ведёт себя как

$$a \sim (t_0 - t)^{1/2},$$

в полном соответствии с автомодельным законом (83).

Точный анализ [63], однако, показывает, что

$$a^2(t) \sim \frac{t_0 - t}{\log |\log(t_0 - t)|},$$

причём пространственный профиль ψ асимптотически стремится к солитонному (см. также [64–68]). Коллапс тогда сопровождается экспоненциально малым излучением. При этом захватываемая в особенность энергия, с точностью до постоянного множителя совпадающая с N , оказывается *конечной*, равной энергии двумерного солитона. Именно поэтому такой коллапс называют *сильным коллапсом* [39].

Следует отметить, что двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера (1) относят к критическому НУШ. Для критического НУШ, как мы видели, масштабные преобразования представляют собой дополнительную симметрию. В частности, как следствие, дисперсионный ($\sim I_1$) и нелинейный ($\sim I_2$) члены в H при таких преобразованиях ведут себя одинаковым образом. Для НУШ со степенной нелинейностью (46) критическому поведению соответствуют значения $\sigma = 1 + 2/D$. При меньших σ

гамильтониан при фиксированном числе частиц ограничен снизу и солитонное решение, соответствующее минимуму H , оказывается устойчивым.

6.4. Коллапс в пограничном слое

Критическое поведение возникает не только в случае НУШ. Например, к критическим относится двумерная модель

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{k} u - 6u u_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u} \quad (87)$$

с гамильтонианом

$$H = \int \left(\frac{1}{2} u \hat{k} u - u^3 \right) d\mathbf{r} \equiv \frac{1}{2} I_1 - I_2.$$

Здесь \hat{k} — интегральный оператор, фурье-образ которого — модуль $|\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Уравнение (87) описывает низкочастотные колебания пограничного слоя при больших числах Рейнольдса, $Re \gg 1$. Средний профиль скорости (параллельной оси x) $v = U(z)$ ($0 \leq z < \infty$) предполагается монотонно возрастающей функцией, стремящейся при $z \rightarrow \infty$ к константе. Безразмерная амплитуда u связана с флуктуациями скорости вдоль потока соотношением

$$\delta v_x \approx -6huU'(z), \quad (88)$$

где $h = U(0)/U'(0)$ — толщина пограничного слоя. Уравнение (87), впервые выведенное В. Шрирой [69], представляет собой двумерное обобщение уравнения Бенжамина–Оно, описывающего длинные волны в стратифицированных жидкостях. В одномерном случае уравнение (87) было выведено в работах [70, 71] при учёте вязкости (малой).

Масштабные преобразования, сохраняющие x -компоненту импульса $P_x = 1/2 \int u^2 d\mathbf{r}$, аналогичные (52),

$$u(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{1}{a^{D/2}} u\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right),$$

где $D = 1, 2$, приводят к следующей зависимости гамильтониана H от масштабного параметра a :

$$H(a) = \frac{1}{2} \frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{a^{D/2}}.$$

Отсюда следует, что данная модель становится критической при $D = 2$. При $D = 1$ гамильтониан оказывается ограниченным снизу, а его минимуму соответствует солитон Бенжамина–Оно. Это решение вида $u = u_s(x - Vt, y)$ находится точно:

$$u_s = \frac{2V}{3[(x - Vt)^2 V^2 + 1]}, \quad V > 0. \quad (89)$$

Однако такой солитон оказывается неустойчивым к двумерным возмущениям [72, 73]. В длинноволновом пределе инкремент этой неустойчивости имеет вид [72]

$$\Gamma = \frac{k_y V}{\sqrt{2}}.$$

На рисунке 2 представлена эволюция $u(x, y, t)$, демонстрирующая указанную неустойчивость. Начальное условие представляет собой возмущённую периодиче-

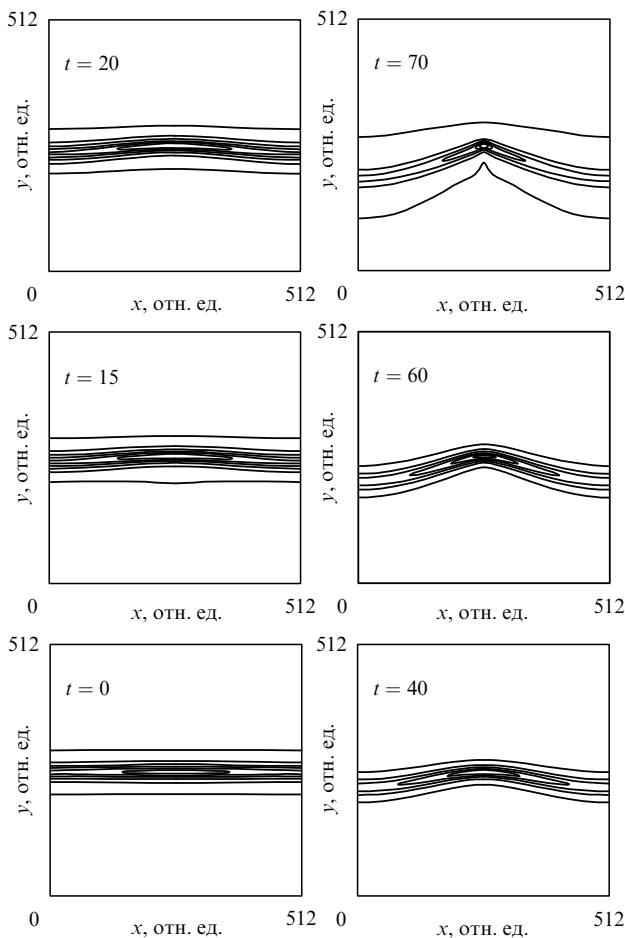


Рис. 2. Эволюция $u(x, y, t)$ (линии уровня) для начального условия (90), демонстрирующая её неустойчивость и формирование кластеров.

скую волну

$$u_{\text{ini}}(x, y) = u_p(x) \left(1 + 0,1 \cos \frac{2\pi y}{L_y} \right), \quad (90)$$

где $u_p(x)$ — точное одномерное решение уравнения Бенжамина — Оно в виде периодической волны,

$$u_p(x) = \frac{k}{3} \frac{\sinh(k/V)}{\cosh(k/V) - \cos(kx)} - 1. \quad (91)$$

При $k \rightarrow 0$ (91) превращается в солитонное решение (89). Можно установить, что решение в виде периодической волны может быть представлено как периодическая решётка солитонов с периодом $2\pi/k$ — на одном своём периоде волна (91) содержит один солитон.

Для данного варианта начальных условий (90) $k = 0,0625$, $V = 0,4$, а размер области L_x совпадает с периодом волны (90).

Описанная выше неустойчивость аналогична неустойчивости Кадомцева — Петвиашвили (КП) [74, 75] для солитонов звукового типа в средах с положительной дисперсией (см. также [76, 77]). (О причине этой неустойчивости см. в разделе 6.5.) В двумерном случае данная модель имеет решение в виде цилиндрически симметричного солитона без нулей. Такое решение, которое было найдено численно в работе [78], играет ту же роль, что и

таунсовская мода для двумерного НУШ [23]: при $P_x < P_{x, \text{cr}}$, где $P_{x, \text{cr}}$ — значение x -компоненты импульса на основном (без нулей) солитонном решении, гамильтониан оказывается положительным с минимумом, достигающим нулевого значения при $u \rightarrow 0$. В этом случае коллапс невозможен, как и в аналогичном случае для двумерного НУШ. Гамильтониан оказывается неограниченным снизу для состояний с отрицательными значениями H . Численно в работах [72, 73] было подтверждено, что коллапс в системе (88) возникает при $H < 0$, коллапсирующее решение оказывается цилиндрически симметричным и приближается к солитонному распределению при $t \rightarrow t_0$. Начальное условие выбиралось в виде

$$u(\mathbf{r}) = \frac{2/3|\mathbf{V}|}{1 + (V_x x)^2 + (V_y y)^2}.$$

Параметры V_x и V_y варьировались таким образом, чтобы выполнялись условия $P_x > P_{x, \text{cr}}$ и $H < 0$. При приближении к особенности анизотропия пика исчезала и распределение становилось симметричным. Типичный пример коллапса приведён на рис. 3.

В заключение этого раздела укажем на серию интересных экспериментов [79, 80], выполненных в течение нескольких лет, по возбуждению когерентных структур в пограничном слое при обдуве пластины. Возбуждение структур осуществлялось с помощью вибрирующей механической системы, установленной на переднем крае пластины. Согласно экспериментальным данным, на начальной стадии происходило возбуждение одномерных солитонов, а позднее — на больших расстояниях от края пластины — солитоны оказывались неустойчивыми, в результате чего формировались так называемые шипы — трёхмерные когерентные структуры. Далее наблюдалась самофокусировка этих структур. На более поздних стадиях развития шипов происходило возникновение вихрей и их сепарация. Данные теории и численное моделирование, проведённое в работах [72, 73], качественно объясняют всю последовательность экспериментальных наблюдений, вплоть до образования вихрей, когда уравнение (87) становится неприменимым. Следует отметить, что более тщательный анализ [70, 71], основанный на одномерной модели (87), т.е. в рамках одномерного уравнения Бенжамина — Оно, показал до-

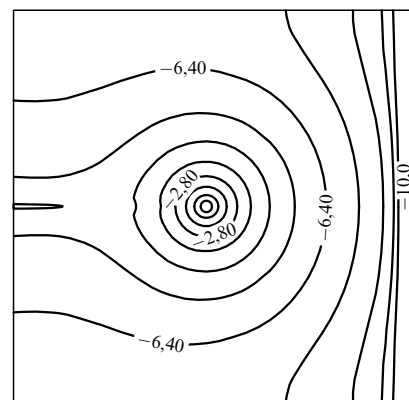


Рис. 3. Линии уровня $u(x, y)$ при $t = 45$ в режиме коллапса. Контуры соответствуют значениям $u(x, y)$ от $-10,0$ до $0,8$ с интервалом $0,90000$.

статочное хорошее количественное согласие между теорией и экспериментом.

Возникает естественный вопрос: почему в других экспериментах не наблюдались такие яркие явления, как одномерные солитоны, их неустойчивость и самофокусировка? По нашему мнению, ответ на этот вопрос связан с характером коллапса в пограничном слое — коллапс является сильным, т.е. для его возникновения требуется конечная энергия импульса. Если амплитуда в импульсе недостаточно велика, то такого явления не возникает.

6.5. Слабый коллапс

В трёхмерном случае ($D = 3$) вириальное соотношение (84) для НУШ принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 2H - \frac{1}{2} I_2. \quad (92)$$

Соответственно, ввиду положительности I_2 , равенство (92) может быть заменено неравенством

$$N\langle r^2 \rangle < Ht^2 + C_1 t + C_2, \quad (93)$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования, определяемые из начальных условий. Соотношение (93) даёт тот же самый критерий коллапса, что и при $D = 2$: $H < 0$ [17].

Однако критерий $H < 0$ для трёхмерного НУШ является достаточно мягким. Как показано в работах [81, 82], этот критерий может быть уточнён. Более точный критерий задаётся двумя условиями:

$$H < H_s, \quad I_1 > I_{1s}. \quad (94)$$

Критерии (94) ещё раз показывают, что солитон представляет собой седловую точку. Когда система переходит через эту седловую точку, коллапс становится возможным.

Более точное неравенство, следующее из вириального соотношения (92) при $D = 3$, имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} \leq 3(H - H_s). \quad (95)$$

Интегрирование соотношения (95) даёт:

$$N\langle r^2 \rangle \leq \frac{3}{2} (H - H_s)t^2 + C_1 t + C_2,$$

где H_s — значение H на основном (без нулей) солитонном решении.

Далее рассмотрим автомодельную подстановку для уравнения (1) вида

$$\psi = \frac{1}{(t_0 - t)^{1/2 + i\alpha}} \chi(\xi). \quad (96)$$

Здесь автомодельная переменная $\xi = r(t_0 - t)^{-1/2}$ соответствует (83), а функция $\chi(\xi)$ предполагается сферически симметричной. Подстановка ψ в НУШ приводит к следующему уравнению для функции χ [39]:

$$i \left[\left(\frac{1}{2} + i\alpha \right) \chi + \frac{1}{2} \xi \chi_\xi \right] + \frac{1}{2} \chi_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \chi_\xi + |\chi|^2 \chi = 0, \quad (97)$$

в котором α играет роль спектрального параметра. Нас интересуют только регулярные решения (97), которые затухают на бесконечности. Очевидно, что при $\xi \rightarrow \infty$

χ удовлетворяет линейному уравнению

$$\left(\frac{1}{2} + i\alpha \right) \chi + \frac{1}{2} \xi \chi_\xi = 0. \quad (98)$$

Отсюда определяется асимптотика χ :

$$\chi \rightarrow \frac{C}{\xi^{1+2i\alpha}}, \quad (99)$$

где C — некоторая константа, которую без ограничения общности можно считать действительной и, более того, положительной. Требование регулярности решения исключает неопределённость в выборе констант α и C . Фактически мы имеем дело с нелинейной спектральной задачей для уравнения (97), численное решение которой даёт

$$\alpha = 0,545, \quad C = 1,01. \quad (100)$$

Обсудим теперь свойства автомодельного решения. Во-первых, для любой фиксированной точки физического пространства с координатой r соответствующая автомодельная координата ξ стремится к бесконечности при $t \rightarrow t_0$. Автомодельное решение при этом переходит в свою асимптотику (99), приобретая в физических переменных r особенность,

$$\psi \rightarrow \frac{C}{r^{1+2i\alpha}}, \quad (101)$$

которая не зависит от времени t .

Во-вторых, автомодельное решение не может существовать во всём пространстве сразу, оно может быть реализовано только в некоторой области с координатами $r < r_0$, где размер r_0 должен быть ограничен величиной $N/(4\pi C^2)$.

Особенность (101), которая "прорастает" в центре этой области при $r \rightarrow 0$, является интегрируемой. На первый взгляд, автомодельная подстановка (96) приводит к несохранению интеграла

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r} = (t_0 - t)^{1/2} \int |\chi_\xi|^2 d\xi \quad (102)$$

в результате появления множителя $(t_0 - t)^{1/2}$. С другой стороны, сохранение N означает, что интеграл (102) должен обращаться в бесконечность. Это есть случай, когда автомодельное решение рассматривается сразу для всего пространства. Однако в любой конечной области $r < r_0$ интеграл N остаётся конечным. Действительно, после подстановки (96) в (102) при $r < r_0$ имеем

$$N = (t_0 - t)^{1/2} 4\pi \int_0^{\xi_*} \xi^2 |\chi(\xi)|^2 d\xi, \quad \xi_* = r_0(t_0 - t)^{-1/2}. \quad (103)$$

При учёте асимптотики (99) интеграл в (103) линейно возрастает с увеличением верхнего предела при $t \rightarrow t_0$. Предположим, что размер r_0 достаточно велик. Тогда значение интеграла N в области $r < r_0$ должно приближаться к его значению в момент коллапса $t = t_0$. Иными словами, должно выполняться следующее соотношение:

$$\int_0^\infty \left(|\chi|^2 - \frac{C^2}{\xi^2} \right) \xi^2 d\xi = 0. \quad (104)$$

Численно было проверено, что соотношение (104) выполняется с высокой точностью для $\chi(\xi)$ и C , найденных в результате интегрирования уравнения (97).

Решение, построенное здесь, соответствует *слабому коллапсу*. В режиме слабого коллапса, формально говоря, в особенность $r = 0$ попадает нулевая энергия [39]. Фактически это означает, что если ψ_0 — характерная амплитуда, при которой происходит поглощение энергии (тогда уравнение (1) уже не справедливо), то количество диссипируемой энергии в одном акте будет порядка

$$\Delta N \sim \psi_0^2 r_0^3 \sim \frac{1}{\psi_0},$$

где $r_0 \sim 1/\psi_0$ — характерный размер области диссипации.

Автомодельное решение, соответствующее режиму слабого коллапса, описывает наиболее быстрый коллапс, в котором излучение играет первостепенную роль — в отличие от излучения в режиме квазиклассического коллапса (82), оно существенно ускоряет процесс формирования особенности, в результате чего только малая часть энергии достигает особенности.

Отметим, что режим слабого коллапса впервые наблюдался в численных экспериментах [83] и впоследствии в [84].

6.6. Режим чёрной дыры

Как мы видели в разделе 6.5, в режиме слабого коллапса происходит формирование независимой от времени особенности (101), что соответствует потенциалу с притяжением

$$U = -\frac{C^2}{r^2}, \quad (105)$$

где константа $C^2 > 1$. Как известно из квантовой механики (см., например, [85]), в этом случае возможно падение частицы на центр. Причём по мере приближения к центру $r = 0$ такое падение в квантовой механике становится всё более квазиклассическим.

Для всех волн, окружающих особенность, потенциал (105) будет служить аттрактором, т.е. для этих волн особенность играет роль воронки. Поскольку при слабом коллапсе диссипируемая в особенности энергия физически бесконечно мала, процесс захвата частиц в особенность с периферии — постколлапс — можно считать почти квазистационарным. Постколлапс характеризуется конечным потоком числа частиц в особенность. Как впервые было показано в работах [86, 87] (см. также [88–90]), вблизи сингулярной точки плотность $|\psi|^2$ в этом режиме ведёт себя как

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2r^2 |\log r|}.$$

Постоянный поток в воронку, обусловленный волнами, захватываемыми в особенность из периферии, обеспечивает существование долгоживущих "горящих" точек — точек, в которых происходит "сгорание" всей поступающей извне энергии. Такой режим называют также режимом *чёрных дыр*.

7. Роль дисперсии в коллапсе

Влияние дисперсии на коллапс является весьма существенным. Для стационарной самофокусировки света дисперсия волн не существенна: появление особеннос-

ти — фокуса — обусловлено конкуренцией нелинейности вследствие эффекта Керра и дифракции. В этом случае применимо двумерное НУШ, в котором роль времени играет координата z вдоль направления распространения пучка. В трёхмерном случае, однако, всё зависит от знака дисперсии — положительной или отрицательной, в частности, в оптике зависит от того, является ли дисперсия аномальной или нормальной. Трёхмерное НУШ (1) применимо для аномальной дисперсии. В случае нормальной дисперсии в (1) необходимо заменить оператор Лапласа гиперболическим оператором $\Delta_\perp - \partial^2/\partial z^2$, где $\Delta_\perp = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Поэтому НУШ вида

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta_\perp \psi - \psi_{zz} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (106)$$

часто называют гиперболическим нелинейным уравнением Шрёдингера. Другой знак в операторе второго порядка появляется из-за знака производной групповой скорости по частоте $\partial V_{gr}/\partial \omega$. Для нормальной дисперсии производная $\partial V_{gr}/\partial \omega$ отрицательна.

Гиперболический оператор в (106) существенно изменяет характер нелинейного взаимодействия. Если для аномальной дисперсии все "направления" эквивалентны, то для нормальной дисперсии вдоль z -направления вместо притяжения для (1) мы имеем отталкивание, в то время как в поперечном направлении сохраняется притяжение. Соответственно квазичастицы притягиваются друг к другу в поперечном направлении, что приводит к сжатию пучка поперёк оси z . Иначе говоря, в НУШ (106) масса квазичастиц в продольном направлении отрицательна, поэтому нелинейность способствует увеличению продольного масштаба пучка. В связи с этим главным является вопрос: способно ли поперечное сжатие пучка привести к образованию особенности, несмотря на продольное уширение пучка?

Мы покажем, что в рамках гиперболического уравнения Шрёдингера (106) в трёхмерной геометрии коллапс волнового пакета как целое невозможен на наиболее предпочтительной для коллапса стадии, когда импульс сжимается по всем трём направлениям. Идея доказательства основана на интегральных оценках для виртуальных уравнений.

Как и (1), уравнение (106) является уравнением гамильтонова типа с

$$H = \int |\nabla_\perp \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} - \int \frac{1}{2} |\psi|^4 d\mathbf{r} \equiv I_\perp - I_z - I_2. \quad (107)$$

Разные знаки первого и второго интегралов соответствуют разному нелинейному поведению в поперечном и продольном направлениях.

Рассмотрим поведение среднеквадратичных размеров $\langle r_\perp^2 \rangle$ и $\langle z^2 \rangle$ соответственно вдоль и поперёк оси z . Вычисления, аналогичные (84), дают

$$N \frac{d^2}{dt^2} \langle r_\perp^2 \rangle = 4 \left(2 \int |\nabla_\perp \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right), \quad (108)$$

$$N \frac{d^2}{dt^2} \langle z^2 \rangle = 8 \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} + 2 \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \quad (109)$$

Для величин $\langle r_\perp^2 \rangle$ и I_\perp из (108), так же как и для $\langle z^2 \rangle$ и I_z из (109), могут быть записаны соотношения неопреде-

лённости

$$I_{\perp} \langle r_{\perp}^2 \rangle \geq N, \quad I_z \langle z^2 \rangle \geq \frac{N}{4}. \quad (110)$$

С помощью соотношений (110) и определения H (107) можно оценить правые части уравнений (108) и (109):

$$N \frac{d^2}{dt^2} \langle r_{\perp}^2 \rangle = 8H + 8I_z \geq -4H + 2 \frac{N}{\langle z^2 \rangle}, \quad (111)$$

$$N \frac{d^2}{dt^2} \langle z^2 \rangle = -4H + 4I_z + 4I_{\perp} > -4H + 4 \frac{N}{\langle r_{\perp}^2 \rangle}. \quad (112)$$

Рассмотрим теперь режим сжатия по всем направлениям как наиболее предпочтительный с точки зрения коллапса, когда

$$\frac{d}{dt} \langle r_{\perp}^2 \rangle < 0, \quad \frac{d}{dt} \langle z^2 \rangle < 0,$$

и покажем, что коллапс, понимаемый как уменьшение до нуля среднеквадратичных поперечного и продольного масштабов ($\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$, $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$), в этом случае невозможен.

Во-первых, докажем, что среднеквадратичный продольный масштаб z^2 волнового пакета не может обратиться в нуль, если $d\langle z^2 \rangle/dt < 0$. Рассмотрим уравнение (109), из которого с учётом (110) можно получить замкнутое неравенство для $\langle z^2 \rangle$:

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} \geq 8I_z \geq 2 \frac{N}{\langle z^2 \rangle}. \quad (113)$$

Формула (113) представляет собой дифференциальное неравенство второго порядка. Его первое интегрирование, аналогичное нахождению интеграла энергии в механике, при $d\langle z^2 \rangle/dt < 0$ даёт соотношение

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} \right)^2 - 2 \log \langle z^2 \rangle \leq \mathcal{E}(0), \quad (114)$$

где $\mathcal{E}(0)$ — начальное значение $\mathcal{E}(t)$. Если $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$, то левая часть неравенства (114) стремится к бесконечности из-за наличия логарифмического члена, что приводит к нарушению неравенства. Таким образом, сжатие $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$ невозможно.

Покажем теперь, что коллапс в поперечном направлении (когда $\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$) также невозможен. С этой целью умножим неравенство (111) на $d\langle z^2 \rangle/dt < 0$, а неравенство (112) — на $d\langle r_{\perp}^2 \rangle/dt < 0$, просуммируем результаты, а затем проинтегрируем полученное выражение по времени от нуля до t . В результате получим

$$E(t) = N \frac{d\langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt} \frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} - 8H \langle z^2 \rangle + 4H \langle r_{\perp}^2 \rangle - 2N \log \langle z^2 \rangle - 4N \log \langle r_{\perp}^2 \rangle \leq E(0), \quad (115)$$

где $E(0)$ — значение $E(t)$ в начальный момент времени. Из неравенства (115) немедленно следует, что коллапс на стадии всестороннего сжатия невозможен, поскольку первый член в правой части (115) положителен по определению, члены, пропорциональные H , конечны, а логарифмический член становится бесконечно большим при $\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$. Это не согласуется с тем фактом, что функция $E(t)$ ограничена сверху начальным значением $E(0)$. Отсюда следует, что коллапс трёхмерного волнового пакета как целое невозможен на наиболее "опасной" стадии сжатия по всем направлениям [91] (см. также [92]).

Означает ли это, что коллапс в такой системе вообще невозможен? Строго говоря — нет, потому что, во-первых, критерии типа Власова–Петрищева–Таланова являются достаточными и, во-вторых, коллапс, если он возможен, следует искать для режимов, соответствующих разлёту газа квазичастиц в продольном направлении, который приводит к увеличению продольного масштаба. С другой стороны, возрастание продольного масштаба ведёт к уменьшению погонной плотности частиц. Для двумерного уравнения Шрёдингера, как мы видели, коллапс невозможен при $N < N_{\text{кр}}$. Следует отметить, что, несмотря на существенный интерес к этой проблеме (см., например, [93–95]), она до сих пор остаётся не до конца решённой.

8. Коллапс в уравнениях типа уравнений Кадомцева–Петвиашвили

Наконец, обсудим вопрос о коллапсе в системах типа Кадомцева–Петвиашвили (КП). Начнём с классического уравнения КП с положительной дисперсией

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t + u_{xxx} + 6uu_x) = 3\Delta_{\perp} u, \quad (116)$$

которое описывает распространение пучка слабонелинейных волн звукового типа в средах с малой дисперсией. Второе слагаемое в левой части уравнения (116) ответственно за дисперсию, третье слагаемое описывает эффекты укручения звуковой волны, а член в правой части — дифракцию ($\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2$). Уравнение (116) записано в системе координат, движущейся со скоростью звука c_s вдоль оси x . Все члены, ответственные за нелинейность, дисперсию и дифракцию, малы по сравнению с "быстрым" распространением со скоростью звука, вследствие чего уравнение КП обладает дополнительным интегралом — адиабатическим инвариантом $P = (1/2) \int u^2 dr$, совпадающим с x -проекцией импульса. Важно также, что P с точностью до постоянного множителя представляет собой полную энергию.

Следует сказать несколько слов о звуковых волнах с положительной дисперсией. К таким волнам относятся, например, быстрые магнитозвуковые волны в плазме с малым параметром β — отношением теплового давления плазмы к давлению магнитного поля ($\beta \ll 1$) — для направлений распространения, не близких к продольному и поперечному направлениям (по отношению к магнитному полю). Другой пример положительной дисперсии демонстрируют при определённых условиях акустические волны в жидком гелии [96]; наконец, отметим поверхностные волны на мелкой воде, когда дисперсия (положительная) за счёт капиллярности превосходит дисперсию, обусловленную конечностью глубины (см., например, [97]).

Уравнение (116), которое относится к гамильтонову типу, может быть представлено в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (117)$$

где гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int u_x^2 dr + \frac{3}{2} \int (\nabla_{\perp} u)^2 dr - \int u^3 dr \equiv \frac{I_1}{2} + \frac{3I_2}{2} - I_3. \quad (118)$$

Здесь w играет роль гидродинамического потенциала: $u = w_x$.

Решения в виде многомерного солитона, распространяющегося вдоль оси x , $u = u_s(x - Vt, r_\perp)$, находятся из интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-Vu + u_{xx} + 3u^2) = 3\Delta_\perp u. \quad (119)$$

Линейный оператор в уравнении (119)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-V + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - 3\Delta_\perp$$

является положительно определённым, если скорость солитона положительна, $V > 0$. Как впервые было отмечено Петвиашвили [98], данное требование представляет собой условие существования солитонных решений для уравнения КП. Физически это условие означает отсутствие черенковского резонанса между движущимся солитоном и волнами малой амплитуды [50, 99].

В одномерном случае решение уравнения (119) представляет собой солитон КдВ:

$$u_s = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t)},$$

в двумерном — решение в виде лампа (от англ. lump) [100]

$$u_s = 4V' \frac{1 + 4V'^2 y^2 - V'(x - Vt)^2}{1 + 4V'^2 y^2 + V'(x - Vt)^2}.$$

В трёхмерном случае решение уравнения (119) может быть найдено только численно.

Решения солитонного типа уравнения (119) представляют собой стационарную точку гамильтониана (118) при фиксированном импульсе:

$$\delta(H + VP) = 0.$$

Используя явное выражение для гамильтониана (118), а также интегральные оценки [77] (см. также [3, 51]), можно показать, что гамильтониан для уравнения КП является ограниченным снизу функционалом при фиксированном импульсе P для одномерного и двумерного случаев. Однако эти солитонные решения оказываются неустойчивыми к трёхмерным возмущениям, что для одномерных солитонов впервые было обнаружено Кадомцевым и Петвиашвили [74] в длинноволновом пределе. Впоследствии Захаровым с помощью метода обратной задачи рассеяния было найдено точное выражение для инкремента этой неустойчивости [76]. Причина неустойчивости связана с тем, что скорость солитона в физических переменных уменьшается с возрастанием его амплитуды. Поэтому при поперечной модуляции такого солитона области с большей амплитудой обгоняют области с меньшей амплитудой. В результате возникает неустойчивость фокусирующего типа [75].

При $D = 3$ гамильтониан (118) оказывается неограниченным снизу, что следует, в частности, из применения масштабных преобразований [57, 101]

$$u \rightarrow \alpha^{-1/2} \beta^{-1} u \left(\frac{x}{\alpha}, \frac{\mathbf{r}_\perp}{\beta} \right),$$

сохраняющих P , к гамильтониану (118):

$$H(\alpha, \beta) = \frac{I_1}{2\alpha^2} + \frac{3I_2\alpha^2}{2\beta^2} - \frac{I_3}{\alpha^{1/2}\beta}, \quad (120)$$

который как функция α и β имеет стационарную точку при $\alpha = \beta = 1$, соответствующую трёхмерному солитону. Очевидно, что в стационарной точке выполняются условия

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0,$$

которые эквивалентны соотношениям между интегралами

$$I_1 = \frac{3I_3}{2}, \quad I_2 = \frac{I_3}{3}.$$

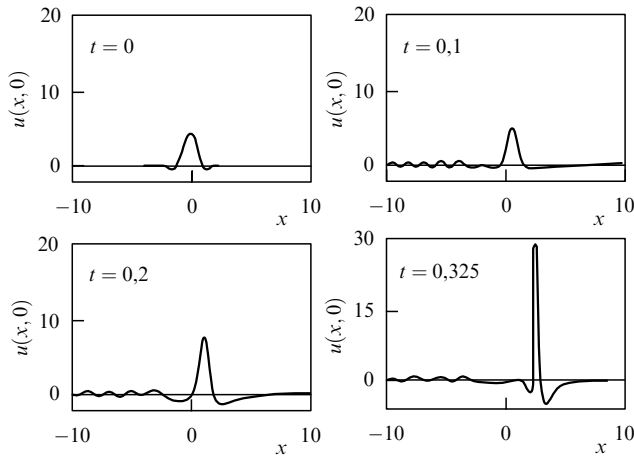
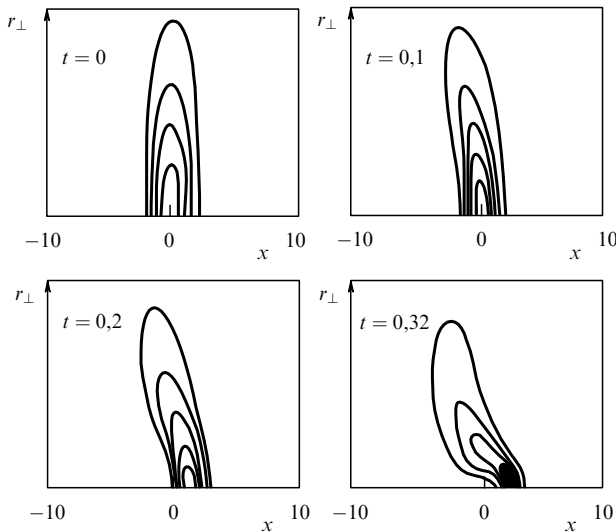
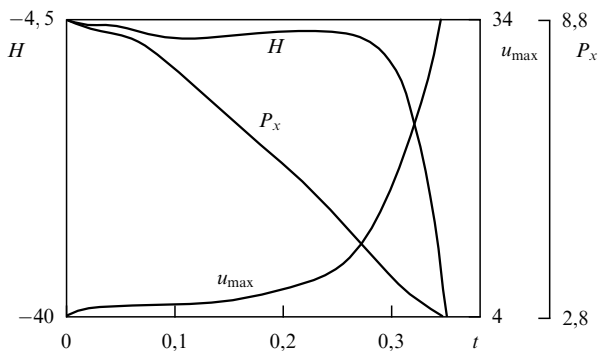
С помощью этих соотношений легко устанавливается, что данная стационарная точка является седловой. Последнее указывает на возможную неустойчивость трёхмерного солитона к малым возмущениям. Что касается неустойчивости к конечным возмущениям, то она следует из неограниченности гамильтониана при $\alpha, \beta \rightarrow 0$. Действительно, если рассмотреть параболы $\beta \propto \alpha^2$, то первые два члена в H будут вести себя как α^{-2} , а кубический член в H будет пропорционален $\alpha^{-5/2}$. Отсюда видно, что из-за нелинейного члена H оказывается неограниченным (снизу) на малых масштабах. Неограниченность H , как мы видели на других примерах, представляет собой критерий возникновения коллапса. Поскольку при масштабных преобразованиях вдоль парабол $\beta \propto \alpha^2$ степени дисперсионных членов (равные -2) и степень кубического члена ($-5/2$) не совпадают, возможный коллапс не является критическим и он должен быть слабым. Данному режиму коллапса отвечает следующая автомодельная подстановка:

$$u = \tau^{-2/3} u \left(\frac{x}{\tau^{1/3}}, \frac{\mathbf{r}_\perp}{\tau^{2/3}} \right),$$

где $\tau = t_0 - t$, t_0 — время коллапса.

Численное интегрирование трёхмерного уравнения КП (116) для цилиндрически симметричных распределений [57, 101] показало, что для начальных условий с отрицательным значением гамильтониана происходит формирование особенности.

На рисунке 4 представлена зависимость u на оси $r_\perp = 0$ для четырёх моментов времени. Пространственное распределение $u(x, r_\perp)$ для этих же моментов времени представлено на рис. 5. Возникающее распределение имеет вид подковы, что соответствует линейной стадии неустойчивости КП. Численные эксперименты подтвердили, что данный тип коллапса является слабым. При численном моделировании для $u(x, r_\perp)$ выбирались нулевые граничные условия, которые в силу нелокальности уравнения КП не сохраняли гамильтониан вследствие возможного излучения из области интегрирования. На рисунке 6 представлены зависимости гамильтониана H и P_x , вычисленные по области интегрирования, и максимальной амплитуды от времени. Видно, что со временем происходит уменьшение импульса P_x и $|H|$ при одно-временном увеличении $\max_x u$, что как раз и свидетельствует о слабости коллапса.

Рис. 4. Зависимость u на оси $r_{\perp} = 0$ для четырёх моментов времени.Рис. 5. Линии уровня $u(x, r_{\perp})$ для тех же четырёх моментов времени, что и на рис. 4.Рис. 6. Зависимости гамильтониана H , P_x и максимальной амплитуды u_{\max} от времени.

Вопрос о достаточном критерии коллапса и соответственно о конечности времени образования особенности для трёхмерного уравнения КП (116) до сих пор остаётся открытым, хотя о возможности коллапса свидетельствуют факт неограниченности снизу гамильтониана H

при фиксированном импульсе $P = (1/2) \int u^2 dr$, а также результаты численного моделирования коллапса, которые мы только что рассмотрели.

8.1. Виральные неравенства

Покажем, как критерии типа Власова–Петрищева–Таланова могут быть использованы при изучении коллапсов для обобщённого трёхмерного уравнения Кадамцева–Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t + u_{xxx} + n(n-1)u^{n-2}u_x) = 3\Delta_{\perp}u. \quad (121)$$

Случай $n = 3$ в (121) отвечает классическому уравнению КП (116). Уравнение КП с $n = 4$ возникает при описании волн звукового типа в антиферромагнетиках при определённых углах их распространения [102].

Начнём с уравнения (116), предполагая $n = 4$. Рассмотрим величину

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{2P} \int r_{\perp}^2 u^2 dr,$$

которая в силу сохранения $P = \int u^2 dr$ имеет смысл среднего поперечника пучка. Как впервые было показано в [102], для $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ может быть установлен аналог теоремы вириала (92):

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 u^2 dr = 48H - 8 \int u_x^2 dr, \quad (122)$$

где H — сохраняющаяся величина — гамильтониан, равный при $n = 4$

$$H = \int \left(\frac{u_x^2}{2} + 3 \frac{\nabla_{\perp} w^2}{2} - u^4 \right) dr.$$

Отсюда немедленно следует оценка

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 u^2 dr < 48H. \quad (123)$$

Таким образом, при $H < 0$ происходит коллапс пучка [102] — его сжатие, формально — вплоть до $\langle r_{\perp}^2 \rangle = 0$. Можно показать, что критерий коллапса $H < 0$ имеет место также для всех целых значений $n > 4$, но, к сожалению, случай $n = 3$, соответствующий классическому уравнению КП с квадратичной нелинейностью, не подпадает под данное доказательство.

Остановимся ещё на одном примере, в котором используется обобщённое уравнение КП. Речь идёт о модели, предложенной в [103] для описания самофокусировки сверхкоротких импульсов, в которой не предполагается усреднения по частоте квазимонохроматической волны. Спектр импульса полагается широким, лежащим в нерезонансной области. Однако ближайший резонанс (частота перехода ω_0), так же как и плазменный резонанс (на плазменной частоте ω_p), учитываются этой моделью. Интересной особенностью модели является то, что дисперсионная зависимость содержит в себе области как аномальной, так и нормальной дисперсии. Другие ограничения связаны с нелинейностью керровского типа и малоугловым приближением, что свойственно уравнению КП:

$$\frac{2n_0}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} + \frac{4\pi\delta\chi^3}{(c\omega_0)^2} \frac{\partial^2 E^3}{\partial \tau^2} - \frac{4\pi\chi}{(c\omega_0)^2} \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} + \frac{\omega_p^2}{c^2} E = \Delta_{\perp} E. \quad (124)$$

Уравнение (124) записано для амплитуды электрического поля E в случае линейно поляризованной волны. Здесь $\varepsilon_0 = n_0^2 = 1 + 4\pi\chi$ — статическая диэлектрическая проницаемость, c — скорость света, $\tau = t - zn_0/c$ — время в сопровождающей системе координат, $4\pi\delta\chi^3\omega_0^{-2}$ — константа Керра, которая полагается положительной. По сравнению с уравнением (5) работы [103], в уравнении (124) пренебрежено линейным затуханием волны. В безразмерных переменных уравнение (124) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 3u^3 \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right) + au = \Delta_{\perp} u, \quad (125)$$

где константы a и b положительны. Уравнение (125), которое представляет собой обобщённое уравнение КП, как и оригинальное уравнение КП (116), является гамильтоновым,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\delta H}{\delta u},$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \int \left(-bu_{\tau}^2 + aw^2 + (\nabla_{\perp} w)^2 - \frac{1}{2} u^4 \right) d\tau d\mathbf{r}_{\perp},$$

где $u = w_{\tau}$, т.е. w играет роль гидродинамического потенциала. Из выражения для H видно, что его квадратичная часть в общем случае не является положительно определённой величиной и становится таковой лишь в низкочастотной области, когда первым слагаемым bu_{τ}^2 можно пренебречь ввиду его малости по сравнению со вторым слагаемым. Очевидно также, что квадратичная форма является положительно определённой при $b = 0$. Именно в этих двух случаях можно получить достаточный критерий возникновения коллапса, аналогичный (123):

$$\frac{d^2}{dz^2} \int r_{\perp}^2 u^2 d\tau d\mathbf{r}_{\perp} = 4H - 8 \int aw^2 d\tau d\mathbf{r}_{\perp} \leq 4H.$$

Интегрирование последнего неравенства приводит к достаточному условию возникновения коллапса: $H < 0$ [103]. Численное интегрирование уравнения (125) показало тенденцию к самофокусировке пучка в поперечном направлении. В работе [103] численно был также обнаружен очень интересный эффект — возникновение резких градиентов на оси пучка, которое предшествовало его самофокусировке.

9. Заключение

В данном обзоре мы представили два метода исследования устойчивости солитонов, один из которых связан с критерием Вахитова–Колоколова и его обобщениями для векторных систем типа НУШ, а другой представляет собой исследование устойчивости по Ляпунову. Сочетание этих двух методов является эффективным способом исследования устойчивости солитонов.

Другой очень важный момент настоящего обзора связан с применением теорем вложения, которые играют существенную роль в доказательстве устойчивости солитонов. В частности, использование такого подхода позволило установить факт устойчивости солитонов для системы уравнений трёх волн, описывающих взаимодей-

ствие электромагнитных волн в χ^2 -средах, а также для трёхмерных солитонов замагниченных ионно-звуковых волн, описываемых в рамках анизотропного уравнения КдВ [14].

Следует также отметить, что, говоря о χ^2 -средах, мы имеем в виду прежде всего кристаллы без центра симметрии — только тогда трёхволновой матричный элемент отличен от нуля. Электромагнитные волны, распространяющиеся в таких кристаллах, имеют анизотропные законы дисперсии, отсюда, в частности, следует, что в общем случае тензоры $\omega_{\alpha\beta}$ для каждого волнового пакета не могут быть одновременно приведены к диагональному виду. Однако метод, представленный в данном обзоре, не требует никакой диагонализации дисперсионных тензоров $\omega_{\alpha\beta}$. Только одно условие является существенным — их одинаковая знакоопределённость. Только в таком случае солитоны существуют. Знакоопределённость тензоров дисперсии позволяет ввести соответствующие пространства Соболева и затем получить необходимые интегральные оценки для гамильтониана. Важно также, что солитоны, реализующие минимум гамильтониана, устойчивы не только к малым, но и к конечным возмущениям. В этом смысле критерий устойчивости по Ляпунову эквивалентен энергетическому принципу.

Когда гамильтониан является неограниченным функционалом, наиболее вероятным сценарием нелинейного поведения системы представляется волновой коллапс, приводящий к образованию особенности. В этом случае коллапс подобен процессу падения частицы в самосогласованном потенциале (см., например, [39]).

С увеличением размерности пространства роль нелинейных эффектов усиливается. Поэтому устойчивые солитоны наблюдаются при малых размерностях, а коллапсы типичны для многомерных систем. В системах коллапсирующего типа солитоны представляют собой сепаратрису, отделяющую коллапсирующие распределения от неколлапсирующих. Такие (неустойчивые) солитоны определяют порог волнового коллапса.

Благодарности. Работа выполнялась при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Министерством образования и науки РФ, Новосибирским государственным университетом и ведущим учёным). Е.А.К. благодарит LPCE CNRS (Орлеан, Франция), где работа выполнялась при поддержке гранта проекта РАН и CNRS "Нелинейные процессы в анизотропной плазменной турбулентности". Работа поддержана также грантом РФФИ, Программой Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" и грантом ведущих научных школ РФ НШ 6170.2012.2.

Список литературы

1. Арнольд В.И. *Теория катастроф* (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика", № 9) (М.: Знание, 1981) [Arnold V.I. *Catastrophe Theory* (Berlin: Springer, 1986)]
2. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики* 3-е изд. (М.: Наука, 1989) [Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer, 1997)]

3. Kuznetsov E A, Rubenchik A M, Zakharov V E *Phys. Rep.* **142** 103 (1986)
4. Kuznetsov E A, Zakharov V E *Lecture Notes Phys.* **542** 3 (2000)
5. Hasegawa A, Tappet F *Appl. Phys. Lett.* **23** 142 (1973)
6. Agrawal G P *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic Press, 1989) [Агравал Г *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996)]
7. Bloembergen N *Nonlinear Optics* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1977)
8. Захаров В Е, Манаков С В *ЖЭТФ* **69** 1654 (1975) [Zakharov V E, Manakov S V *Sov. Phys. JETP* **42** 842 (1975)]
9. Карамзин Ю Н, Сухоруков А П *ЖЭТФ* **68** 834 (1975) [Karamzin Yu N, Sukhorukov A P *Sov. Phys. JETP* **41** 414 (1975)]
10. Kanashev A A, Rubenchik A M *Physica D* **4** 122 (1981)
11. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997) [Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **40** 1087 (1997)]
12. Derrick G J. *Math. Phys.* **5** 1252 (1966)
13. Benjamin T B *Proc. R. Soc. London A* **328** 153 (1972)
14. Захаров В Е, Кузнецов Е А *ЖЭТФ* **66** 594 (1974) [Zakharov V E, Kuznetsov E A *Sov. Phys. JETP* **39** 285 (1974)]
15. Крылов С Ф, Яньков В В *ЖЭТФ* **79** 82 (1980) [Krylov S F, Yan'kov V V *Sov. Phys. JETP* **52** 41 (1980)]
16. Дьяченко А И и др. *ЖЭТФ* **96** 2026 (1989) [D'yachenko A I et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 1144 (1989)]
17. Захаров В Е *ЖЭТФ* **62** 1745 (1972) [Zakharov V E *Sov. Phys. JETP* **35** 908 (1972)]
18. Власов С Н, Петрищев В А, Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **14** 1353 (1971) [Vlasov S N, Petrishchev V A, Talanov V I *Radiophys. Quantum Electron.* **14** 1062 (1971)]
19. Вахитов Н Г, Колоколов А А *Изв. вузов. Радиофизика* **16** 1020 (1973) [Vakhitov N G, Kolokolov A A *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 783 (1971)]
20. Аскар'ян Г А *ЖЭТФ* **42** 1567 (1962) [Askar'yan G A *Sov. Phys. JETP* **15** 1088 (1962)]
21. Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **2** 218 (1965) [Talanov V I *JETP Lett.* **2** 138 (1965)]
22. Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **11** 303 (1970) [Talanov V I *JETP Lett.* **11** 199 (1970)]
23. Chiao R Y, Garmire F, Townes C H *Phys. Rev. Lett.* **13** 479 (1964)
24. Dawes E L, Marburger J H *Phys. Rev.* **179** 862 (1969)
25. Литвак А Г *ЖЭТФ* **57** 629 (1969) [Litvak A G *Sov. Phys. JETP* **30** 344 (1970)]
26. Власов С Н, Таланов В И *Самофокусировка волн* (Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997)
27. Zakharov V E, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 81
28. Rasmussen J J, Rypdal K *Phys. Scripta* **33** 481 (1986)
29. Kuznetsov E A *Chaos* **6** 381 (1996)
30. Sulem C, Sulem P-L *The Nonlinear Schrödinger Equation* (New York: Springer, 1999)
31. Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)
32. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961) [Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **13** 451 (1961)]
33. Каган Ю М *УФН* **178** 633 (2008) [Kagan Yu M *Phys. Usp.* **51** 603 (2008)]
34. Kagan Yu, Svistunov B V *Phys. Rev. Lett.* **79** 3331 (1997)
35. Каган Ю М, Свистунов Б В *Письма в ЖЭТФ* **67** 495 (1998) [Kagan Yu M, Svistunov B V *JETP Lett.* **67** 521 (1998)]
36. Каган Ю М, Свистунов Б В *ЖЭТФ* **105** 353 (1994) [Kagan Yu M, Svistunov B V *JETP* **78** 187 (1994)]
37. Flambaum V, Kuznetsov E, in *Singularities in Fluids, Optics, and Plasmas* (Eds R E Caflisch, G C Papanicolaou) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1993) p. 197
38. Berge L, Rasmussen J J *Phys. Lett. A* **304** 136 (2002)
39. Захаров В Е, Кузнецов Е А *ЖЭТФ* **91** 1310 (1986) [Zakharov V E, Kuznetsov E A *Sov. Phys. JETP* **64** 773 (1986)]
40. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **61** 118 (1971) [Zakharov V E, Shabat A B *Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)]
41. Kivshar Yu S, Agrawal G P *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Amsterdam: Academic Press, 2003) [Кившарь Ю С, Агравал Г П *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005)]
42. Segev M, Stegeman G *Phys. Today* **51** (8) 42 (1998)
43. Stegeman G, Segev M *Science* **286** 1518 (1998)
44. Kivshar Yu S *Opt. Quantum Electron.* **30** 571 (1998)
45. Ладыженская О А *Математические вопросы динамики несжимаемой вязкой жидкости* (М.: Наука, 1970) [Ladyzhenskaya O A *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow* (New York: Gordon and Breach, 1969)]
46. Nirenberg L *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **20** 733 (1966)
47. Weinstein M I *Commun. Math. Phys.* **87** 567 (1983)
48. Gardner C S et al. *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
49. Berge L, Kuznetsov E A, Rasmussen J J *Phys. Rev. E* **53** R1340 (1996)
50. Захаров В Е, Кузнецов Е А *ЖЭТФ* **113** 1892 (1998) [Zakharov V E, Kuznetsov E A *JETP* **86** 1035 (1998)]
51. Kuznetsov E A, Dias F *Phys. Rep.* **507** 43 (2011)
52. Turitsyn S K *Письма в ЖЭТФ* **61** 458 (1995) [*JETP Lett.* **61** 469 (1995)]
53. Berge L et al. *Phys. Rev. E* **55** 3555 (1997)
54. Kuznetsov E A, in *Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives* (Eds V E Zakharov, S Wabnitz) (Berlin: Springer-Verlag, 1999) p. 31
55. Кузнецов Е А, в сб. *Труды научной школы "Нелинейные волны — 2010"* (Под ред. А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2011) с. 205
56. Grimshaw R H J, Kuznetsov E A, Shapiro E G *Physica D* **152–153** 325 (2001)
57. Кузнецов Е А, Мusher С Л *ЖЭТФ* **91** 1605 (1986) [Kuznetsov E A, Musher S L *Sov. Phys. JETP* **64** 947 (1986)]
58. Kuznetsov E A, Mikhailov A V, Shimokhin I A *Physica D* **87** 201 (1995)
59. Anderson D, Bonnedal M, Lisak M *Phys. Fluids* **22** 1838 (1979)
60. Anderson D, Lisak M, Berntson A *PRAMANA* **57** 917 (2001)
61. Власов С Н, Таланов В И, частное сообщение (1984)
62. Kuznetsov E A, Turitsyn S K *Phys. Lett. A* **112** 273 (1985)
63. Фрайман Г М *ЖЭТФ* **88** 390 (1985) [Fraiman G M *Sov. Phys. JETP* **61** 228 (1985)]
64. Захаров В Е, Швец В Ф *Письма в ЖЭТФ* **47** 227 (1988) [Zakharov V E, Shvets V F *JETP Lett.* **47** 275 (1988)]
65. Landman M J et al. *Phys. Rev. A* **38** 3837 (1988)
66. Smirnov A M, Fraiman G M *Physica D* **52** 2 (1992)
67. Berge L, Pesme D *Phys. Lett. A* **166** 116 (1992)
68. Berge L *Phys. Rep.* **303** 259 (1998)
69. Шпира В И *ДАН СССР* **308** 732 (1989)
70. Жук В И, Рыжов О С *ДАН СССР* **263** 56 (1982) [Zhuk V I, Ryzhov O S *Sov. Phys. Dokl.* **27** 177 (1982)]
71. Рыжов О С *Журн. вычисл. мат. и мат. физ.* **30** 1804 (1990) [Ryzhov O S *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **30** (6) 146 (1990)]
72. D'yachenko A I, Kuznetsov E A *Письма в ЖЭТФ* **59** 103 (1994) [*JETP Lett.* **39** 108 (1994)]
73. Dyachenko A I, Kuznetsov E A *Physica D* **87** 301 (1995)
74. Кадомцев Б Б, Петвиашвили В И *ДАН СССР* **192** 753 (1970) [Kadomtsev B B, Petviashvili V I *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539 (1970)]
75. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1976) [Kadomtsev B B, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad./Plenum Publ., 2001) p. 1]
76. Захаров В Е *Письма в ЖЭТФ* **22** 364 (1975) [Zakharov V E *JETP Lett.* **22** 172 (1975)]
77. Кузнецов Е А, Турицын С К *ЖЭТФ* **82** 1457 (1982) [Kuznetsov E A, Turitsyn S K *Sov. Phys. JETP* **55** 844 (1982)]
78. Абрамян А А, Степанянц Ю А, Шпира В И *ДАН СССР* **327** 460 (1992) [Abramyan L A, Stepanyants Yu A, Shpira V I *Sov. Phys. Dokl.* **37** 575 (1992)]
79. Качанов Ю С, Рыжов О С *Сиб. физ.-тех. журн.* (1) 34 (1992)
80. Kachanov Y S, Ryzhov O S, Smith F T J *Fluid Mech.* **251** 273 (1993)
81. Turitsyn S K *Phys. Rev. E* **47** R13 (1993)
82. Kuznetsov E A et al. *Physica D* **87** 273 (1995)
83. Буднева О Б, Захаров В Е, Сынах В С *Физика плазмы* **1** 606 (1975) [Budneva O B, Zakharov V E, Synakh V S *Sov. J. Plasma Phys.* **1** 335 (1975)]
84. Захаров В Е, Кузнецов Е А, Мusher С Л *Письма в ЖЭТФ* **41** 125 (1985) [Zakharov V E, Kuznetsov E A, Musher S L *JETP Lett.* **41** 154 (1985)]

85. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
86. Vlasov S N, Piskunova L V, Talanov V I, in *IV Intern. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Kiev, October 9–22, 1989*
87. Захаров В Е, Косматов Н Е, Швец В Ф *Письма в ЖЭТФ* **49** 431 (1989) [Zakharov V E, Kosmatov N E, Shvets V F *JETP Lett.* **49** 492 (1989)]
88. Малкин В М, Шапиро Е Г *ЖЭТФ* **97** 183 (1990) [Malkin V M, Shapiro E G *Sov. Phys. JETP* **70** 102 (1990)]
89. Kosmatov N E, Shvets V F, Zakharov V E *Physica D* **52** 16 (1991)
90. Fibich G, Ren W, Wang X-P *Phys. Rev. E* **67** 056603 (2003)
91. Berge L, Kuznetsov E A, Rasmussen J J *Phys. Rev. E* **53** R1340 (1996)
92. Кузнецов Е А *Изв. вузов. Радиофизика* **46** 342 (2003) [Kuznetsov E A *Radiophys. Quantum Electron.* **46** 307 (2003)]
93. Berge L et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 153902 (2002)
94. Жарова Н А, Литвак А Г, Миронов В А *Письма в ЖЭТФ* **75** 655 (2002) [Zharova N A, Litvak A G, Mironov V A *JETP Lett.* **75** 539 (2002)]
95. Жарова Н А, Литвак А Г, Миронов В А *ЖЭТФ* **123** 726 (2003) [Zharova N A, Litvak A G, Mironov V A *JETP* **96** 643 (2003)]
96. Гуревич В Л *Кинетика фононных систем* (М.: Наука, 1980)
97. Dias F, Kuznetsov E A *Phys. Lett. A* **263** 98 (1999)
98. Петвиашвили В И *Физика плазмы* **2** 450 (1976) [Petviashvili V I *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 247 (1976)]
99. Nycander J *Chaos* **4** 253 (1994)
100. Bordag L A et al. *Phys. Lett. A* **63** 205 (1979)
101. Кузнецов Е А, Мушер С Л, Шафаренко А В *Письма в ЖЭТФ* **37** 204 (1983) [Kuznetsov E A, Musher S L, Shafarenko A V *JETP Lett.* **37** 241 (1983)]
102. Турицын С К, Фалькович Г Е *ЖЭТФ* **89** 258 (1985) [Turitsyn S K, Fal'kovich G E *Sov. Phys. JETP* **62** 146 (1985)]
103. Балакин А А и др. *ЖЭТФ* **131** 408 (2007) [Balakin A A et al. *JETP* **104** 363 (2007)]

Solitons and collapses: two evolution scenarios of nonlinear wave systems

V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov

*P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation;
L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation;
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, Akademgorodok, 630090 Novosibirsk, Russian Federation
Tel. +7 (499) 132 67 51, +7 (495) 334 05 33. Fax +7 (495) 938 20 77
E-mail: zakharov@itp.ac.ru, kuznetsov@itp.ac.ru*

Two alternative scenarios pertaining to the evolution of nonlinear wave systems are considered: the solitons and the wave collapses. For the former, it suffices that the Hamiltonian be bounded from below (above), then the soliton realizing its minimum (or maximum) is Lyapunov stable. The extremum is approached via the radiation of small-amplitude waves, a process absent in systems with a finite number of degrees of freedom. The framework of nonlinear Schrödinger equation and a three-wave system is used to show how the boundedness of the Hamiltonian and hence the stability of the soliton minimizing it can be proved rigorously using the integral estimate method based on the Sobolev embedding theorems. The wave systems with the Hamiltonians unbounded from below must evolve to a collapse which can be considered as the fall of a particle in an unbounded potential. The radiation of small-amplitude waves favors the collapse in this case.

PACS numbers: 42.65.Jx, 42.65.Tg, 47.35.Fg, 47.35.Jk, 52.35.Sb

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201206a.0569

Bibliography — 103 references

Received 14 July 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (6) 569–592 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (6) (2012)