

УДК 537.86

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ВОЛНОВЫХ КОЛЛАПСОВ

Е. А. Кузнецов

В данной работе представлен обзор результатов исследований интегральных критериев волновых коллапсов — достаточных критериев формирования особенностей за конечное время из начально гладких распределений волнового поля. Все эти критерии основаны на решении мажорирующего дифференциального неравенства второго порядка, которое может быть получено для широкого круга моделей, в том числе для нелинейного уравнения Шрёдингера, нелинейного уравнения Клейна—Гордона, нестационарного уравнения Гинзбурга—Ландау, уравнений гидродинамики пыли, уравнения нелинейной струны (Буссинеска), обобщённого уравнения Кадомцева—Петвиашвили.

ВВЕДЕНИЕ

Критерий Власова—Петрищева—Таланова [1] волнового коллапса в рамках двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера, найденный в 1971 году, является одним из основополагающих результатов в теории волновых коллапсов. Это был первый строгий результат для нелинейных волновых систем с дисперсией. Он показал, что формирование особенности волнового поля за конечное время возможно, несмотря на наличие линейной дисперсии волн, которая, например, в линейной оптике препятствует возникновению точечных особенностей — фокусов.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) записывается для волновой функции ψ и в безразмерных переменных имеет вид

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее нижний индекс t обозначает частную производную по времени. НУШ описывает движение квантовомеханической частицы в самосогласованном потенциале с притяжением $U = -|\psi|^2$. Именно притяжение в этом случае есть причина возникновения особенности. С точки зрения квантовой механики коллапс в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера может быть интерпретирован как падение частицы на центр в самосогласованном потенциале [2].

Уравнение (1) часто называют также уравнением Гросса—Питаевского [3, 4]. В частности, оно с хорошей точностью описывает длинноволновые нелинейные колебания конденсата слабо неидеального бозе-газа при отрицательной длине рассеяния. В настоящее время уравнение (1) — базовая модель для изучения нелинейной динамики бозе-конденсатов (см., например, [5, 6]). В нелинейной оптике двумерное уравнение (1) описывает стационарную самофокусировку света в среде с керровской нелинейностью; волновая функция в этом случае есть огибающая поля квазимонохроматической электромагнитной волны, время t имеет смысл координаты вдоль распространения светового пучка, а второе слагаемое в (1) описывает дифракцию пучка в поперечном направлении.

Критерий Власова—Петрищева—Таланова следует из соотношения для второй производной по времени от среднего квадрата размера распределения $\langle r^2 \rangle = N^{-1} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 8H, \quad (2)$$

где H — гамильтониан, равный

$$H = \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \equiv X - Y, \quad (3)$$

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$$

— полное число квазичастиц. Равенство (2) проверяется прямым вычислением. Соотношение (2) также часто называют теоремой вириала, поскольку величину $N \langle r^2 \rangle$ можно рассматривать в качестве момента инерции. В классической механике наиболее простой способ получения теоремы вириала, т. е. соотношения между средней кинетической и средней потенциальной энергией, состоит как раз в вычислении второй производной по времени от полного момента инерции всей системы.

Поскольку H является сохраняющейся величиной, то соотношение (2) дважды интегрируется:

$$\int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4Ht^2 + C_1t + C_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 — дополнительные интегралы движения. Их наличие связано с существованием двух нётеровских симметрий — линзового преобразования (этот факт был установлен В. И. Талановым [7] в 1970 г.) и масштабных преобразований [8] (см. также [9, 10]).

Отсюда немедленно следует критерий Власова—Петрищева—Таланова: для любого распределения поля с отрицательным гамильтонианом

$$H < 0 \quad (5)$$

при произвольных C_1 и C_2 средний квадрат размера распределения $\langle r^2 \rangle$ обращается в нуль за конечное время, что, в силу сохранения N , свидетельствует о формировании особенности поля ψ .

В трёхмерной ситуации ($D = 3$) вместо (2) имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4(2H - Y), \quad (6)$$

при этом равенство в (4) заменяется на неравенство

$$N \langle r^2 \rangle < 4Ht^2 + C_1t + C_2, \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Отсюда следует тот же достаточный критерий коллапса, что и при $D = 2$: $H < 0$ [11].

Как один из наиболее ярких, критерий Власова—Петрищева—Таланова получил наибольшую известность в физической литературе. Математики обратили внимание на работу [1] позднее. В 1974 году Ливайн [12] предложил использовать для нахождения достаточных критериев коллапсов мажорирующие дифференциальные неравенства второго порядка для положительно определённой интегральной величины R вида (см. также [13])

$$R_{tt}R - (1 + \alpha)R_t^2 \geq f(R), \quad (8)$$

где число $\alpha > 0$ и функция $f(R)$ определяются исходя из конкретной модели. При этом коллапсу соответствует обращение величины R в бесконечность за конечное время.

Неравенство (8) после простой замены переменных (см. [13])

$$R = A^{-1/\alpha} \quad (9)$$

может быть представлено в форме

$$A_{tt} \leq -\frac{\partial V}{\partial A}, \quad (10)$$

где

$$V(A) = \int^A \alpha A^{1+2/\alpha} f(A^{-1/\alpha}) dA.$$

Это неравенство имеет простую механическую интерпретацию: A играет роль координаты частицы, а $V(A)$ — её потенциальной энергии. В частности, для НУШ (1) $A = N \langle r^2 \rangle$, а потенциал линеен: $V(A) = -8HA$.

Момент достижения частицей начала координат $A = 0$ будет соответствовать времени коллапса в данной системе. Отсюда легко найти необходимые условия на вид потенциала $V(A)$ и начальные данные, при которых возможно такое падение на центр, а также оценить время коллапса t_0 . Для достижения частицей начала координат $A = 0$ достаточно потребовать, чтобы потенциал $V(A)$ рос монотонно с увеличением A . Тогда при движении влево ($A_t < 0$) неравенство (10) может быть проинтегрировано один раз:

$$E(t) = \frac{A_t^2}{2} + V(A) \geq E(0). \quad (11)$$

Здесь $E(0)$ — энергия частицы в начальный момент времени $t = 0$, а $E(t)$ — текущее значение энергии частицы. Из неравенства (11) следует, что при движении частицы влево её энергия растёт. В этом случае верхняя оценка величины t_0 даётся интегралом:

$$t_0 \leq \int_0^{A(0)} \frac{dA}{2\sqrt{E(0) - V(A)}}. \quad (12)$$

Таким образом, для монотонных потенциалов достаточным критерием коллапса является условие отрицательности начальной скорости:

$$A_t(0) < 0.$$

При положительной начальной скорости частица, вообще говоря, может не отразиться от точки остановки. Однако если производная $\partial V/\partial A$ ограничена снизу некоторой (положительной) величиной B , то частица достигнет нуля всегда, вне зависимости от начального значения скорости. Это следует из оценки, которая получается после двойного интегрирования по t уравнения (10):

$$A \leq -\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \frac{\partial V}{\partial A} dt_2 + C_1 t + C_2 \leq -\frac{B}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

В 1978 году подход Ливайна был использован Калантаровым и Ладыженской [14] для нахождения критерия коллапса для уравнения нелинейной струны (часто называемого также уравнением Буссинеска). Вопрос о коллапсе для интегрируемого уравнения, каким является уравнение Буссинеска (см. [15]), был в то время удивительным и вызвал большую дискуссию. Впоследствии этот вопрос нашёл своё объяснение в рамках метода обратной задачи рассеяния в работах [16, 17].

Последующие работы по нахождению интегральных критериев коллапса (см. [18–24]) показали, что все они так или иначе основаны на использовании мажорирующих неравенств вида (8). В данном обзоре на конкретных примерах мы покажем, как строится положительно определённая интегральная величина R , и дадим вывод соответствующих мажорирующих неравенств. Из вида выражения для величины R и её временного поведения можно сделать заключение относительно того, какие характеристики волнового поля (например, амплитуда поля или её пространственные производные) становятся бесконечными, и получить оценку времени коллапса.

План статьи следующий. Вначале, следуя работам [13, 19], мы рассмотрим, как может быть улучшен критерий (5) для сверхкритического трёхмерного коллапса, описываемого НУШ (1). В следующем разделе мы остановимся на критериях коллапсов для нелинейного уравнения Клейна–Гордона, которое возникает при описании запорогового поведения при неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [22], а также для нестационарного уравнения Гинзбурга–Ландау, которое, в частности, описывает поведение диссипативных систем вблизи бифуркации — перехода из пространственно-однородных ламинарных состояний в пространственно-неоднородные состояния. В третьем разделе мы обратимся к системам гидродинамического типа: к уравнениям гидродинамики пыли (с нулевым давлением) [24] и уравнению нелинейной струны [14, 21]. В заключительном разделе, следуя работе Турицына и Фальковича [18], мы получим критерий коллапса для обобщённого уравнения Кадомцева–Петвиашвили. По своей форме критерий для обобщённого уравнения Кадомцева–Петвиашвили совпадает с критерием Власова–Петрищева–Таланова, демонстрируя возможность появления коллапса при отрицательном значении гамильтониана. В заключительном разделе мы обсудим также вопрос о возможности коллапса для гиперболического НУШ [23], описывающего, в частности, распространение импульсов электромагнитных волн в средах с нормальной дисперсией.

Важное место во всём обзоре будет уделено самому методу построения неравенств вида (8). В основе этого подхода лежат различные интегральные оценки. Прежде всего, это неравенства соболевского типа, которые вытекают из знаменитых теорем вложения С. Л. Соболева, в частности, для пространств L_p и W_2^1 с нормами

$$\|u\|_p = \left[\int |u|^p dx \right]^{1/p} \quad (p > 0), \quad \|u\|_{W_2^1} = \left[\int (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right]^{1/2}$$

соответственно. Впервые эти неравенства были использованы при доказательстве устойчивости ионно-акустических солитонов в замагниченной плазме [24], основанном на ограниченности гамильтониана. Позже этот подход широко применялся для установления устойчивости различного типа солитонов (см., например, обзор [26]). Для задачи коллапса эти неравенства использовались Вайнштейном [27] (см. также [28]). Эти оценки тесным образом связаны с солитонными решениями, которые выступают в качестве сепаратрис, отделяющих коллапсирующие состояния от распределений, расширяющихся за счёт линейных эффектов — дифракции и дисперсии волн. В частности, именно так обстоит дело для трёхмерного НУШ.

1. КРИТЕРИЙ КОЛЛАПСА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО НУШ

Как видно из (6), при $D = 3$ критерий коллапса (5) для НУШ недостаточно точен, поскольку при его выводе использована простейшая оценка величины Y . В этом разделе мы покажем, как оценка (5) может быть улучшена. Будет продемонстрировано, что коллапс возможен при положительном гамильтониане, пороговое значение которого совпадает со значением H для основного солитонного (s) решения уравнения (1):

$$\psi(r, t) = \lambda \phi_0(\lambda r) \exp(i\lambda^2 t). \quad (13)$$

Здесь нормированная волновая функция ϕ_0 , будучи сферически-симметричной и не имеющей нулей, подчиняется уравнению

$$-\phi_0 + \Delta\phi_0 + |\phi_0|^2\phi_0 = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что для солитонного решения полное число частиц обратно пропорционально λ :

$$N_s = N_0/\lambda, \quad (15)$$

где согласно [28] $N_0 = 18,94$. Легко видеть, что решение (13) представляет собой стационарную точку гамильтониана H при фиксированном числе частиц N :

$$\delta(H + \lambda^2 N) = 0.$$

Уже отсюда можно сделать ряд заключений относительно возможной устойчивости или неустойчивости солитонных решений. Следуя [2], рассмотрим масштабные преобразования волновой функции ψ , сохраняющие полное число частиц ($N = \text{inv}$):

$$\psi(r) \rightarrow a^{-3/2}\psi_s(r/a).$$

При таких преобразованиях гамильтониан H становится функцией масштабного параметра a :

$$H(a) = \frac{X_s}{a^2} - \frac{Y_s}{a^3}.$$

Солитону соответствует максимум этой функции, который достигается при $a = 1$, что указывает на его возможную неустойчивость. Такая неустойчивость действительно имеет место. Линейный критерий устойчивости Колоколова—Вахитова [29]

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0 \quad (16)$$

в соответствии с (15) не выполняется, что означает неустойчивость солитона. Важно отметить также, что при $a \rightarrow 0$ гамильтониан $H(a)$ благодаря нелинейному взаимодействию оказывается неограниченной снизу функцией, что указывает на возможность коллапса при уменьшении характерного размера распределения, а при $a \rightarrow \infty$ эта функция стремится к нулю за счёт дисперсионного члена в $H(a)$. Поэтому можно говорить, что солитонное решение представляет собой сепаратрису, отделяющую коллапсирующие решения от неколлапсирующих. Именно этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем для нахождения более строгого критерия коллапса.

В точке максимума гамильтониана, соответствующей солитонному решению, между интегралами X_s и Y_s имеет место соотношение $2X_s = 3Y_s$. Другое соотношение между этими интегралами получается после умножения (14) на ψ и интегрирования по \mathbf{r} . В результате из двух полученных соотношений следует

$$X_s = 3N_0^2/N_s, \quad Y_s = 2N_0^2/N_s, \quad H_s = N_0^2/N_s. \quad (17)$$

Для того, чтобы найти более точную (по сравнению с (6)) оценку, воспользуемся мультипликативным вариантом неравенства Соболева [30, 31]:

$$Y \leq CN^{1/2}X^{3/2}, \quad (18)$$

где C — некоторая постоянная. Наилучшее значение C находится путём минимизации функционала J :

$$C_{\text{best}} = \min J[\psi] = \min \left(\frac{N^{1/2}X^{3/2}}{Y} \right). \quad (19)$$

Легко проверить, что соответствующее уравнение Лагранжа—Эйлера для экстремума функционала J совпадает с уравнением (14) для солитонных решений. Минимальное значение J достигается для сферически-симметричного солитона без узлов (основное состояние). Согласно (17) постоянная C_{best} оказывается равной (см., например, [26, 27])

$$C_{\text{best}} = \frac{2}{3\sqrt{3}N_0}. \quad (20)$$

В результате неравенство (18) приобретает вид

$$Y \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{N^{1/2}}{N_0} X^{3/2}. \quad (21)$$

Рассмотрим далее функцию

$$F = X - C_{\text{best}} N^{1/2} X^{3/2}. \quad (22)$$

По построению F представляет собой нижнюю границу гамильтониана H при фиксированном N и как функция X имеет максимум при $X = X_N = 3N_0^2/N$, равный $F = H_N = N_0^2/N$. Здесь H_N — значение гамильтониана для основного солитона. Таким образом, на плоскости (H, X) можно выделить три области:

- 1) $0 < H < H_N$ при $0 < X < X_N$;
- 2) $H_N > H > -\infty$ при $X_N \leq X < \infty$. Эта область включает в себя полуплоскость $H < 0$;
- 3) $H > H_N$ при $0 < X < \infty$.

В первой области для всех значений H величина X не превосходит $X_N = 3N_0^2/N$. Поэтому в силу соотношения неопределённости

$$\langle r^2 \rangle \geq \frac{9N}{4X}, \quad (23)$$

т. е. среднее значение $\langle r^2 \rangle$ ограничено снизу. В результате коллапс распределения в целом оказывается невозможным. Более того, поскольку величина X ограничена сверху, можно показать, что и формирование особенности волновой функции ψ невозможно для всех $t > 0$ [13].

Для второй области можно написать следующую оценку:

$$N \frac{d^2 \langle r^2 \rangle}{dt^2} = 4(2H - Y) = 4(3H - X) \leq 4(3H - X_N) = 12(H - H_N). \quad (24)$$

Интегрируя далее (24), мы приходим к неравенству

$$N \langle r^2 \rangle \leq 6(H - H_N)t^2 + C_1 t + C_2, \quad (25)$$

откуда следует более строгий критерий для трёхмерного коллапса:

$$H < H_N = N_0^2/N. \quad (26)$$

Здесь H_N — значение гамильтониана для основного солитона. Как и критерий Власова—Петрищева—Таланова, критерий (26) является только достаточным.

В третьей области, где $H > H_N$, коллапс (всего распределения как целого) возможен только при определённых начальных условиях. Путём подбора постоянных C_1 и C_2 можно достичь того, чтобы среднее значение $\langle r^2 \rangle$ обращалось в нуль. Например, коллапс имеет место при $C_1 \neq 0$, что соответствует начально подфокусированному распределению, когда начальное значение X больше X_N при выполнении следующего ограничения (см. [13]):

$$C_1 \leq -\sqrt{24(H - H_N)C_2}.$$

2. КРИТЕРИИ КОЛЛАПСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА—ГОРДОНА И УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

Рассмотрим релятивистски-инвариантное уравнение Клейна—Гордона с кубическим нелинейным членом:

$$\eta_{tt} = \gamma\eta + \Delta\eta + |\eta|^2\eta. \quad (27)$$

Уравнение такого вида было выведено в [22] для описания запорогового (инкремент $\gamma > 0$) поведения поверхностных гравитационно-капиллярных волн, возбуждаемых ветром благодаря неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Величина η в этом случае имеет смысл огибающей волны с несущим волновым вектором $\mathbf{k}_0 = \mathbf{n}\sqrt{g/\alpha}$, где g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль скорости ветра; оператор Лапласа Δ в (27) двумерный. Важной особенностью этого уравнения является факт притяжения — знак плюс перед нелинейным членом $|\eta|^2\eta$. Последнее означает, что для пространственно-однородных состояний при $\gamma > 0$ нелинейность не приводит к стабилизации линейной неустойчивости, а наоборот, её усиливает, приводя к взрывному (за конечное время) росту амплитуды η .

Рассмотрим вопрос о критериях коллапса для пространственно-локализованных распределений η . Для этого введём положительно определённую величину $R = \int |\eta|^2 d\mathbf{r} > 0$ и рассмотрим её эволюцию во времени. Уравнение (27) позволяет найти, что

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -4H + \int (6|\eta_t|^2 + 2|\nabla\eta|^2 + 2|\gamma||\eta|^2) d\mathbf{r}. \quad (28)$$

Здесь H — гамильтониан системы (27), равный

$$H = \int (|\eta_t|^2 - \gamma|\eta|^2 + |\nabla\eta|^2 - |\eta|^4/2) d\mathbf{r}.$$

Умножая далее обе части (28) на R и используя неравенство Коши—Буняковского, приходим к неравенству вида (8):

$$R_{tt}R - 3R_t^2/2 \geq -4HR + 2\gamma R^2. \quad (29)$$

Переходя по формуле (9) от R к новой переменной A : $R = A^{-2}$, приходим к неравенству (10), где потенциал определяется выражением

$$V(A) = -\frac{HA^4}{2} + \frac{\gamma A^2}{2}.$$

Если норма R обратится в бесконечность за конечное время, это будет означать, что решение уравнения (27) теряет свою гладкость, и у решения возникнет особенность не позднее, чем R станет бесконечной величиной. Для величины A появление особенности означает, что частица достигла начала координат ($A = 0$) за конечное время. Если скорость A_t отрицательна, то мы приходим к неравенству (11):

$$E(t) = \frac{A_t^2}{2} + V(A) \geq E(0). \quad (30)$$

Знак неравенства означает, что частица при своём движении к центру набирает энергию. Из этого соотношения легко находятся все возможные случаи, когда частица достигает точки $A = 0$. Коллапс имеет место:

- 1) при $H < 0$ и $\gamma < 0$, если $E(0) > 0$ и $A_t < 0$;
- 2) при $H < 0$ и $\gamma > 0$, если $A_t(0) < 0$;

3) при $H > 0$ и $\gamma > 0$, если $A_t(0) < 0$, $A^2(0) < \gamma/(2H)$ и $E(0) < \gamma^2/(8H)$ или если $A_t(0) < 0$ и $E(0) > \gamma^2/(8H)$.

Во всех этих случаях верхняя оценка времени коллапса t_0 находится с помощью интеграла (12).

Учитывая, что частица вблизи начала координат $A = 0$ имеет определённую скорость, вблизи особенности для нормы $R = \int |\eta|^2 d\mathbf{r}$ возникает оценка

$$\int |\eta|^2 d\mathbf{r} \geq \frac{C}{(t_0 - t)^2}. \quad (31)$$

Важно отметить, что оценка (31) не зависит от размерности пространства. Она отвечает росту амплитуды для пространственно-однородных решений по закону $\eta \propto (t_0 - t)^{-1}$ при почти неизменной или даже растущей области коллапсирующего решения.

Похожая ситуация реализуется при коллапсе, описываемом уравнением Гинзбурга—Ландау вида

$$\psi_t = \gamma\psi + \Delta\psi + 2|\psi|^2\psi. \quad (32)$$

Такой вариант уравнения Гинзбурга—Ландау возникает вблизи критической точки при жёстком режиме возбуждения. Например, он реализуется при описании генерации импульсов в круговых лазерах с нелинейной поглощающей ячейкой, просветляющейся при росте интенсивности [32], и вблизи порога конвекции бинарных жидкостей [33, 34].

Для чисто действительных ψ уравнение (32) превращается в нелинейное уравнение теплопроводности (о приложениях этого уравнения к задаче горения см. классическую работу Пискунова, Петровского, Колмогорова [35]).

Для пространственно-однородных решений факт формирования особенности ψ проверяется просто. Если $\gamma > 0$, то для малых начальных данных ψ вначале растёт экспоненциально, а затем, на нелинейной стадии, «взрывается» за конечное время. При $\gamma < 0$ только для начальных данных $2|\psi_0|^2 > |\gamma|$ возможна реализация взрывного режима.

Получим теперь критерий коллапса для пространственно-локализованных распределений ($\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Уравнение (32) относится к градиентным системам, т. е. может быть записано в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta\psi^*}. \quad (33)$$

Здесь

$$F = \int (|\nabla\psi|^2 - \gamma|\psi|^2 - |\psi|^4) d\mathbf{r} \equiv X - \gamma N - Y \quad (34)$$

представляет собой функционал Ляпунова, или свободную энергию, поскольку

$$\frac{dF}{dt} = -2 \int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} \leq 0. \quad (35)$$

Таким образом, F уменьшается со временем; в частности, если $F < 0$ в начальный момент времени, то свободная энергия F будет отрицательна при всех $t > 0$. При этом согласно (32) величина N подчиняется уравнению

$$\frac{dN}{dt} = 2\gamma N - 2X + 4Y = -2F + 2Y, \quad (36)$$

откуда видно, что при отрицательном значении F мощность N растёт со временем.

В качестве функционала R возьмём отношение $-F/N$. Для начальных условий с отрицательным значением F величина R будет положительно определена во все моменты времени. Далее найдём временную производную от R :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{N} \int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} + \frac{FN_t}{N^2}. \quad (37)$$

Первый член в этом соотношении оценим с помощью неравенства Коши—Буняковского:

$$\frac{dN}{dt} = 2 \int |\psi\psi_t| d\mathbf{r} \leq 2N^{1/2} \left(\int |\psi_t|^2 d\mathbf{r} \right)^{1/2}.$$

Подставляя оценку интеграла $\int |\psi_t|^2 d\mathbf{r}$ в (37), с учётом определения F (34) получаем искомое мажорирующее неравенство:

$$\frac{dR}{dt} \geq \frac{N_t}{N^2} \left(\frac{N_t}{2} + F \right) \geq 2 \frac{R}{N} (-F + Y + N) \geq 2R^2. \quad (38)$$

Данное неравенство первого порядка есть простейший вариант общего неравенства (8). Неравенство (38) просто интегрируется, откуда следует оценка величины R [20] (см. также [21]):

$$2R \geq \frac{1}{t_0 - t},$$

где время t_0 выражается через начальное значение $R|_{t=0} = R_0$:

$$t_0 = \frac{1}{2R_0}.$$

Данная оценка может быть усилена при $\gamma < 0$ примерно таким же образом, каким был получен критерий (26). Достаточный критерий коллапса в этом случае даёт верхнюю оценку начальной величины F [21]:

$$F \Big|_{t=0} < F_s,$$

где F_s — свободная энергия для основного солитонного решения НУШ (13).

3. КОЛЛАПСЫ В СИСТЕМАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Данный раздел мы начнём с простейшей гидродинамической модели — уравнений Эйлера для пыли, когда её давлением можно пренебречь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (40)$$

Здесь предполагается, что скорость \mathbf{v} достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности, чтобы все нормы, рассматриваемые ниже, были конечны.

Решение уравнений (39), (40) просто найти с помощью лагранжевого описания. В лагранжевых переменных уравнение (40) описывает движение свободных частиц:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}_0(\mathbf{a})t, \quad (41)$$

где $\mathbf{v}_0(\mathbf{a})$ — начальная скорость. Свободное движение лагранжевых частиц есть причина опрокидывания для пылевой гидродинамики, что соответствует пересечению траекторий жидких частиц. В терминах отображения (41), описывающего переход от эйлерового описания к лагранжевому, опрокидывание означает обращение якобиана J в нуль. Этот процесс есть коллапс для уравнений (39), (40), в результате чего градиент скорости и плотность ρ в точках обращения якобиана в нуль оказываются бесконечными. По этой причине опрокидывание иногда называют градиентной катастрофой.

Следует отметить, что уравнения (39), (40) имеют важные астрофизические приложения: согласно Я. Б. Зельдовичу [36], опрокидывание — причина формирования протогалактик из звёздной пыли.

Локально условие опрокидывания и время опрокидывания определяются из начальной скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{a})$. Мы не будем останавливаться подробно на этом вопросе (детали см., например, в [37]) и в этом разделе получим достаточный интегральный критерий опрокидывания.

Начнём с одномерного уравнения (40):

$$v_t + vv_x = 0. \quad (42)$$

Введём интегралы с целыми n :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^n dx.$$

Из (42) легко получить, что эволюция этих интегралов определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\frac{dI_n}{dt} = -(n-1)I_{n+1}. \quad (43)$$

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ указанные соотношения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^3 dx, \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^3 dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx. \quad (45)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к правой части (44), имеем

$$\frac{dI_2}{dt} \leq \left(I_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx \right)^{1/2}. \quad (46)$$

Подставляя далее

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^4 dx = \frac{1}{2} \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$

в (46), приходим к замкнутому неравенству для интеграла I_2 :

$$I_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} - 2 \left(\frac{dI_2}{dt} \right)^2 \geq 0, \quad (47)$$

которое представляет собой частный вид неравенства (8) с $f(R) = 0$. Переход к новой переменной A : $I_2 = A^{-1}$, приводит (46) к неравенству

$$A_{tt} \leq 0. \quad (48)$$

Отсюда следует, что критерий коллапса даётся ограничением на начальное значение производной dI_2/dt при $t = 0$ [24]:

$$\left. dI_2/dt \right|_{t=0} > 0,$$

или

$$I_3(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{0x}^3 dx < 0.$$

В многомерной ситуации аналогичный критерий также может быть получен в случае, когда матрица

$$U_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

при $t = 0$ имеет чисто действительные собственные значения. Такая ситуация может быть реализована при выполнении следующего условия:

$$2(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 - \frac{2}{D} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2) \geq \omega^2, \quad (49)$$

Здесь tr означает след матрицы, \mathbf{S} — симметричная часть матрицы деформаций скорости \mathbf{U} : $\mathbf{S} = (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)/2$, $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — завихрённость; индекс T обозначает операцию транспонирования.

В многомерном случае мажорирующее неравенство записывается для величины

$$I = \int (\det U)^2 d\mathbf{r}$$

и имеет вид (подробности вывода см. в работе [24])

$$I \frac{d^2 I}{dt^2} - \left(1 + \frac{1}{D}\right) \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \geq 0, \quad (50)$$

где D — размерность пространства. Неравенство (50) путём замены

$$A = I^{-1/D}$$

сводится к (48). Критерий коллапса по-прежнему заключается в том, что начальная скорость частицы должна быть отрицательной:

$$A_t(0) < 0, \quad \text{или} \quad I_t(0) > 0.$$

Время коллапса при этом оценивается как

$$t_0 < \frac{DI(0)}{I_t(0)} = -\frac{1}{\langle \lambda(0) \rangle},$$

где $\langle \lambda \rangle$ — среднее собственное значение матрицы \mathbf{U} при $t = 0$:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{D} \sum_i \bar{\lambda}_i = \frac{1}{DI} \int \operatorname{tr} \mathbf{U} (\det \mathbf{U})^2 d\mathbf{r}.$$

Следующий пример системы гидродинамического типа — уравнение Буссинеска:

$$U_{tt} - U_{xx} + U_{xxxx} + (U^2)_{xx} = 0. \quad (51)$$

Для волн малой амплитуды это уравнение даёт закон дисперсии

$$\omega^2 = k^2 + k^4,$$

совпадающий со спектром Боголюбова для колебаний конденсата слабо неидеального бозе-газа. Нелинейность в уравнении (51) — гидродинамическая: при отсутствии дисперсии, т. е. при $\omega^2 \approx k^2$, (51) превращается в нелинейное акустическое уравнение, описывающее, в частности, опрокидывание звуковой волны конечной амплитуды (простая волна Римана). В этом случае функцию U можно трактовать как флуктуацию плотности, на величину которой естественно наложить ограничение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U \, dx = 0, \quad (52)$$

выражающее закон сохранения массы.

Таким образом, уравнение (51) в отличие от (39) и (40) учитывает сразу оба фактора — дисперсию и нелинейность. Для этого уравнения легко находятся решения в виде стационарных волн, зависящих от $x - ct$, которые совпадают с решениями уравнения Кортевега-де Вриза в виде кноидальных волн. В частности, совпадают солитонные решения для обоих уравнений. Более того, оба эти уравнения допускают представление Лакса, т. е. могут быть проинтегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния [15, 38]. Несмотря на свою «интегрируемость», уравнение (51) содержит решения коллапсирующего типа. Впервые этот факт был продемонстрирован Калантаровым и Ладыженской [14] в 1978 году. Для доказательства существования коллапса в (51) было построено мажорирующее неравенство типа (8) для положительно определённой величины

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} W^2 \, dx,$$

где $U = W_x$ (в соответствии с (52) предполагается, что W стремится к нулю на бесконечности).

Уравнение (51) относится к гамильтоновым уравнениям с

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_x^2/2 + W_x^2/2 + W_{xx}^2/2 - W_x^3/3) \, dx \equiv I_1 + I_2 + I_3 - I_4, \quad (53)$$

где Φ имеет смысл потенциала скорости, определяемого из уравнений

$$W_t = \Phi_x, \quad \Phi_t = W_x - W_{xxx} - W_x^2. \quad (54)$$

Чтобы найти соответствующее неравенство, найдём сначала первую производную величины R по времени:

$$R_t = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} W \Phi_x \, dx \leq 2R^{1/2} (2I_1)^{1/2}. \quad (55)$$

Для второй производной согласно (54) имеем

$$R_{tt} = 4I_1 - 4I_2 - 4I_3 + 6I_4. \quad (56)$$

Подставляя далее величину R и её производные (55) и (56) в выражение $R_{tt}R - (1 + \alpha) R_t^2$, после простых преобразований с учётом определения H (53) получим

$$R_{tt}R - (1 + \alpha) R_t^2 \geq R[-6H + 2I_2 + 2I_3 + 2(1 - 4\alpha)I_1]. \quad (57)$$

Отсюда видно, что при $\alpha = 1/4$ в силу положительности интегралов I_2 и I_3 это неравенство сводится к виду (8):

$$R_{tt}R - (1 + 1/4) R_t^2 \geq -6HR. \quad (58)$$

После замены переменных

$$R = A^{-1/4}$$

мы приходим к неравенству (10) с потенциалом

$$V(A) = -HA^6/4.$$

Отсюда видно, что частица может достичь начала координат при отрицательной начальной скорости и положительной начальной энергии $E(0)$. Если $H < 0$, то коллапс — обращение интеграла R в бесконечность за конечное время — возможен при выполнении условия [14]

$$A_t(0) < 0, \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty} W \Phi_x dx \Big|_{t=0} > 0.$$

При $H > 0$ коллапс тоже возможен, но при выполнении двух условий:

$$A_t(0) < 0 \text{ и } E(0) > 0,$$

которые в переменных W и Φ записываются в виде

$$R_t(0) > 0, \quad 32R_t^2(0) - \frac{H}{R^{14}(0)} > 0.$$

Как показано в [19], данные критерии для уравнения (51) обобщаются на случай периодических граничных условий.

Мажорирующее неравенство может быть также получено для «улучшенного» уравнения Буссинеска с отрицательной дисперсией [19]:

$$U_{tt} - U_{xx} - U_{xxtt} + (U^2)_{xx} = 0. \quad (59)$$

В отличие от классического интегрируемого уравнения Буссинеска с отрицательной дисперсией, уравнение (59) имеет устойчивый закон дисперсии:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

Для уравнения (59) мажорирующее неравенство строится для величины [19]

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} (g^2 + g_x^2) dx > 0,$$

где $g_x = U$ и $0 < \alpha \leq 1/4$.

4. ОБОБЩЕНИЯ КРИТЕРИЯ ВЛАСОВА—ПЕТРИЩЕВА—ТАЛАНОВА

В этом разделе мы рассмотрим, как условия типа критерия Власова—Петрищева—Таланова могут быть использованы для изучения коллапсов в трёхмерных волновых системах. Мы обсудим два примера: обобщённое трёхмерное уравнение Кадомцева—Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial z} (U_t + U_{zzz} + (n+2)(n+1)U^{n+2}U_z) = \Delta_{\perp} U \quad (60)$$

и так называемое гиперболическое нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t + \Delta_{\perp} \psi - \psi_{zz} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (61)$$

В этих двух уравнениях $\Delta_{\perp} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ — оператор Лапласа в плоскости, поперечной к оси z , которая соответствует основному направлению распространения волны.

Случай $n = 3$ в (60) отвечает классическому уравнению Кадомцева—Петвиашвили. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили с $n = 4$ возникает при описании волн звукового типа в антиферромагнетиках при определённых углах распространения [18].

Гиперболическое НУШ (61) возникает при описании эволюции квазимонохроматических волн с отрицательной дисперсией, что отвечает знаку минус перед слагаемым ψ_{zz} (см. [39–41]). Классические примеры таких волн — поверхностные гравитационные волны на глубокой воде и электромагнитные волны в нелинейных диэлектриках с нормальной дисперсией.

Начнём анализ с уравнения Кадомцева—Петвиашвили (60), полагая $n = 4$. Рассмотрим величину

$$\langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{N} \int r_{\perp}^2 U^2 \, d\mathbf{r},$$

которая в силу сохранения $N = \int U^2 \, d\mathbf{r}$ имеет смысл среднего квадрата радиуса пучка. Как впервые показано в [18], для величины $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ может быть установлен аналог теоремы вириала (6):

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 U^2 \, d\mathbf{r} = 48H - 8 \int U_z^2 \, d\mathbf{r}, \quad (62)$$

где H — сохраняющий своё значение гамильтониан, при $n = 4$ равный

$$H = \int \left[\frac{U_z^2}{2} + \frac{(\nabla_{\perp} W)^2}{2} - U^4 \right] d\mathbf{r}.$$

Отсюда немедленно следует оценка

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r_{\perp}^2 U^2 \, d\mathbf{r} < 48H. \quad (63)$$

Таким образом, при $H < 0$ происходит коллапс пучка [18] — его сжатие (формально — до нуля). Можно показать, что критерий коллапса $H < 0$ имеет место и для всех целых значений $n > 4$.

Вопрос о критерии коллапса для классического трёхмерного уравнения Кадомцева—Петвиашвили, наиболее важного с точки зрения различных приложений, тем не менее остаётся до сих пор открытым, хотя о возможности коллапса свидетельствуют факт неограниченности снизу гамильтониана H при постоянном значении $N = \int U^2 \, d\mathbf{r}$, а также наблюдение коллапса при численном моделировании [42, 43].

Для гиперболического нелинейного уравнения Шрёдингера (61) в трёхмерной геометрии мы покажем, как, анализируя неравенства вириального типа, можно сделать заключение о невозможности коллапса волнового пакета как целого на стадии, когда имеется сжатие импульса по всем трём направлениям. Следует отметить, что представленное ниже доказательство, строго говоря, не исключает возникновения особенностей при начальных данных, отличных от рассматриваемых в этом разделе.

Уравнение (61) с гиперболическим оператором второго порядка описывает различное поведение волнового пакета в продольном направлении (вдоль оси z) и в направлении, поперечном к этой оси. В поперечном направлении квазичастицы притягиваются друг к другу, стремясь сжать пучок поперёк. В продольном направлении квазичастицы имеют отрицательную массу, поэтому нелинейность стремится увеличить размер пакета вдоль оси z . Главный вопрос в этой связи состоит в том, успеет ли образоваться особенность за счёт сжатия в поперечном направлении, несмотря на разлёт квазичастиц в продольном направлении.

Уравнение (61) является гамильтоновым с

$$H = \int |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} - \int \frac{|\psi|^4}{2} d\mathbf{r} \equiv I_{\perp} - I_z - Y. \quad (64)$$

Рассмотрим, как меняются средние квадраты размера волнового пакета вдоль и поперёк оси z , $\langle z^2 \rangle$ и $\langle r_{\perp}^2 \rangle$. Вычисления, аналогичные (2), дают

$$N \frac{d^2 \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt^2} = 4 \left[2 \int |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\mathbf{r} - \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right], \quad (65)$$

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} = 8 \int |\psi_z|^2 d\mathbf{r} + 2 \int |\psi|^4 d\mathbf{r}. \quad (66)$$

Величины $\langle r_{\perp}^2 \rangle$, I_{\perp} из уравнения (65) и $\langle z^2 \rangle$, I_z из уравнения (66) связаны соотношением неопределённости:

$$I_{\perp} \langle r_{\perp}^2 \rangle \geq N, \quad I_z \langle z^2 \rangle \geq N/4. \quad (67)$$

С учётом этих соотношений и определения H (64) можно оценить правые части (65) и (66):

$$N \frac{d^2 \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt^2} = 8H + 8I_z \geq -4H + \frac{2N}{\langle z^2 \rangle}, \quad (68)$$

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} = -4H + 4I_z + 4I_{\perp} > -4H + \frac{4N}{\langle r_{\perp}^2 \rangle}. \quad (69)$$

Рассмотрим теперь режим всестороннего сжатия, наиболее благоприятный с точки зрения коллапса, когда

$$\frac{d \langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt} < 0, \quad \frac{d \langle z^2 \rangle}{dt} < 0,$$

и покажем, что понимаемый как уменьшение среднего квадрата поперечного и/или продольного размеров до нуля ($\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$, $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$) коллапс в этом случае невозможен.

Вначале докажем, что при $d \langle z^2 \rangle / dt < 0$ средний квадрат продольного размера волнового пакета не может обратиться в нуль. Рассмотрим уравнение (66), из которого с учётом (67) следует замкнутое неравенство для $\langle z^2 \rangle$:

$$N \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} \geq 8I_z \geq \frac{2N}{\langle z^2 \rangle}. \quad (70)$$

При $d\langle z^2 \rangle / dt < 0$ это соотношение допускает однократное интегрирование по времени:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} \right)^2 - 2 \ln \langle z^2 \rangle \leq \mathcal{E}(0), \quad (71)$$

где $\mathcal{E}(0)$ — начальное значение $\mathcal{E}(t)$. Если $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$, то левая часть этого неравенства растёт за счёт слагаемого с логарифмом до бесконечности, что противоречит неравенству (71). Таким образом, сжатие до $\langle z^2 \rangle \rightarrow 0$ невозможно.

Покажем теперь, что невозможно и сжатие до нуля в поперечном направлении. Для этого умножим неравенство (68) на $d\langle z^2 \rangle / dt < 0$, а неравенство (69) на $d\langle r_{\perp}^2 \rangle / dt < 0$, результаты сложим, а затем в полученном выражении проведём интегрирование по времени от нуля до t . В результате получим

$$E(t) = N \frac{d\langle r_{\perp}^2 \rangle}{dt} \frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} - 8H \langle z^2 \rangle + 4H \langle r_{\perp}^2 \rangle - 2N \ln \langle z^2 \rangle - 4N \ln \langle r_{\perp}^2 \rangle \leq E(0), \quad (72)$$

где $E(0)$ — конечное значение $E(t)$ в начальный момент времени. Из этого неравенства немедленно следует невозможность коллапса на стадии сжатия, поскольку первый член в левой части неравенства (72) положителен по определению, члены, пропорциональные H , конечны, а логарифмическое слагаемое при $\langle r_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$ оказывается бесконечно большим. Это не согласуется с тем, что зависимость $E(t)$ ограничена сверху начальным значением $E(0)$. Таким образом, на наиболее «опасной» стадии всестороннего сжатия коллапс трёхмерного распределения волнового поля как целого невозможен [23]. Означает ли это, что коллапс в такой системе вообще невозможен? Строго говоря, нет. Во-первых, потому, что критерии типа критерия Власова—Петрищева—Таланова являются достаточными. Во-вторых, представленный анализ показывает, что коллапс, если он вообще возможен, следует искать для режимов, когда имеется истечение газа квазичастиц в продольном направлении, ведущее к росту продольного масштаба волнового пакета. До сих пор, однако, этот вопрос остаётся открытым, несмотря на значительный интерес к этой проблеме (см., например, последние публикации [44–46] на эту тему).

Данная работа поддержана РФФИ (грант № 00–01–00929), Программой поддержки ведущих научных школ РФ и INTAS (грант № 00–00292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 1353.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1310.
3. Gross E. P. // Nuovo Cimento. 1961. V. 20. P. 454.
4. Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 640.
5. Flambaum V., Kuznetsov E. // Proc. NATO ARW "Singularities in Fluids, Optics and Plasmas" / Ed. by E. Caflisch, G. Papanicolaou. Kluwer Publ., 1993. P. 197.
6. Berge L., Rasmussen J. J. // Phys. Lett. A. 2002. V. 304. P. 136.
7. Таланов В. И. // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 303.
8. Власов С. Н., Таланов В. И. Частное сообщение. 1984.
9. Kuznetsov E. A., Turitsyn S. K. // Phys. Lett. A. 1985. V. 112. P. 273.
10. Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
11. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
12. Levine H. A. // Trans. Am. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 1.
13. Kuznetsov E. A., Rasmussen J. J., Rypdal K., Turitsyn S. K. // Physica D. 1995. V. 87. P. 273.

14. Kalantarov V., Ladyzhenskaya O. // J. Sov. Math. 1978. V. 10. P. 53.
15. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 219.
16. Fal'kovich G. E., Spector M. D., Turitsyn S. K. // Phys. Lett. A. 1983. V. 99. P. 271.
17. Орлов А. Ю. Soliton collapse in integrable systems: Препринт ИАЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1983.
18. Турицын С. К., Фалькович Г. Е. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 258.
19. Turitsyn S. K. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R13.
20. Fujita H. J. // Fac. Sci. Univ. Tokio. Sect. A: Math. 1966. V. 16. P. 105.
21. Turitsyn S. K. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R796.
22. Кузнецов Е. А., Лушников П. М. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 614.
23. Berge L., Kuznetsov E. A., Rasmussen J. J. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. R1 340.
24. Kuznetsov E. A. // Physica D. 2003 (accepted). <http://ru.arxiv.org/pdf/physics/0204080>.
25. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 594.
26. Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E. // Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 103.
27. Weinstein M. I. // Commun. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 567.
28. Rasmussen J. J., Rypdal K. // Physica Scripta. 1986. V. 33. P. 481.
29. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. С. 1 020.
30. Nirenberg L. // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. 1966. V. 20, No. 4. P. 73.
31. Ладыженская О. А. Математические проблемы динамики несжимаемой вязкой жидкости. М.: Наука, 1970.
32. Belanger P. A. // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. P. 2 077.
33. Schopf W., Kramer L. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2 316.
34. Kaplan E., Kuznetsov E., Steinberg V. // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 3 712.
35. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюлл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. С. 1.
36. Zeldovich Ya. B. // Astron. Astrophys. 1970. V. 5. P. 84.
37. Frisch U. Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge Univ. Press, 1995.
38. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980.
39. Захаров В. Е. // ПМТФ. 1968. Т. 9. С. 86.
40. Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 495.
41. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 12.
42. Кузнецов Е. А., Мушер С. Л., Шафаренко А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 241.
43. Кузнецов Е. А., Мушер С. Л. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1 605.
44. Bergé L., Germaschewski K., Grauer R., Rasmussen J. J. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. Article no. 153 902.
45. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. С. 655.
46. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123. С. 726.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
30 июня 2003 г.

INTEGRAL CRITERIA OF WAVE COLLAPSES

E. A. Kuznetsov

We present an overview of the results of analysis of the integral criteria of wave collapses, i.e., the sufficient criteria of the formation of singularities from initially smooth wave-field distributions in a finite time. All such criteria are based on solving a majorizing second-order differential inequality which can be obtained for a wide range of models, including the nonlinear Schrödinger equation, the nonlinear Klein–Gordon equation, the time-dependent Ginzburg–Landau equation, the equations of dust hydrodynamics, the (Boussinesq) nonlinear-string equation, and the generalized Kadomtsev–Petviashvili equation.