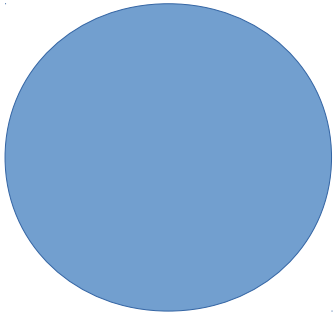
Сильно взаимодействующие фермионы

М.В.Фейгельман

Содержание лекции существенно использует материал лекции В.Н.Глазкова 16.02.2024

1. Ферми-газ: основные свойства
2. Ферми-жидкость Ландау
   а) термодинамика
   б) транспорт
3. Что бывает в эксперименте
   а) 3-He
   б) очень разбавленный металл
   в) “странный металл” и ВТСП
4. Обратный предел: бесконечно сильное взаимодействие (SYK model)
5. Нерешенные проблемы - резюме

Сфера Ферми в импульсном пространстве



$$\frac{4}{3}\pi k_F^3 = \frac{N}{2}\frac{(2\pi)^3}{V} = (2\pi)^3 \frac{n}{2}$$

$$k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$$

$$n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}$$

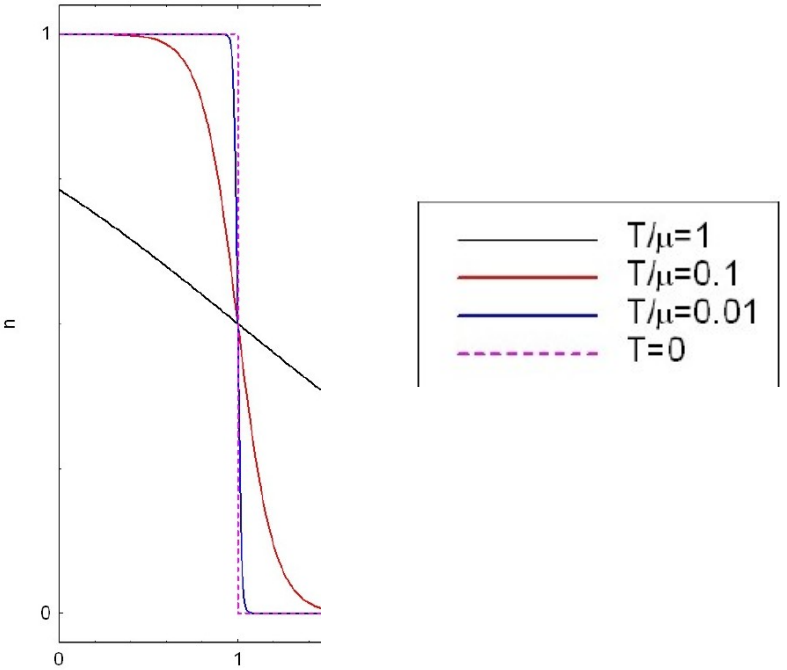
Плотность состояний $D(E) = \frac{dN}{dE}$ ~ $E^{1/2}$

При низких температурах T << μ
обычно можно считать D(E) = D(0) -
“плотность состояний на Ферми-уровне”

$$E = \int_0^{E_F} E\, D(E)\, dE = \frac{3N}{2E_F^{3/2}} \int_0^{E_F} E^{3/2}\, dE = \frac{3}{5} N E_F$$

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{2}{5} n E_F$$

$E_F = k_F^2/2m$

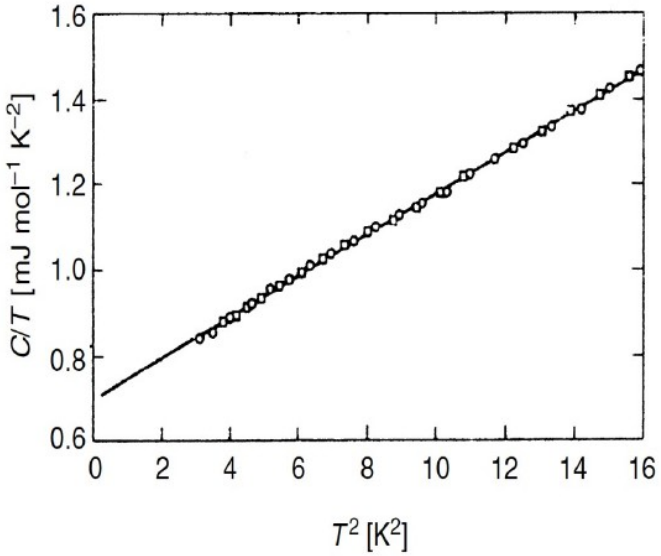


Теплоёмкость вырожденного ферми-газа.

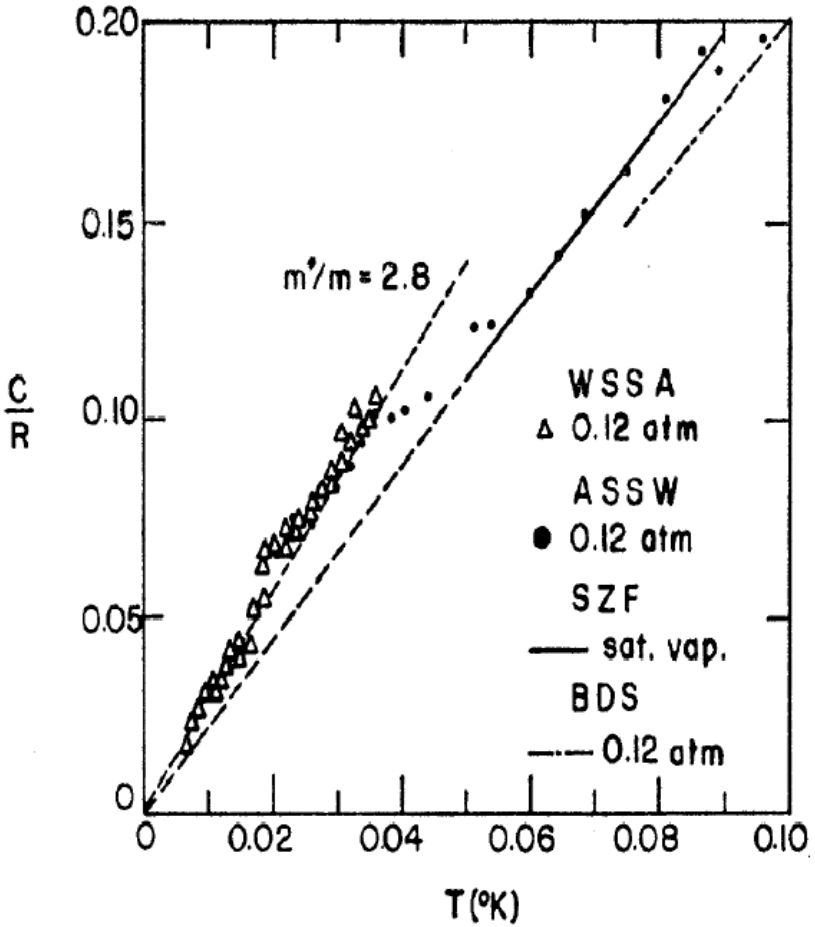
$$C=\int_0^{\infty}(E-E_F)\frac{\partial n(E)}{\partial T}D(E)\,dE \;=D(E_F)\frac{1}{4T^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ch^2\frac{x}{2T}}x^2\,dx \;=\frac{\pi^2}{2}N\frac{T}{E_F}$$

На самом деле теплоемкость металла имеет вид $C(T) = \gamma T + \# T^3$
Второй член – вклад фононов решетки. Он мал при $T < 3K$

Cu:



Гелий-3 - самый “чистый” пример системы многих Ферми-частиц
Но для него $E_F \approx 6$ K (в рамках модели Ферми-газа) и линейная теплоемкость должна быть видна при $T << 1K$



Экспериментальная зависимость C(T) для 3He линейна лишь при гораздо более низких температурах, причем с наклоном сильно большим, чем предсказания теории Ферми-газа.

Что не так ?

Атомы 3He довольно сильно взаимодействуют
Кристаллизация гелия происходит при небольшом давлении - 30 атм.

Электроны в металлах тоже сильно взаимодействуют – по закону Кулона

Почему модель Ферми-газа хоть что-то примерно верное дает ?

Транспортные свойства: проводимость и теплопроводность

Проводимость металла: $\sigma = e^2 n\tau/m$ (формула Друде)
где n – плотность электронов, m -масса, τ – время свободного пробега

В очень чистом металле время пробега τ определяется температурой и взаимодействием между электронами

Теплопроводность: $\kappa = C \langle v^2 \rangle \tau$ - “газокинетическая формула”
где C – теплоемкость единицы объема и v – скорость частиц газа

Для гелия вопрос о проводимости не актуален,
но теплопроводность измерима и была подробно исследована

Теория Ферми-жидкости (Л.Д.Ландау, 1956)

ЛЛ т. 9

Как учесть взаимодействие между фермионами, чтобы получить предсказания для термодинамических (теплоемкость, сжимаемость) и кинетических (проводимость, теплопроводность) величин для металлов или гелия-3 ?

В жидкости не существует понятия квантовых состояний для отдельных частиц. Однако, исходный пункт для построения спектра ферми-жидкости таков: классификация уровней энергии остается неизменной при постепенном «включении» взаимодействия между атомами, т. е. при переходе от газа к жидкости.
В этой классификации роль частиц газа переходит к элементарным возбуждениям (квазичастицам), число которых совпадает с числом атомов и которые подчиняются статистике Ферми.

$n(\mathbf{p})$ есть функция распределения квазичастиц

$$\int n\, d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

задание этой функции определяет энергию E жидкости

Однако E не равно $\int n\varepsilon\, d\tau$

Рассмотрим изменение E при бесконечно малом изменении функции распределения:

$$\frac{\delta E}{V} = \int \varepsilon(p)\,\delta n\,d\tau.$$

Элементарное возбуждение: частица в самосогласованном поле других частиц

ЛЛ т. 9

При учете спина: $$\frac{\delta E}{V} = \mathrm{Sp}\int \widehat{\varepsilon}\delta\widehat{n}\,d\tau \equiv \int \varepsilon_{\alpha\beta}\delta n_{\beta\alpha}\,d\tau.$$

Если спиновая зависимость функции распределения и энергии отсутствуют, то

$$n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta},$$

Энтропия: $$\frac{S}{V} = -\mathrm{Sp}\int\{\widehat{n}\ln\widehat{n} + (1-\widehat{n})\ln(1-\widehat{n})\}\,d\tau,$$

$$\frac{\delta N}{V} = \mathrm{Sp}\int \delta\widehat{n}\,d\tau = 0, \quad \frac{\delta E}{V} = \mathrm{Sp}\int \widehat{\varepsilon}\delta\widehat{n}\,d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{n} = [e^{(\widehat{\varepsilon}-\mu)/T} + 1]^{-1}.$$

$$\mu|_{T=0} = \varepsilon_F \equiv \varepsilon(p_F).$$

Распределение Ферми для квазичастиц

Вблизи поверхности ферми-сферы, где функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ имеет физический смысл, ее можно разложить по степеням $p - p_F$

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F), \qquad \mathbf{v}_F = \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\right|_{p=p_F}$$

есть «скорость» квазичастиц на ферми-поверхности

$$m^* = p_F / v_F$$ - “эффективная масса квазичастиц”

Энтропия и теплоемкость для Ферми-жидкости:

$$S = C = V\gamma T, \quad \gamma = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

Упражение №1: вывести этот результат

Вернемся к сделанному предположению о том, что каждой квазичастице может быть приписан определенный импульс. Условие справедливости этого предположения требует, чтобы неопределенность импульса (связанная с конечностью длины свободного пробега квазичастицы) была мала не только по сравнению с величиной самого импульса, но и по сравнению с шириной Δp «области размытости» распределения — области, в которой оно существенно отличается от «ступенчатой» функции[1]):

ЛЛ т. 9

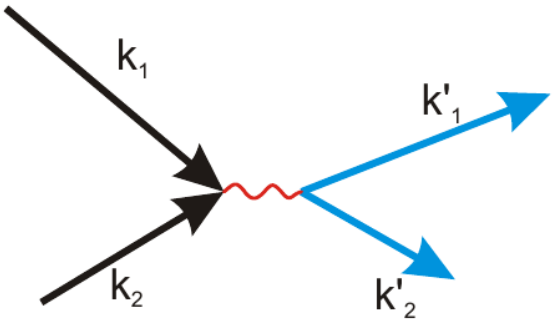
$$\theta(\mathbf{p}) \equiv \theta(p) = \begin{cases} 1, & p < p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

Легко видеть, что это условие соблюдается, если распределение $n(\mathbf{p})$ отличается от (1.10) лишь в малой области вблизи поверхности ферми-сферы. Действительно, в силу принципа Паули взаимно рассеиваться могут только квазичастицы в области размытости распределения, причем в результате рассеяния они должны переходить в свободные состояния в той же области. Поэтому вероятность столкновения пропорциональна квадрату ширины этой области. Соответственно пропорциональна $(\Delta p)^2$ и неопределенность энергии, а с нею и неопределенность импуль-

Взаимодействие квазичастиц

$$\delta\widehat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \mathrm{Sp}' \int \widehat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta\widehat{n}(\mathbf{p}')\, d\tau'.$$

$$\widehat{\varepsilon}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F = v_F(p - p_F) + \mathrm{Sp}' \int \widehat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta\widehat{n}(\mathbf{p}')\, d\tau'.$$



$$\frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}\widehat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = F(\vartheta) + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}' G(\vartheta)$$

Безразмерные функции угла на Ферми-поверхности между векторами **p** и **p'**

$$\nu(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = \left.\frac{2d\tau}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{2\cdot 4\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{dp}{d\varepsilon}\right)_{p_F} = \frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}.$$

Плотность состояний на поверхности Ферми

$$f_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \delta_{\alpha\beta} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad f = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Sp}'\widehat{f}. \quad \Rightarrow \quad \frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3} f(\vartheta) = 2F(\vartheta).$$

Связь эффективной массы и функции взаимодействия F(θ)

Функция взаимодействия квазичастиц удовлетворяет определенному интегральному соотношению, следующему из принципа относительности Галилея. Прямым следствием этого принципа является совпадение импульса единицы объема жидкости с плотностью потока ее массы. Скорость квазичастицы есть $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, так что поток квазичастиц дается интегралом

$$\mathrm{Sp}\int \widehat{n}\frac{\partial\widehat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\,d\tau.$$

Поскольку число квазичастиц в жидкости совпадает с числом истинных частиц, то ясно, что полный перенос массы квазичастицами получится умножением потока их числа на массу m истинной частицы. Таким образом, получим следующее равенство:

$$\mathrm{Sp}\int \mathbf{p}\widehat{n}d\tau = \mathrm{Sp}\int m\frac{\partial\widehat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\widehat{n}\,d\tau.$$

Положив $n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, варьируем

$$\int \mathbf{p}\delta n\,d\tau = m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\delta n\,d\tau + m\int\frac{\partial f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}}n\delta n'\,d\tau\,d\tau' = m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\delta n\,d\tau - m\int f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'}\delta n\,d\tau\,d\tau',$$

Ввиду произвольности $\bar{\delta n}$ ➡

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \int f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\,d\tau'.$$

Для ступенчатой функции $n(\mathbf{p}') = \theta(p')$ $\qquad \dfrac{\partial\theta(p)}{\partial\mathbf{p}} = -\dfrac{\mathbf{p}}{p}\,\delta(p - p_F).$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_F}{(2\pi\hbar)^3}\int f(\vartheta)\cos\vartheta\, do'. \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{m^*}{m} = 1 + \overline{F(\vartheta)\cos\vartheta}.}$$

Вычислим еще сжимаемость ферми-жидкости $\qquad u^2 = \partial P/\partial\rho = \dfrac{N}{m}\dfrac{\partial\mu}{\partial N}.$

Упражнение №2: получите это равенство

$\mu = \varepsilon_F$ при $T = 0$

$$\Longrightarrow \quad \delta\mu = \int f(p_F, \mathbf{p}')\delta n'\, d\tau' + \frac{\partial\varepsilon_F}{\partial p_F}\delta p_F$$

$$\delta N = V p_F^2 \delta p_F/\pi^2\hbar^3$$

$$\int f\delta n'\, d\tau' = \frac{1}{2}4\pi\overline{f}\frac{\delta N}{4\pi V}$$ (среднее по Ф.п.)

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} + \frac{1}{3m}\left(\frac{p_F}{2\pi\hbar}\right)^3\int f(\vartheta)(1-\cos\vartheta)\, do'. \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{u^2 = \frac{p_F^2}{3mm^*}(1 + \overline{F(\vartheta)}).}$$

Функция $\widehat{f}$ должна удовлетворять определенным условиям, возникающим из требования устойчивости основного состояния жидкости. Последнему отвечает заполнение всех состояний квазичастиц внутри ферми-сферы, и энергия этого состояния должна быть минимальна по отношению к произвольной малой деформации сферы. Не приводя всех вычислений, укажем здесь лишь их окончательный результат[1]). Его удобно сформулировать, разложив функции $F(\vartheta)$ и $G(\vartheta)$ из (2.4) по полиномам Лежандра, т. е. представив их в виде

$$F(\vartheta)=\sum_l (2l+1)F_l P_l(\cos\vartheta), \quad G(\vartheta)=\sum_l (2l+1)G_l P_l(\cos\vartheta)$$

Условия устойчивости:

$$F_l + 1 > 0,$$
$$G_l + 1 > 0.$$

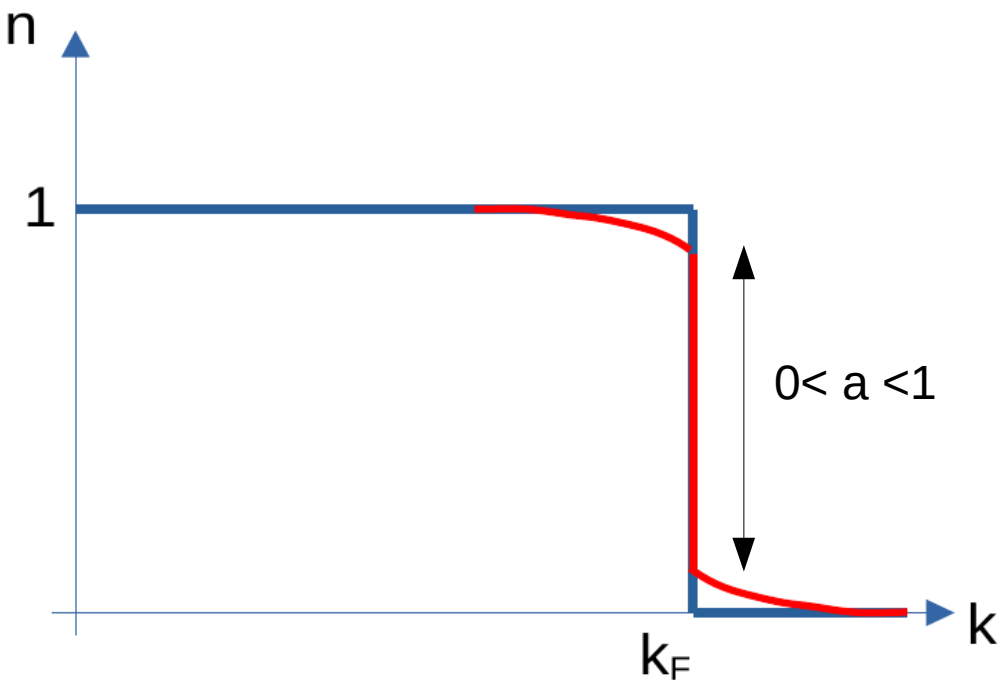
Эффективная масса и сжимаемость выражаются через F_0 и F_1

Условие слабости взаимодействия:

$$\frac{e^2}{a} \sim e^2 n^{1/3} \ll E_F \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3} \Rightarrow n \gg \left(\frac{e^2 m}{\hbar^2}\right)^3 \sim 10^{24}\, 1/см^3$$

Не бывает

Функция распределения частиц при T=0

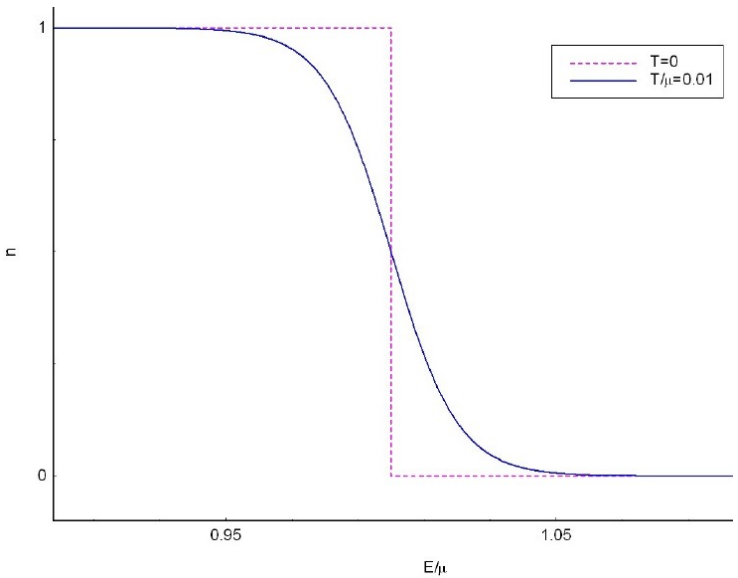


$\Delta n = n(k_F+0) - n(k_F-0) = a$

Схематическое изображение функции распределения по импульсам при T=0 для идеального ферми-газа (синяя «ступенька») и для системы ферми-частиц с взаимодействием (красная кривая).

Время жизни квазичастиц τ(T)

При $T \ll E_F$ функция распределения квазичастиц n(E) мало отличается от $\theta(\mathbf{p})$



Процесс рассеяния возможен если и начальное и конечное состояние находятся в интервале $\Delta E \sim T \ll E_F$ около поверхности Ферми

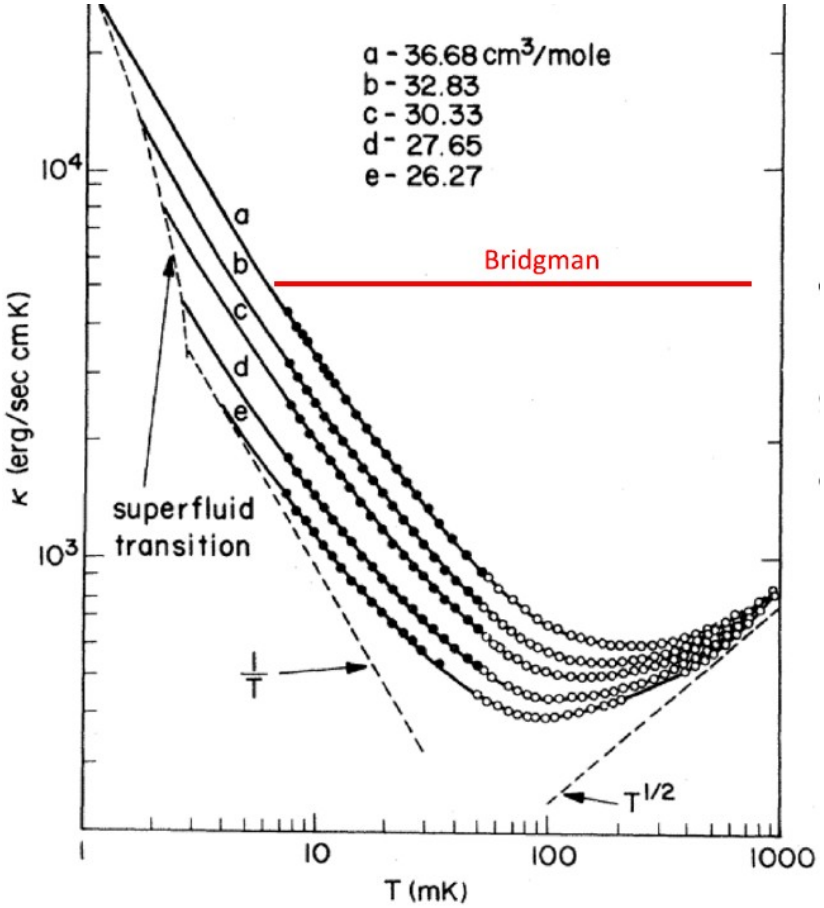
Поэтому вероятность неупругого процесса $\sim (T/E_F)^2$

Соответственно, $\tau(T) \approx \hbar E_F/T^2$

Проводимость: $\sigma(T) = e^2 n\tau/m \sim 1/T^2$

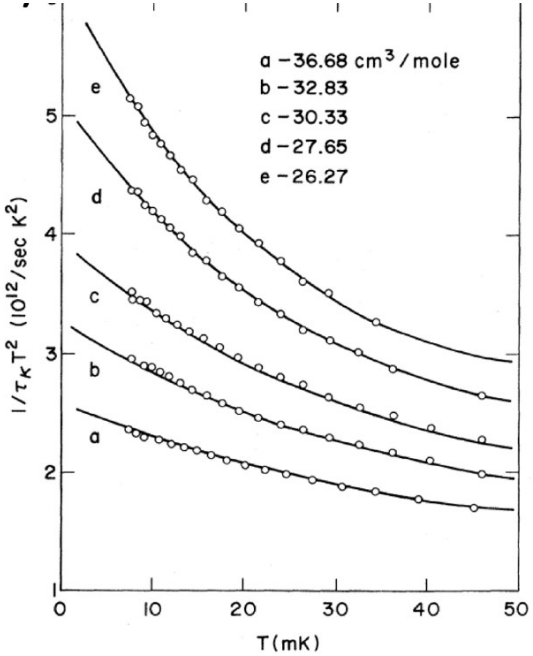
Теплопроводность: $\kappa = C \langle v^2 \rangle \tau \sim 1/T$

Экспериментальные данные по теплопроводности 3He



Закон 1/T “приблизительно” работает при T < 50 mK

$T^2\tau(T)$ *de facto* не постоянно:



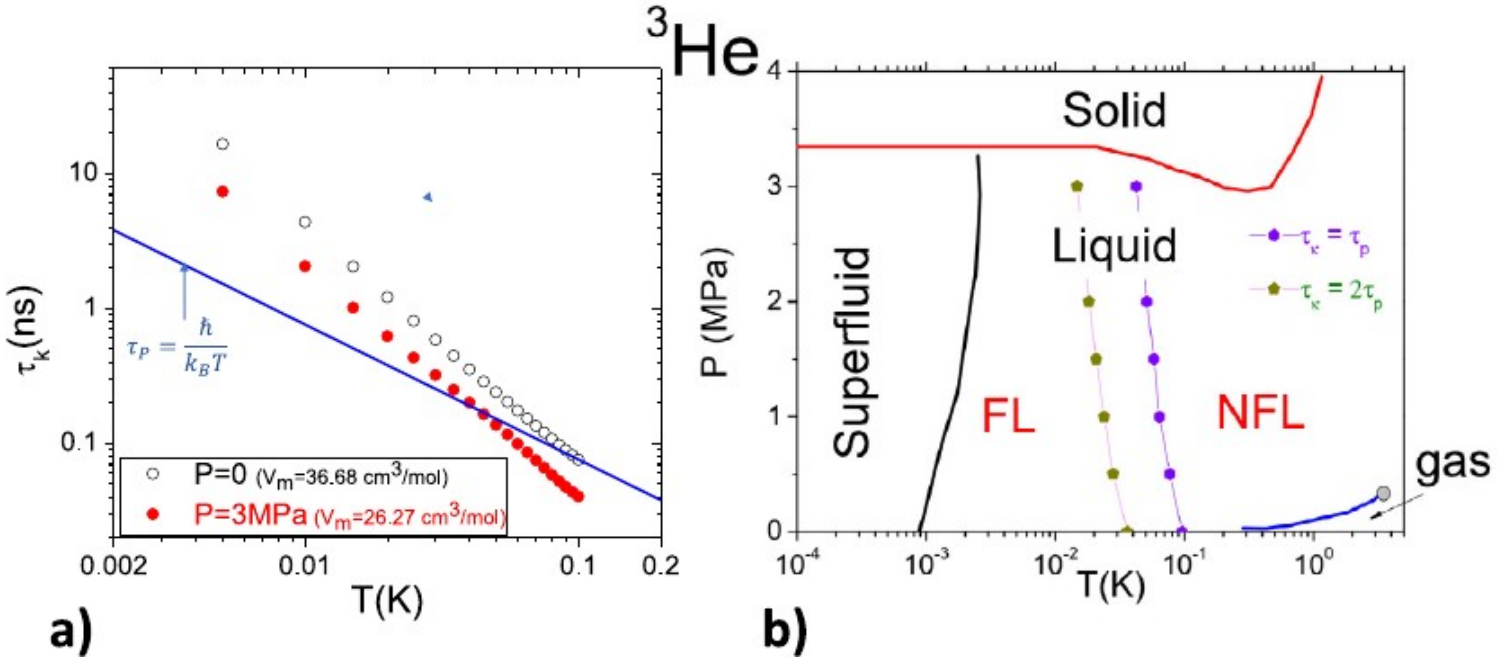


Fig. 2 | Scattering time, Planckian bound, and the FL-NFL cross-over. a Fermion-fermion scattering time, τ_κ as a function of temperature for two molar volumes[17]. The blue solid line represents the Planckian time: $\tau_P = \frac{\hbar}{k_B T}$. Note that τ_κ tends to fall below τ_P at sufficiently high temperature. **b** The phase diagram of ^{3}He[10] and the fuzzy border between the Fermi liquid (FL) and the non-Fermi liquid (NFL) regimes. Also shown are temperatures below which $\tau_\kappa > \tau_P$ or $\tau_\kappa > 2\tau_P$.

Время пробега

$\tau(T) \approx \alpha \hbar E_F / T^2$

Планковское время $\hbar$ / T

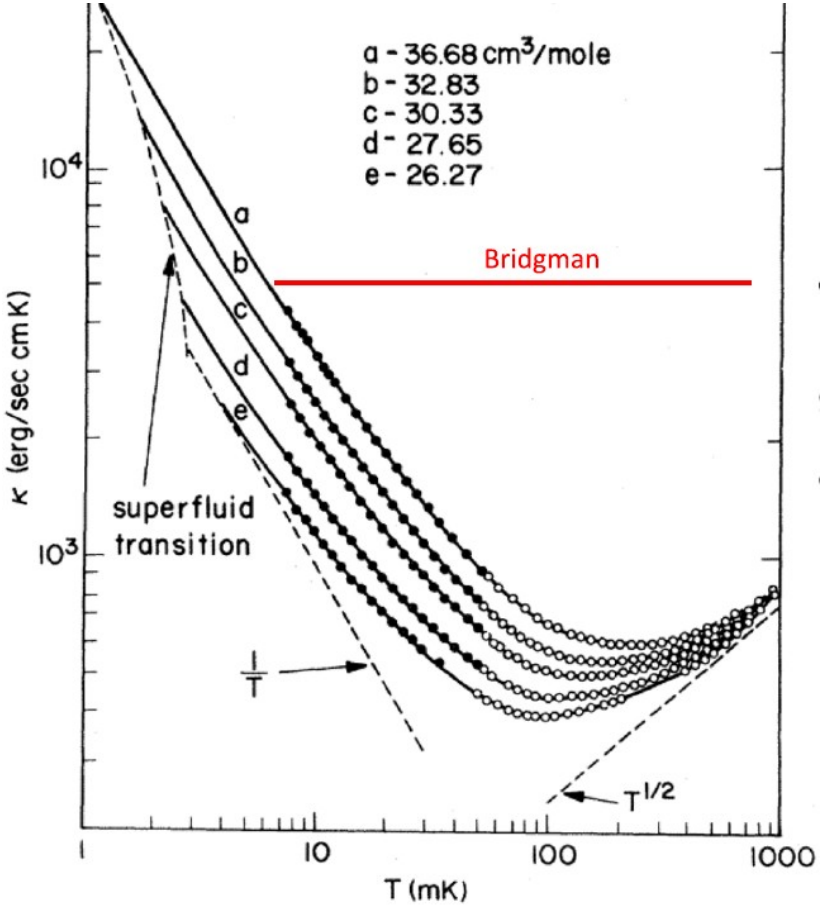
Почему $\alpha \sim 0.02$?

Они сравниваются при $T \approx \alpha E_F$

Очень сильное взаимодействие ?

Хотя $m^*/m \approx 3$

https://doi.org/10.1038/s41467-024-46079-0



Самое удивительное обстоятельство: много ниже температуры вырождения T_F появляется какой-то новый механизм теплопроводности, который не описывается рассеянием квазичастиц Ферми-жидкости

Резюме: судя по кинетическим свойствам выше 50 mK, взаимодействие в 3He какое-то очень сильное и не описывается теорией Ландау...

Scalable T^2 resistivity in a small single-component Fermi surface

Xiao Lin, Benoît Fauqué, Kamran Behnia

SCIENCE
28 AUGUST 2015 • VOL 349 ISSUE 6251 945

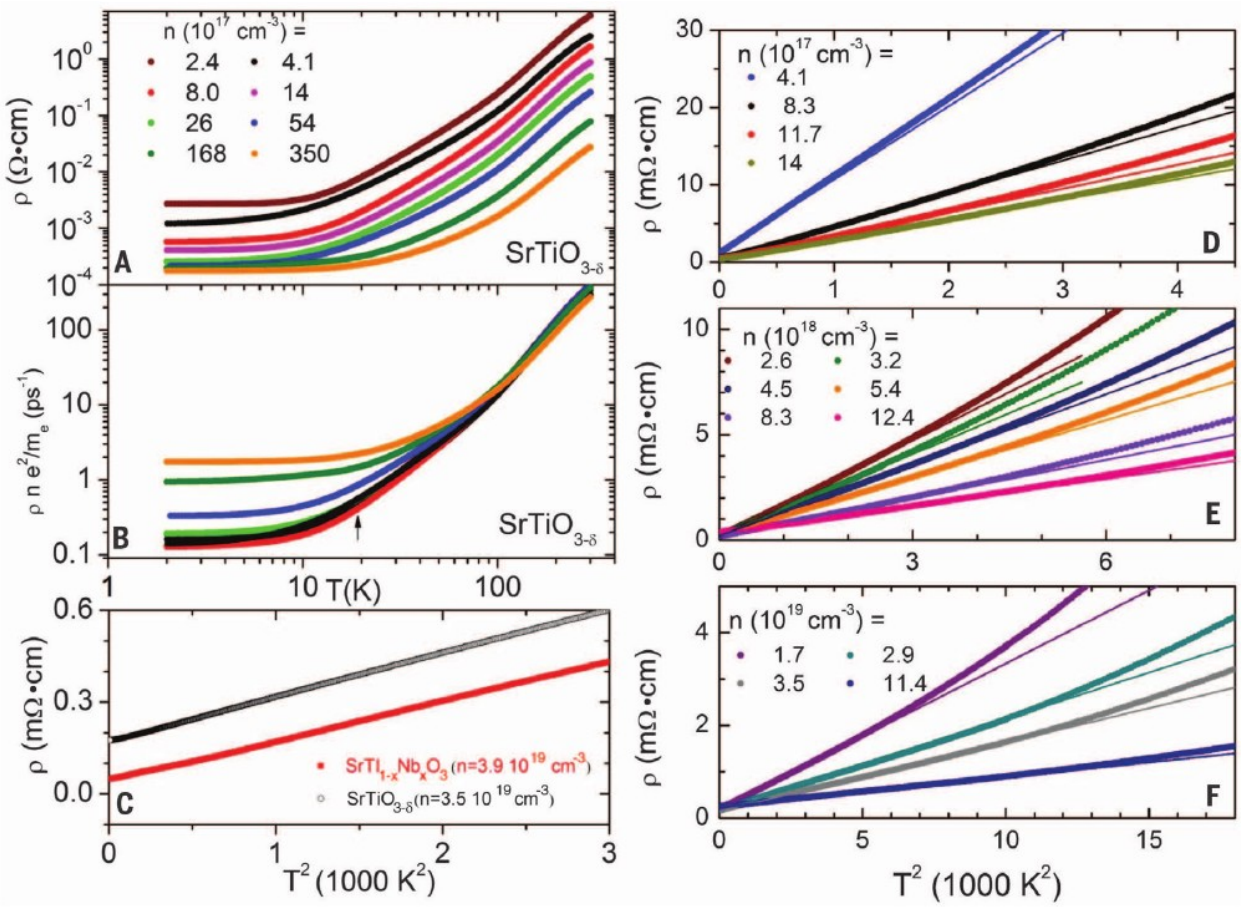


Fig. 1. Doping and temperature dependence of resistivity in n-doped $SrTiO_3$. (**A**) Evolution of resistivity in $SrTiO_{3-\delta}$ with doping across two orders of carrier density. (**B**) The product of resistivity and carrier density yields the scattering rate, which does not depend on carrier concentration above 100 K. (**C**) Resistivity plotted as a function of T^2 in oxygen-deficient and Nb-doped $SrTiO_3$ samples of comparable carrier concentration displays the same slope but different intercepts. (**D** to **F**)

Откуда T^2 ??

$SrTiO_3$ – изолятор, который можно сделать очень разбавленным металлом

$SrTiO_{3-x}$ при $x > 10^{-5}$ - металл, и даже сверхпроводник !

Это потому, что изолятор $SrTiO_3$ имеет диэлектрическую константу ε=20000 !

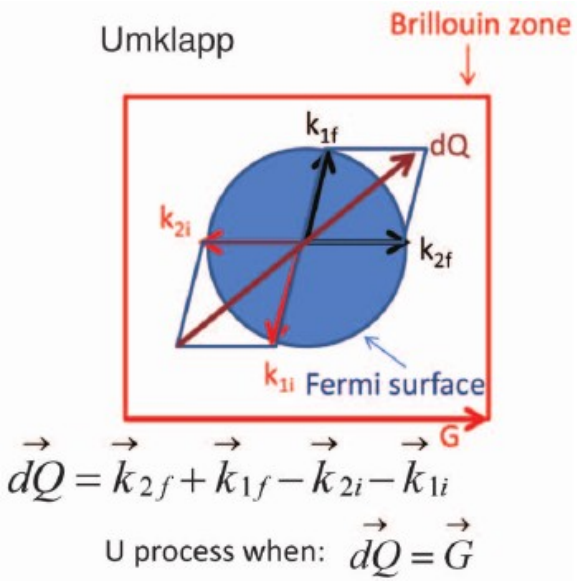
$R(T) \sim T^2$ следует из теории Ландау ?

Не вполне....при очень малом k_F нет процессов переброса, т.е. сохраняется полный импульс электронов, а значит и ток !

$k_F a = 0.1\text{-}0.3 \ll \pi$

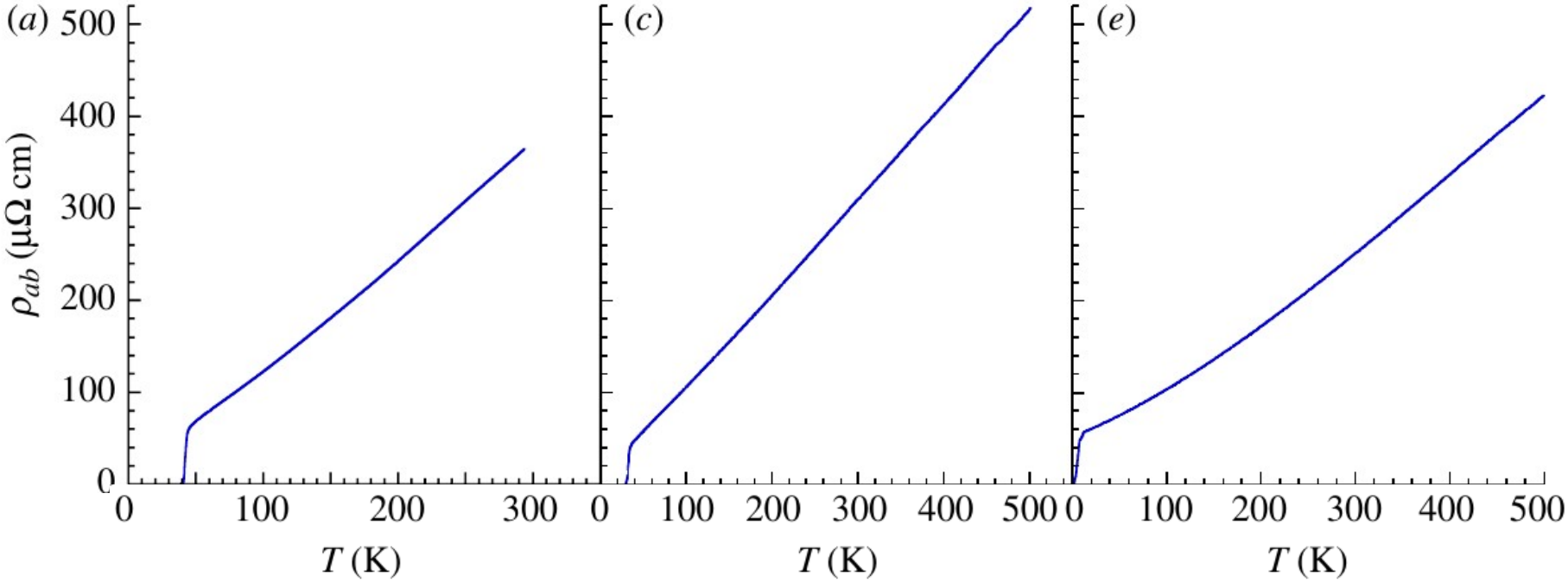
j=ne**v**=ne**p**/m сохраняется ?

Откуда T^2 ??



Phil. Trans. R. Soc. A (2011) **369**, 1626–1639
doi:10.1098/rsta.2010.0196

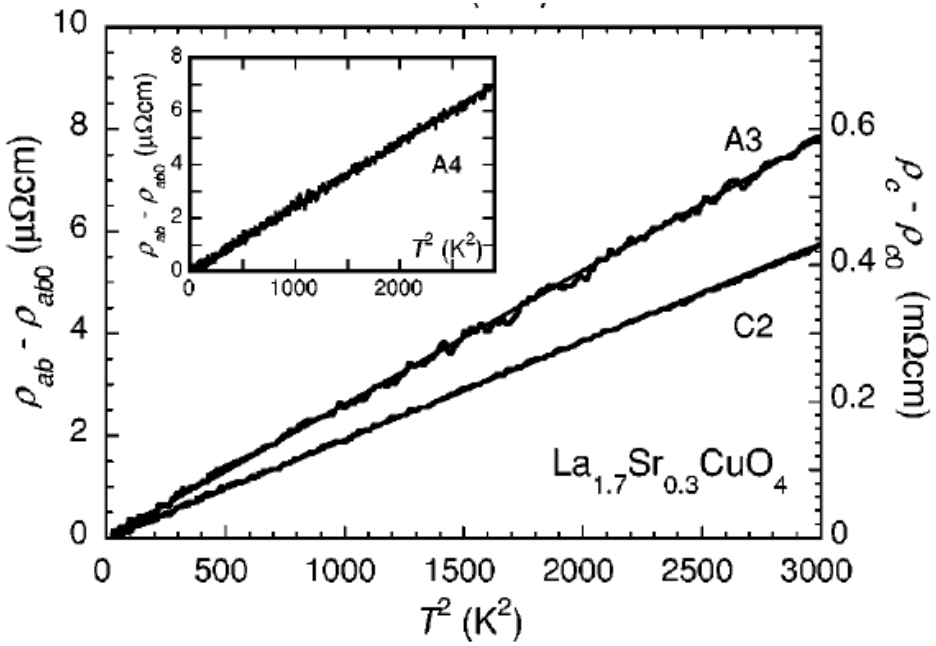
$R(T) = R_0 + AT$ в ВТСП выше сверхпроводящего перехода ??



Temperature-dependent zero-field resistivity curves for $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ (LSCO) with $x =$ (*a*) 0.17, (*c*) 0.21 and (*e*) 0.26.

PHYSICAL REVIEW B **68**, 100502(R) (2003)

Тот же $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ но $x > 0.3$



R(T) ~ AT^2 с аномально большим A

Kamran Behnia

SciPost Phys. 12, 200 (2022)

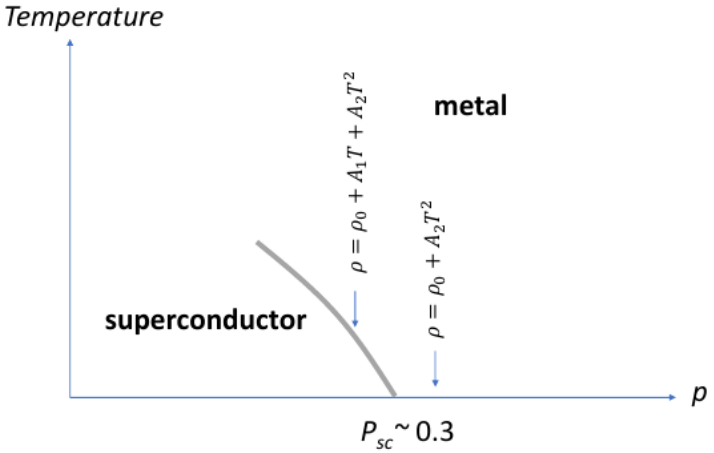


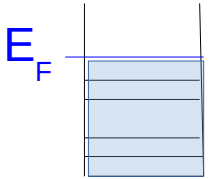
FIG. 1. **The puzzle:** Zoom on the cuprate phase diagram near the end of the superconducting dome. Hussey and his co-workers [7] found that below a threshold doping level, the system has a superconducting ground state and a resistivity which follows $\rho = \rho_0 + A_1T + A_2T^2$. Above this threshold, the system is not a superconductor and resistivity can be fit with a purely quadratic temperature-dependnet term: $\rho = \rho_0 + A_2T^2$.

Ферми-жидкость с аномально сильным взаимодействием превращается в не-Ферми-жидкость !

Совсем другой подход:
взаимодействие есть, а исходного спектра частиц нет.

A.Yu. Kitaev 2015 + тысячи статей с тех пор - “Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) model”

Preliminaries: 1) рассмотрим конечную систему (ящик)
2) вместо импульсов **p** волн. функ. характеризуются номерами локализованных в ящике состояний i,j,k...
3) энергии этих состояний ε_i ε_j …. полное число фермионов N >> 1



a_j^+ и a_k - операторы рождения и уничтожения фермионов

$$H = \Sigma_i \varepsilon_i a_i^+ a_i + \Sigma_{ijkl} J_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l \qquad \varepsilon_i \sim E \qquad J_{ijkl} \sim J/N^{3/2}$$

Вклады в полную энергию: E N (спектр) + N J (взаимодействие)

Fermi-liquid: $J \leq E$ - взаимодействие “не очень сильное”

Kitaev: $H_{SYK} = \Sigma_{ijkl} J_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l$ $J_{ijkl} \sim J/N^{3/2}$

случайные величины

В пределе N >> 1 и на больших временах t >> 1/J эта задача точно решается

Однако решение не имеет ничего общего с теорией Ферми-жидкости !

$G(t) = -i \overline{\langle T\, a_k(t) a_k^+(0) \rangle}$ Усредненная функция Грина фермиона

Ферми-газ: $G(t>0) \sim 1/t$ Ферми-жидкость: $G(t>0) \sim a/t$ где $0<a<1$

$\mathrm{Im}\, G(E) = \mathrm{const}$ $\Delta n = n(k_F+0) - n(k_F-0) = a$ Скачок на Ф.-пов.!

D. Bagrets, A. Altland, and A. Kamenev, Nucl. Phys. **B911**, 191 (2016).

Результат решения модели SYK для функции Грина:

$G(t) \sim 1/t^{1/2}$ при $1/J < t/\hbar < N/J$

$G(t) \sim N/t^{3/2}$ при $N/J \ll t/\hbar$

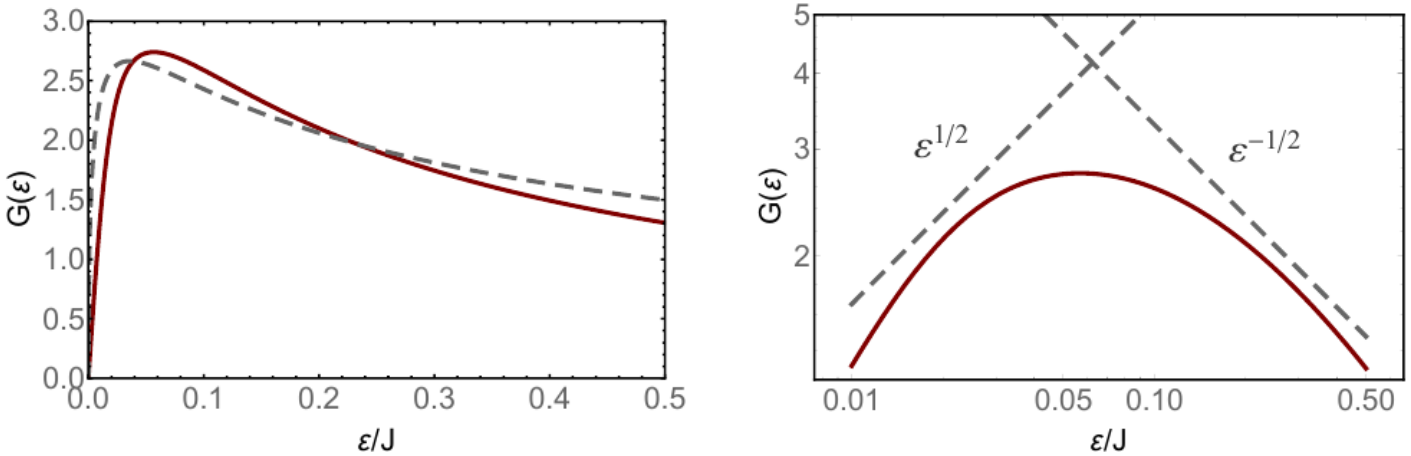


Figure 1: Numerical (solid red line) versus analytic (dashed line) result for the Matsubara Green function $G(\epsilon)$ evaluated for $N = 24$ Majorana fermions (left panel). Logarithmic plot of the numerically evaluated Matsubara Green function shown versus two expected scaling laws (right panel).

Нет Ферми-поверхности

Нет и квазичастиц

Нет ничего похожего на скачок $\Delta n = n(k_F+0) - n(k_F-0) = a$

Как перейти от решения SYK к Ферми-жидкости ?

A. V. Lunkin,[1,2,3] K. S. Tikhonov,[2,3,4] and M. V. Feigel'man

PHYSICAL REVIEW LETTERS **121,** 236601 (2018)

$$H = \Sigma_i \varepsilon_i a_i^+ a_i + \Sigma_{ijkl} J_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l \qquad \varepsilon_i \sim E \qquad J_{ijkl} \sim J/N^{3/2}$$

Если $E > J/N$ то при очень низких температурах $T < E^2/J$ реализуется Ферми-жидкость

При $E < J/N$ квадратичные члены неважны вовсе, SYK решение верно везде

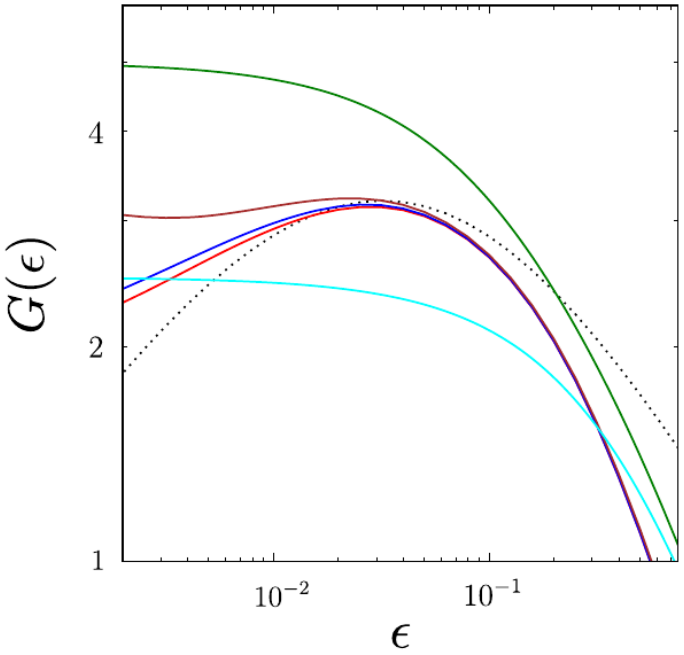


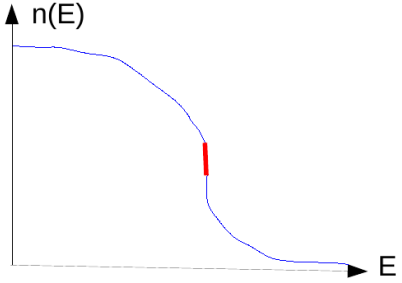
FIG. 1. Green function of the SYK model (log-log scale): (i) red, blue, brown: exact diagonalization for $N = 32$ fermions and $\gamma = 0$, 0.01, 0.03; (ii) green, cyan: solution of mean-field equations Eqs. (3) and (4) at $\gamma = 0.2$ and $\gamma = 0.4$; (iii) dotted line: analytical result of Eq. (22) from Ref. [10], interpolating between $\epsilon \gg M^{-1}$ and $\epsilon \ll M^{-1}$ limits, evaluated at $N = 32$.

Главные нерешённые проблемы

1. Теория Ферми-жидкости с очень сильным взаимодействием - как 3He под давлением, или $La_{1.7}Sr_{0.3}CuO_4$

   Как описать транспортные свойства, когда $a<<1$?

$n(+)- n(-) = a$



2. Как описать транспортные свойства жидкости фермионов, когда неупругое время $\tau \sim h/T$ (Планковское время) ?
   Это сверхпроводящие ВТСП материалы, и разное другое

$R(T) \sim T$?!?