

# Джозефсоновская физика и сверхпроводящие диодные явления

Яков Фоминов

Последнее редактирование: 18 февраля 2026 г.

## Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>1</b>
1 Введение: сверхпроводимость.	1
2 Эффект Джозефсона.	2
3 Ток-фазовое соотношение.	3
4 Резистивная модель.	3
4.1 Резистивная модель (RSJ).	3
4.2 Резистивная модель с ёмкостью (RCSJ).	7
5 Ступеньки Шапиро.	9
5.1 Режим заданного тока.	9
6 СКВИД (сверхпроводящий квантовый интерферометр).	9
7 Сверхпроводящий диодный эффект в асимметричном СКВИДе.	10
8 Литература	11

## 1 Введение: сверхпроводимость.

### 1. Основные факты про сверхпроводимость:

- $R(T)$  у некоторых веществ может обращаться в ноль при температурах ниже некоторой критической,  $T < T_c$  (Kammerlingh Onnes, 1911).
- Аналогия со сверхтекучестью (Капица, Ландау).
- Теория БКШ (1957): эффективное притяжение между электронами за счет взаимодействия с фононами.
- Куперовские пары, сверхпроводящий конденсат, параметр порядка  $\Delta e^{i\varphi}$  — волновая функция конденсата.
- $\Delta$  определяет спектральные свойства, щель в плотности состояний, поглощение излучения.
- $\nabla\varphi$  пропорционален сверхтоку (бездиссипативному току куперовских пар).
- Эффект Мейсснера (идеальный диамагнетизм) — экранировка магнитного поля сверхтоком.

Хорошие книги по сверхпроводимости: [1-3].

## 2 Эффект Джозефсона.

Термин *эффект Джозефсона* означает совокупность явлений, имеющих место в контактах двух сверхпроводников через «слабую связь». В 1962 году появилась короткая теоретическая работа английского физика Брайана Джозефсона, где исследовался туннельный переход (контакт сверхпроводников через прослойку диэлектрика) и было предсказано два эффекта:

1. Стационарный (DC) эффект Джозефсона: через контакт в отсутствие приложенного напряжения может течь постоянный сверхпроводящий ток:

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

2. Нестационарный (AC) эффект Джозефсона:

$$\dot{\varphi} = 2eV/\hbar, \quad (2)$$

поэтому при постоянном напряжении  $V$  через контакт помимо обычного постоянного тока будет также течь переменный сверхпроводящий ток частоты  $\omega = 2eV/\hbar$  (куперовская пара проходит разность потенциалов  $V$ ).

Это предсказание было весьма необычным и вызвало серьёзные споры, в которых некоторые учёные, в том числе весьма именитые, ставили предсказанные эффекты под сомнение. Оппонентом выступал, например, Джон Бардин, один из создателей микроскопической теории сверхпроводимости (теории Бардина-Купера-Шриффера). Независимые вычисления других теоретиков, однако, показали правильность результатов Джозефсона, а затем они были подтверждены и экспериментом. В 1973 году Джозефсон получил за своё открытие Нобелевскую премию.

Дальнейшие исследования показали, что эффект Джозефсона весьма общий и проявляется не только в туннельных переходах, но и при соединении двух сверхпроводников через слабую связь любого вида (например, нормальный металл, ферромагнетик, геометрическое сужение и др.).

Одной из мотиваций, приведших Джозефсона к открытию, являлось желание выяснить, имеет ли какие-либо наблюдаемые следствия фаза параметра порядка. Действительно, как известно, сверхпроводник описывается комплексным параметром порядка  $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$ . Модуль параметра порядка  $|\Delta|$  определяет как бы «силу» сверхпроводимости, в частности сверхпроводящую щель в одночастичном спектре. А фаза  $\varphi$ ? На что она влияет? Что будет, например, если привести в контакт два сверхпроводника с одинаковыми по модулю, но разными по фазе параметрами порядка? Именно из этих вопросов и возникла работа Джозефсона.

Оказалось, что величина сверхпроводящего тока через контакт (джозефсоновского тока) определяется именно разностью фаз параметров порядка с двух сторон. Параметр порядка  $\Delta$  можно рассматривать как волновую функцию сверхпроводящего конденсата (куперовских пар электронов), поэтому эффект Джозефсона — **квантовый** эффект. С другой стороны, конденсат куперовских пар состоит из огромного количества электронов, и в джозефсоновском токе участвует огромное число электронов, поэтому эффект Джозефсона — одновременно и **макроскопический** эффект. Он явился очень важным шагом в понимании природы сверхпроводящего состояния. Кроме того, он нашёл значительное и растущее число применений для создания уникальных измерительных приборов.

- Как управлять разностью фаз: контакт, замкнутый в кольцо. Тогда разность фаз на контакте (скачок фазы) определяется магнитным потоком через кольцо:  $\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ , где  $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$  — квант магнитного потока.

### 3 Ток-фазовое соотношение.

- В более общем случае ток-фазовое соотношение можно разложить по джозефсоновским гармоникам:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\varphi) \quad (3)$$

— гармоники с  $k > 1$  называют высшими.

- Высшие гармоники малы в туннельном пределе, т.к. их амплитуда зависит от прозрачности  $\mathcal{T}$  барьера как

$$I_k \propto \mathcal{T}^k. \quad (4)$$

- Синусоидальная ток-фаза (только с первой гармоникой) всегда хорошо работает в двух предельных случаях:  $\mathcal{T} \ll 1$  или  $T \rightarrow T_c$ .

### 4 Резистивная модель.

#### 4.1 Резистивная модель (RSJ).

Предположим, что контакт находится в режиме заданного тока, а напряжение подстраивается под него в соответствии со свойствами системы (такой режим часто изучается в эксперименте). Пока заданный ток  $I$  меньше критического  $I_c$ , весь ток переносится куперовскими парами (т.е. сверхпроводящим током). Если же  $I > I_c$ , то куперовские пары уже не могут обеспечить такой ток, и в дополнение к сверхпроводящему току возникает нормальная компонента, а значит, и напряжение на контакте, т.к. нормальная компонента связана с диссипацией.

Обратите внимание, что при  $I > I_c$  сверхпроводимость в берегах, а также сверхпроводящая связь между берегами не разрушаются — нормальная компонента тока появляется *в дополнение* к сверхпроводящей. Эта ситуация не имеет отношения к так называемому току распаривания объёмного сверхпроводника, связанному с тем, что куперовские пары начинают разрушаться при определённой скорости движения, — в таком случае при превышении током соответствующего критического значения сверхпроводимость разрушалась бы полностью. В джозефсоновском же контакте речь идёт именно о свойствах контакта, и ток  $I_c$  мал в силу большого сопротивления туннельной границы, в частности гораздо меньше тока распаривания берегов.

Итак, оказывается, что при  $I > I_c$  на контакте возникает напряжение. Фундаментальным результатом теории эффекта Джозефсона является соотношение (2) между напряжением на контакте и скоростью изменения во времени разности фаз между берегами.

Рассмотрим нестационарный эффект Джозефсона в рамках так называемой резистивной модели, которая прямо вытекает из этой картины. Полный ток  $I$  через систему является суммой сверхпроводящего тока  $I_s$ , определяемого формулой (1), и нормального тока  $I_n = V/R$ , где  $R$  — сопротивление контакта в нормальном состоянии. Таким образом, джозефсоновский контакт можно представить в виде параллельного соединения идеального (бездиссипативного) джозефсоновского контакта и сопротивления  $R$  (см. рис. 1а).

Используя соотношение (2), получаем уравнение

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin \varphi = I, \quad (5)$$

определяющее динамику фазы при заданном токе  $I$  через контакт. Обратите внимание, что вся микроскопическая информация о контакте содержится в величинах  $I_c$  и  $R$ , в то время как резистивная

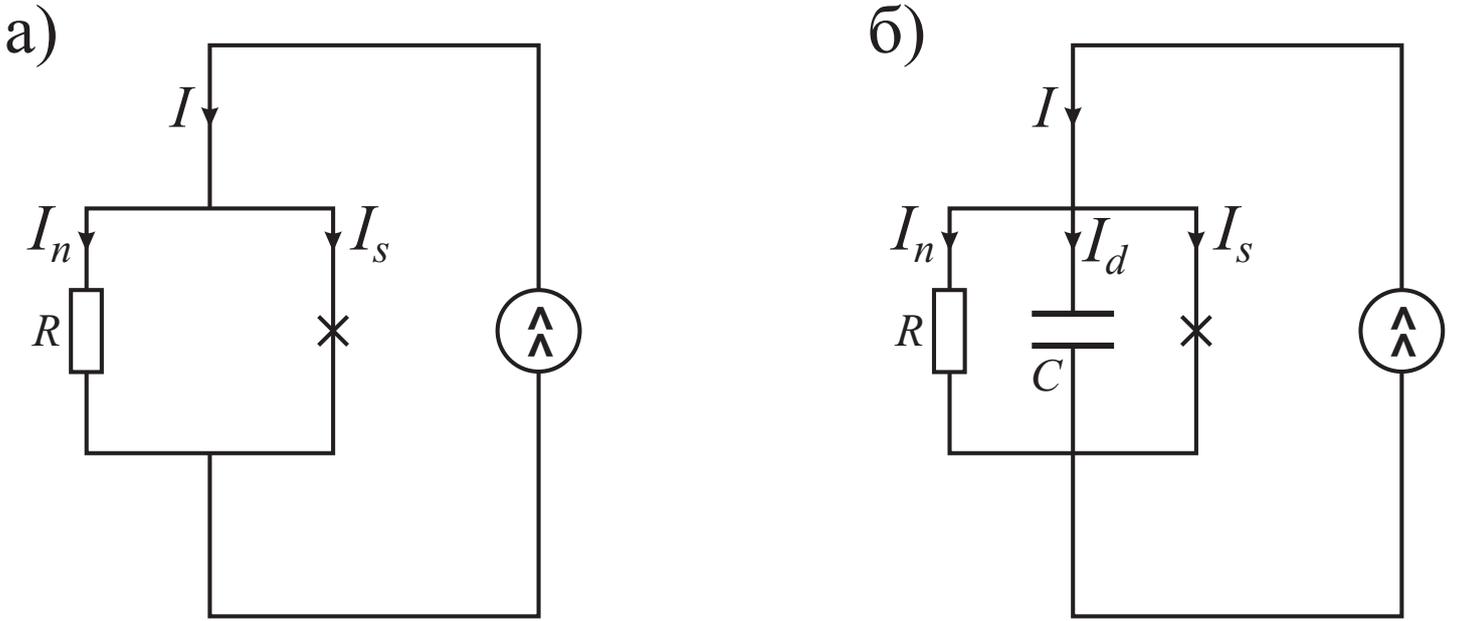


Рис. 1: а) Резистивная модель джозефсоновского перехода, включённого в цепь с источником тока. Джозефсоновский контакт обозначен крестиком. Полный ток  $I$  состоит из сверхпроводящего тока  $I_s = I_c \sin \varphi$  и нормального диссипативного тока  $I_n$ . б) Обобщение на случай наличия ёмкости. В полный ток добавляется ток смещения через конденсатор  $I_d$ .

модель принимает эти величины как данные и изучает поведение макроскопической характеристики контакта — разности фаз  $\varphi$ , которая характеризует сверхпроводящее состояние контакта в целом, т.е. содержит информацию только о фазе сверхпроводящего конденсата, состоящего из огромного количества электронов.

Уравнение (5) на функцию  $\varphi(t)$  интегрируется в элементарных функциях, после чего формула (2) при подходящем выборе начала отсчёта времени даёт

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad (6)$$

где

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}. \quad (7)$$

Итак, если заданный постоянный ток  $I$  через контакт превышает критический ток контакта  $I_c$ , на нём возникает напряжение  $V$ , периодически зависящее от времени. Следовательно, джозефсоновский контакт начинает излучать электромагнитные волны — это явление называется джозефсоновской генерацией.

Усреднение формулы (6) по времени приводит к соотношению

$$2e\bar{V} = \hbar\omega, \quad (8)$$

имеющему простую физическую интерпретацию: при переходе с одной стороны контакта на другую куперовские пары в среднем приобретают энергию  $2e\bar{V}$ , которая затем выделяется в виде кванта электромагнитного излучения с частотой  $\omega$ .

Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, будет показывать именно среднее напряжение  $\bar{V}$ , поэтому полученная с его помощью вольт-амперная характеристика будет иметь вид

$$\bar{V} = R \sqrt{I^2 - I_c^2}, \quad (9)$$

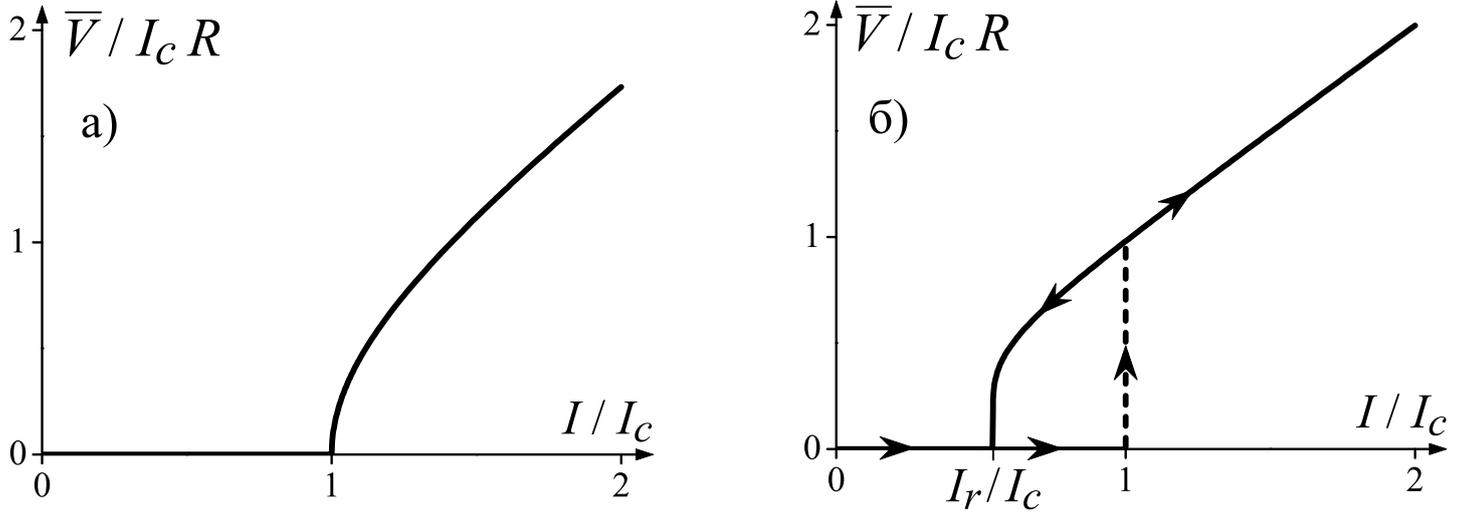


Рис. 2: Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода. а) Переход без ёмкости. Напряжение на контакте возникает при  $I > I_c$ . б) Переход с ёмкостью,  $\beta = 5$ . С увеличением тока напряжение возникает скачком при  $I > I_c$ . При уменьшении тока напряжение пропадает при токе захвата  $I_r$ , который меньше, чем  $I_c$ , т.е. имеет место гистерезис.

следующий из формул (8) и (7) и показанный на рис. 2а.

Если ток  $I$  через переход лишь немного превышает  $I_c$ , то в основном он течёт в виде сверхпроводящего тока  $I_s$  через джозефсоновский элемент на эквивалентной схеме рис. 1а, в то время как нормальный ток мал. Наоборот, при  $I \gg I_c$  почти весь ток течёт через резистор ( $I \approx I_n$ ), и вольт-амперная характеристика на этом участке выходит на линейную характеристику перехода в нормальном состоянии.

Для джозефсоновского контакта наиболее энергетически выгодным является состояние с разностью фаз, равной нулю (или целому кратному  $2\pi$ ), — при этом ток через контакт отсутствует. Если же разность фаз  $\varphi$  ненулевая и через контакт течёт некоторый ток  $I_s$ , то это означает, что в контакте запасена энергия. Найти её можно следующим образом. Будем отсчитывать энергию от энергии при  $\varphi = 0$  и представим себе, что ток  $I_s$  возник в результате медленного нарастания разности фаз от нуля до  $\varphi$  в течение некоторого времени  $t$ . Если фаза менялась во времени, значит, на контакте возникало напряжение, и запасённую энергию можно найти как

$$E_s = \int_0^t I_s V dt, \quad (10)$$

где  $V$  определяется по формуле (2). Подставляя сюда также обычное джозефсоновское соотношение  $I_s = I_c \sin \varphi$  и переходя к интегрированию по  $\varphi$ , получаем

$$E_s = E_J(1 - \cos \varphi), \quad (11)$$

где

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}. \quad (12)$$

Энергию (11) называют джозефсоновской энергией. Джозефсоновский переход можно рассматривать как нелинейный индуктивный элемент, запасаящий энергию при изменении тока через него.

Формула (11) для зависимости  $E_s(\varphi)$  применима для случая синусоидальной зависимости сверхпроводящего тока от разности фаз. Это так в туннельном контакте, но в общем случае зависимость

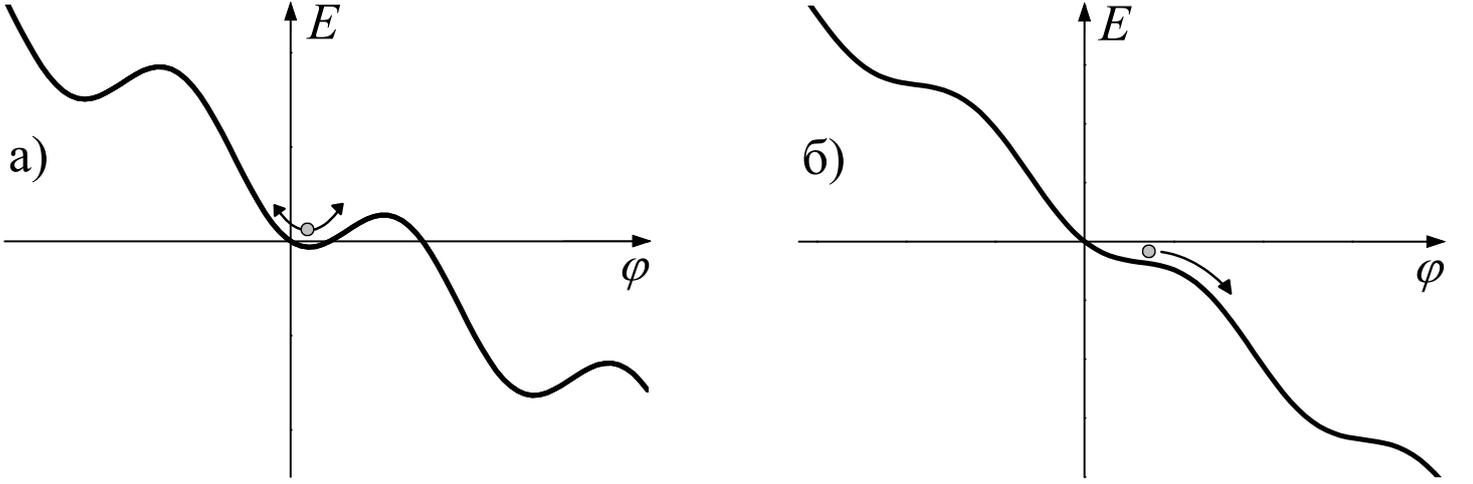


Рис. 3: Энергия  $E(\varphi)$  джозефсоновского перехода с заданным током — так называемая «стиральная доска». а) Случай  $I < I_c$ , стационарный эффект Джозефсона: фаза  $\varphi$  остаётся вблизи одного из локальных минимумов. б) Случай  $I > I_c$ , нестационарный эффект Джозефсона: минимумов нет, фаза  $\varphi$  движется вниз по «стиральной доске».

$E_s(\varphi)$  может быть более сложной. Мы легко можем, однако, выразить сверхпроводящий ток через джозефсоновскую энергию в общем случае. Для этого продифференцируем формулу (10) по времени, что даёт  $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial t}$  и далее  $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}$ . В результате напряжение сокращается, и мы получаем общее соотношение

$$I_s = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

Обсуждение джозефсоновской энергии  $E_s(\varphi)$  относится непосредственно к контакту. Если же рассматривать джозефсоновский контакт не сам по себе, а включённым в цепь с источником тока (как мы и предполагали в формулировке резистивной модели), то при вычислении свободной энергии цепи нужно также учитывать энергию, затрачиваемую источником тока:

$$E_I = \int_0^t IV dt = \frac{\hbar I}{2e} \varphi. \quad (14)$$

Таким образом, свободная энергия цепи для случая заданного тока как функция разности фаз на контакте даётся формулой

$$E = E_J(1 - \cos \varphi) - \frac{\hbar I}{2e} \varphi, \quad (15)$$

которая проиллюстрирована на рис. 3. Такую форму кривой, получающуюся из формулы (15), часто называют «стиральной доской».

Обсуждение эффекта Джозефсона на языке  $E(\varphi)$  становится весьма наглядным. При  $I < I_c$  фаза  $\varphi$  находится в локальном минимуме свободной энергии, что соответствует стационарному эффекту Джозефсона (см. рис. 3а). С увеличением тока  $I$  средний наклон «стиральной доски» возрастает, а глубина локальных минимумов уменьшается. При  $I = I_c$  локальные минимумы пропадают, и фаза начинает «скатываться» вниз по «стиральной доске» — значит,  $\varphi$  непрерывно меняется во времени, следовательно, на контакте возникает напряжение — это и есть нестационарный эффект Джозефсона (см. рис. 3б).

## 4.2 Резистивная модель с ёмкостью (RCSJ).

При составлении эквивалентной схемы джозефсоновского контакта, изображённой на рис. 1а, мы не учли ещё один фактор, который может оказаться важным: как видно из самого устройства джозефсоновского контакта, в котором два берега разделены прослойкой диэлектрика, такая конструкция напоминает конденсатор, следовательно, должна обладать некоторой ёмкостью. Если данная ёмкость мала (с чем её надо сравнивать, станет ясно из дальнейшего рассмотрения), то ею можно пренебречь, и применимо наше предыдущее рассмотрение. В этом же разделе мы обсудим, к чему приводит наличие ёмкости.

Итак, в общем случае в рамках резистивной модели необходимо дополнить эквивалентную схему параллельно включённой ёмкостью  $C$  (см. рис. 1б). Хотя постоянный ток через конденсатор невозможен, тем не менее через него может течь переменный ток смещения:

$$I_d = C \frac{dV}{dt}, \quad (16)$$

связанный с перезарядкой обкладок конденсатора. Этот ток необходимо добавить в левую часть соотношения (5), одновременно выразив напряжение через разность фаз по общей формуле (2). Домножая также обе стороны на  $\hbar/2e$ , получаем следующее уравнение на функцию  $\varphi(t)$ :

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R} \dot{\varphi} + E_J \sin \varphi = E_J \frac{I}{I_c}, \quad (17)$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение движения маятника под действием вынуждающей силы и при наличии трения. Кроме того, отождествляя  $\varphi$  с линейной координатой  $x$ , мы можем смотреть на это уравнение как на уравнение движения частицы массой  $(\hbar/2e)^2 C$  при наличии трения с коэффициентом трения  $\eta = (\hbar/2e)^2/R$  в периодическом потенциале  $E_J(1 - \cos \varphi)$  под действием внешней силы  $E_J(I/I_c)$ . Собственная частота малых колебаний вблизи одного из минимумов потенциала равна

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}} \quad (18)$$

и называется в джозефсоновском случае плазменной частотой перехода. Плазменная частота может рассматриваться также как резонансная частота

$$\omega_p = \frac{c}{\sqrt{L_J C}} \quad (19)$$

контура с ёмкостью  $C$  и «собственной индуктивностью» джозефсоновского перехода:

$$L_J = \frac{\hbar c^2}{2eI_c} = \frac{c\Phi_0}{2\pi I_c}. \quad (20)$$

«Масса», определяющая инерционное поведение перехода при изменении  $\varphi$ , связана с величиной ёмкости  $C$ . Таким образом, рассмотренный в предыдущем разделе случай соответствует безмассовой частице. К чему же теперь приводит наличие массы? Предположим, что мы сначала увеличиваем ток  $I$  от нуля до бесконечности, а затем уменьшаем обратно до нуля. Как и раньше, массивная частица начнёт непрерывно двигаться при наклоне «стиральной доски», соответствующем  $I = I_c$ . Правда, в отличие от безмассовой частицы, которая при  $I$ , слегка превышающем  $I_c$ , движется очень медленно, частица с конечной массой сразу же разгонится до некоторой конечной скорости (т.е. с увеличением тока при  $I = I_c$  на контакте скачком возникнет конечное напряжение). При дальнейшем увеличении наклона скорость будет расти. Существенная особенность массивной частицы проявится

при уменьшении тока. Уменьшив ток до  $I_c$ , мы снова получим частицу, движущуюся с конечной скоростью. В связи с инерцией частицы остановить её можно, только несколько уменьшив угол наклона по сравнению с критическим, т.е. при некотором «токе возврата»  $I_r < I_c$ . Ток возврата тем меньше, чем выше ёмкость («масса») и чем выше сопротивление (т.е. чем меньше «вязкость»).

Таким образом, наличие ёмкости у джозефсоновского контакта приводит к гистерезису его вольт-амперной характеристики (см. рис. 2б — зависимость  $\bar{V}(I)$  различна для случаев увеличения и уменьшения  $I$ ). Количественно ток возврата и гистерезисные свойства определяются величиной параметра МакКамбера:

$$\beta = \frac{2e}{\hbar} I_c C R^2. \quad (21)$$

С помощью параметра  $\beta$  и характерной джозефсоновской частоты  $\omega_0 = (2e/\hbar)I_c R$  мы можем записать (17) в более компактном виде:

$$\beta \frac{\ddot{\varphi}}{\omega_0^2} + \frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}. \quad (22)$$

При  $\beta \ll 1$  ёмкостным членом можно пренебречь. В этом случае уравнение сводится к виду (5), и вольт-амперная характеристика имеет однозначный вид (9). С увеличением  $\beta$  возникает гистерезис с током возврата  $I_r$ , который убывает с ростом  $\beta$  и стремится к нулю в пределе  $\beta \rightarrow \infty$  (т.е. в этом пределе возвратная часть вольт-амперной характеристики становится линейной).

Для учёта температуры и вызванных ей тепловых флуктуаций к току в правую часть ещё добавляют флуктуирующий ток  $I_f(t)$ , характеризующийся следующим коррелятором:

$$\langle I_f(t) I_f(t') \rangle = \frac{2T}{R} \delta(t - t'). \quad (23)$$

За счёт флуктуирующего тока конечное напряжение на контакте будет возникать даже при  $I < I_c$  (т.е. даже если минимумы потенциала есть, температура позволяет частице с некоторой вероятностью перескочить в соседний минимум).

Все наше рассмотрение относится к работе джозефсоновского контакта в классическом режиме ( $\varphi$  — классическая переменная). Возможен и квантовый режим, который определяется ещё одним параметром  $E_J/E_C$  — отношением джозефсоновской энергии к кулоновской  $E_C = e^2/2C$ . В квантовом режиме энергия частицы в потенциальных ямках начинает квантоваться, а также становится возможным квантовое туннелирование через барьер. Таким образом, конечное напряжение при  $I < I_c$  может возникать не только за счёт тепловой активации, но и за счёт квантового туннелирования. Именно за экспериментальное исследование этих эффектов Джон Кларк, Мишель Деворе и Джон Мартинис получили Нобелевскую премию 2025 года с формулировкой «за открытие макроскопического квантово-механического туннелирования и квантования энергии в электрической цепи».

Рассмотрим квантовомеханическое движение в потенциальной яме характерной ширины  $a$  и характерной глубины  $U_0$ . Мы понимаем, что квантование уровней становится неважно при  $\hbar^2/ma^2 \ll U_0$  — это переход к классическому режиму. Глядя на уравнение (17), мы понимаем, что роль массы для джозефсоновского контакта играет параметр  $\hbar^2 C/e^2$ , в то время как характерная ширина ямы задаётся периодичностью по фазе — это просто число порядка единицы (или порядка  $2\pi$  — неважно). Характерная глубина ямы —  $E_J$ , поэтому мы получаем условие перехода к классике  $E_C \ll E_J$ . Таким образом, предел  $E_J/E_C \gg 1$  — классический (или квазиклассический). А в режиме  $E_J/E_C \lesssim 1$  квантовые эффекты уже полностью развиты. В зависимости от предела может быть хорошо определена фаза ( $E_J/E_C$  велико) или заряд на контакте ( $E_J/E_C$  мало) — это канонически сопряжённые переменные.

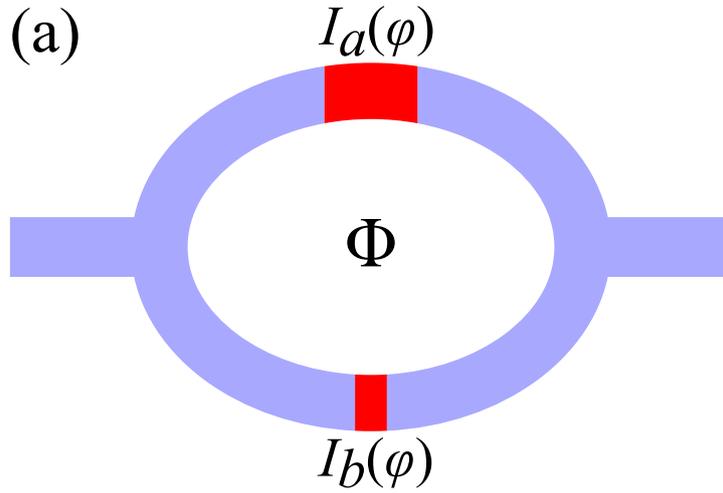


Рис. 4: Асимметричный СКВИД с разными (вообще говоря, несинусоидальными) ток-фазовыми соотношениями  $I_a(\varphi)$  и  $I_b(\varphi)$  в двух джозефсоновских контактах. «Минимальная модель», проявляющая ДДЭ, определяется формулами (26) и (31).

## 5 Ступеньки Шапиро.

### 5.1 Режим заданного тока.

Пусть внешний сигнал (внешнее облучение) создаёт заданный переменный ток:  $I(t) = I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}} \cos \Omega t$ . В общем случае (при ток-фазовом соотношении общего вида) возникают ступеньки при

$$\bar{V} = \frac{n \hbar \Omega}{k 2e}. \quad (24)$$

Как это понять? Если есть только первая джозефсоновская гармоника, то этот результат (с  $k = 1$ ) получается, когда одна пара проходит разность потенциалов и этот процесс оказывается в резонансе с внешним облучением:  $2e\bar{V} = n\hbar\Omega$ . Если же есть гармоника номер  $k$ , это соответствует процессу одновременного перехода  $k$  пар, поэтому левая часть еще домножается на  $k$ .

## 6 СКВИД (сверхпроводящий квантовый интерферометр).

Двухконтактный СКВИД — это параллельное соединение двух джозефсоновских контактов (обозначим их индексами  $a$  и  $b$ ), см. рис. 4(a). Такой интерферометр чувствителен к магнитному потоку  $\Phi$ , проходящему через кольцо. Поток приводит к различию между скачками фазы на двух контактах:

$$\varphi_a - \varphi_b = \phi, \quad \phi = 2\pi\Phi/\Phi_0. \quad (25)$$

Определив  $\varphi$  как среднее двух скачков, мы можем записать ток-фазовую зависимость СКВИДа в виде

$$I_s(\varphi, \phi) = I_a(\varphi_a) + I_b(\varphi_b) = I_a(\varphi + \phi/2) + I_b(\varphi - \phi/2). \quad (26)$$

Ток-фаза каждого контакта, вообще говоря, даётся суммой джозефсоновских гармоник:

$$I_{a(b)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{a(b)n} \sin n\varphi. \quad (27)$$

В простейшем случае синусоидальных контактов остаются только первые гармоники. Тогда

$$I_s(\varphi, \phi) = I_{a1} \sin(\varphi + \phi/2) + I_{b1} \sin(\varphi - \phi/2) = I_1(\phi) \sin(\varphi + \gamma), \quad (28)$$

где критический ток всего СКВИДа и фазовый сдвиг определяются формулами

$$I_1(\phi) = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{b1}^2 + 2I_{a1}I_{b1} \cos \phi}, \quad (29)$$

$$\tan \gamma = \frac{I_{a1} - I_{b1}}{I_{a1} + I_{b1}} \tan \frac{\phi}{2}. \quad (30)$$

Эффективная ток-фаза (28) — по-прежнему синус (хоть и сдвинутый, что для нас сейчас неважно). Важно при этом, что критический ток согласно (29) зависит от магнитного потока.

## 7 Сверхпроводящий диодный эффект в асимметричном СКВИДе.

В джозефсоновском контакте можно определить критические токи  $I_c^+$  и  $I_c^-$  для двух направлений протекания. В одиночном контакте (пусть даже с высшими гармониками, как мы рассматривали выше)  $I_c^+ = I_c^-$ . В то же время, в СКВИДе при  $\phi \neq 0 \pmod{\pi}$  два критических тока в общем случае различны. Систему с  $I_c^+ \neq I_c^-$  можно назвать сверхпроводящим джозефсоновским диодом.

В СКВИДе критические токи оказываются равны ( $I_c^+ = I_c^-$ ) только в двух особых случаях: (а) в симметричном СКВИДе с  $I_a(\varphi) = I_b(\varphi)$  (при этом число и набор гармоник произволен), (б) в случае, когда  $I_a(\varphi)$  и  $I_b(\varphi)$  содержат одну и ту же единственную гармонику (с произвольными амплитудами в двух контактах).

Самый реалистичный пример случая (б) — если  $I_a(\varphi)$  и  $I_b(\varphi)$  оба синусоидальны. Как мы обсудили выше, в этом случае даже для асимметричного СКВИДа (с разными критическими токами двух джозефсоновских контактов) получается  $I_c^+ = I_c^-$ . Чтобы получить диодный эффект, рассмотрим простейший асимметричный СКВИД с высшими гармониками, в котором

$$I_a(\varphi) = I_{a1} \sin \varphi, \quad I_b(\varphi) = I_{b1} \sin \varphi + I_{b2} \sin 2\varphi. \quad (31)$$

Разный набор гармоник в двух контактах оказывается достаточным для реализации джозефсоновского диодного эффекта (ДДЭ) [4]. Эту модель можно считать «минимальной моделью» ДДЭ, см. рис. 5.

Нормируем ток-фазу СКВИДа (26) на амплитуду первой гармоники (29). Также сдвинем фазу  $\varphi$  на величину  $\gamma$ , так что сумма первых гармоник после нормировки даёт просто  $\sin \varphi$ , см. (28) (сдвиг можно включить в переопределение фазы). В результате получаем уравнение RSJ модели в безразмерном виде

$$\dot{\varphi} + J(\varphi) = j \quad (32)$$

с током

$$J(\varphi) = \sin \varphi + A \sin(2\varphi - \tilde{\phi}), \quad (33)$$

где

$$A(\phi) = I_{b2}/I_1(\phi), \quad \tilde{\phi} = \phi + 2\gamma(\phi). \quad (34)$$

Здесь  $\tilde{\phi}$  играет роль эффективного сдвига фазы между двумя джозефсоновскими гармониками. ДДЭ имеет место при  $\tilde{\phi} \neq 0 \pmod{\pi}$ , т.е. если  $\tilde{\phi}$  не является целым кратным  $\pi$ , см. рис. 5(с). В частности, это означает  $\phi \neq 0 \pmod{\pi}$ . В случае одинаковых первых гармоник,  $I_{a1} = I_{b1}$ , эффективный фазовый сдвиг совпадает с нормированным потоком,  $\tilde{\phi} = \phi$ .

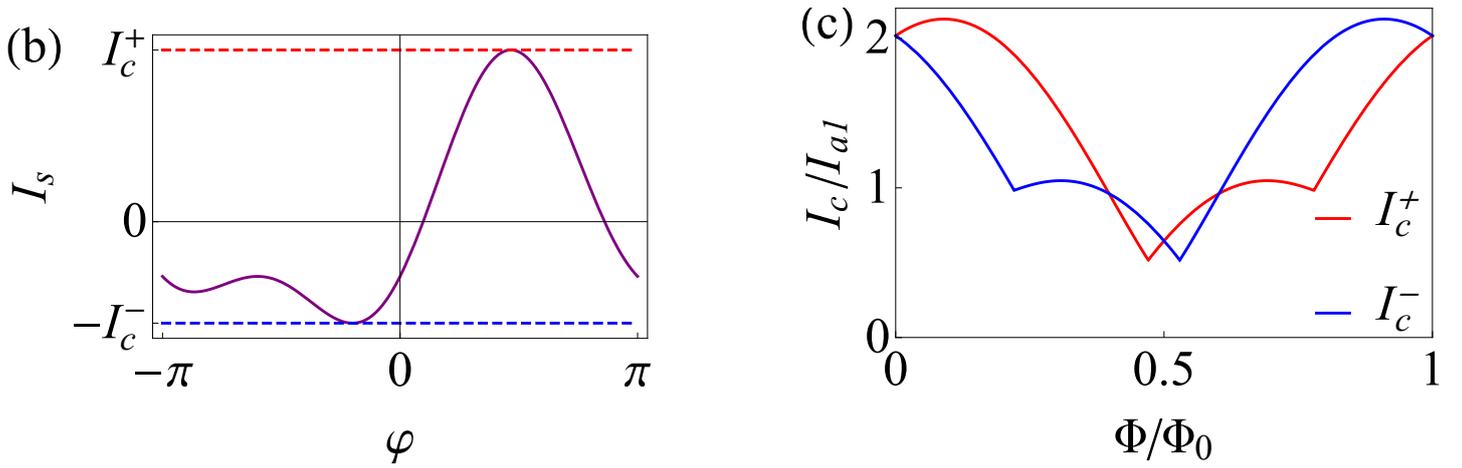


Рис. 5: (b) Ток-фазовое соотношение «минимальной модели» асимметричного СКВИДа с высшими гармониками [см. формулу (33)] при  $A = 0.5$ ,  $\tilde{\phi} = 0.4\pi$ . Обратите внимание, что  $I_c^+ \neq I_c^-$  — это ДДЭ. (c) Зависимость критического тока в двух направлениях от магнитного потока через СКВИД для случая  $I_{b1}/I_{a1} = 0.8$ ,  $I_{b2}/I_{a1} = 0.5$ . ДДЭ отсутствует только для таких значений  $\Phi$ , при которых  $\sin \tilde{\phi} = 0$ ; эти значения соответствуют пересечениям кривых  $I_c^+$  и  $I_c^-$ . При других значениях  $\Phi$  получаем  $I_c^+ \neq I_c^-$  — это ДДЭ. Магнитное поле влияет на диодную эффективность (которая определяется разностью  $|I_c^+ - I_c^-|$ ) и может переключать полярность ДДЭ (положительную при  $I_c^+ > I_c^-$  на отрицательную при  $I_c^+ < I_c^-$ ).

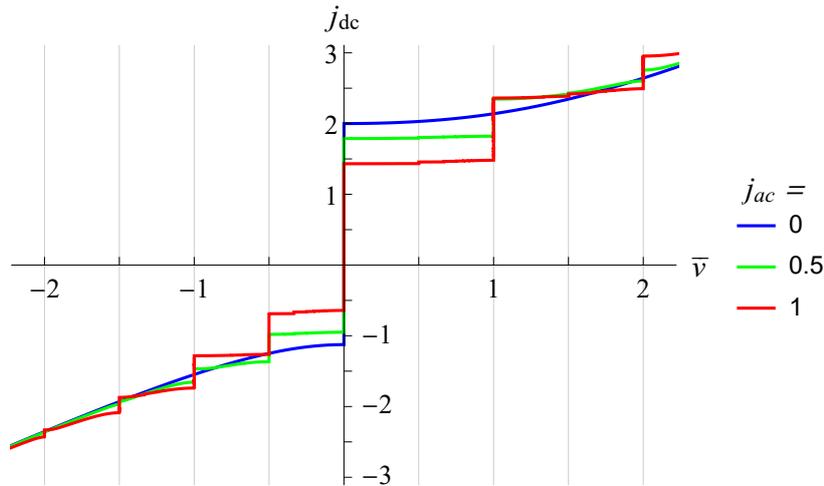


Рис. 6: Асимметричная ВАХ со ступеньками Шапиро для минимальной модели. Обратите внимание на асимметрию критических токов и ступенек.

ВАХ минимальной модели в общем случае можно найти численно, см. рис. 6. Аналитические результаты могут быть получены в предельных случаях большого  $j$  или малой  $A$  [4]. ДДЭ проявляется как в асимметрии ВАХ в целом, так и в асимметрии ступенек Шапиро (если сравнивать ступеньки с номерами  $\pm n/k$ ).

## 8 Литература

[1] В. В. Шмидт, «Введение в физику сверхпроводников».

- [2] M. Tinkham, «Introduction to Superconductivity».
- [3] A. Barone, G. Paterno, «Physics and Applications of the Josephson Effect».
- [4] Ya. V. Fominov, D. S. Mikhailov, *Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode*, Phys. Rev. B **106**, 134514 (2022).