

Разрушение сверхпроводимости тепловыми флуктуациями

М. А. Скворцов
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН

1. Введение

Сверхпроводимость есть макроскопическое квантовое явление, когда связавшиеся в куперовские пары электроны конденсируются в единое когерентное квантовое состояние. Такое состояние описывается волновой функцией — комплексным параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$. При этом модуль параметра порядка обычно фиксирован из условия минимума свободной энергии, а фазой параметра порядка можно пытаться управлять. На этом принципе основано применение сверхпроводящей электроники в качестве кубитов, сверхчувствительных сенсоров магнитного поля на основе сквидов и т. п.

Одним из неожиданных инженерных применений сверхпроводимости, активно развивающихся в последние 20 лет, является использование сверхпроводящих нанопроволок в качестве детекторов одиночных фотонов. В отличие от кубитов, где важна интерференция квантовых состояний, эти приборы используют более простое свойство сверхпроводников, откуда они и получили свое название, а именно, нулевое сопротивление электрическому току.

Сверхтекучий ток, который может бездиссипативно протекать в сверхпроводнике, ограничен критическим током I_c . По мере приближения пропускаемого сверхтекучего тока к критическому барьер, отделяющий сверхпроводящее состояние, от нормального, становится ниже, обращаясь в нуль при I_c . Поэтому вблизи криттока любое внешнее достаточно сильное возмущение может вывести систему из сверхпроводящего состояния, что приведет к появлению нормального тока и, как следствие, конечного напряжения на образце.

Принцип работы детекторов одиночных фотонов на основе токнесущих сверхпроводящих проволок проиллюстрирован на Рис. 1. Поскольку возникающее напряжение нужно сравнивать с нулевым напряжением в отсутствие фотонов, данный механизм детектирования является очень чувствительным.

Однако бывает, что детектор срабатывает и в отсутствие фотона. Такие события, называемые «темновые отсчеты», обусловлены термоактивационным распадом сверхтокового состояния за счет тепловых флуктуаций.

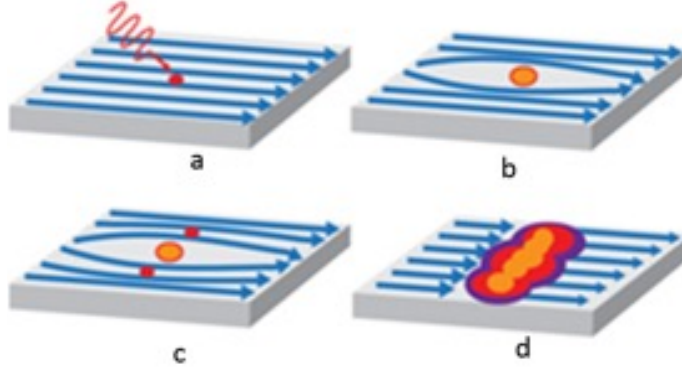


Рис. 1. Этапы процесса детектирования фотона сверхпроводящей токонесущей проволокой: (а) фотон поглощается, передавая большую энергию ($E \gg \Delta$) электрону, (б) за счет столкновений с другими электронами и атомами решетки происходит термализация, формируется «горячее пятно», в котором подавляется сверхпроводимость, (с) размер «горячего пятна» растет, а плотность сверхтекучего тока, вынужденного обтекать область с подавленной сверхпроводимостью, увеличивается, приближаясь к критической, (d) в результате, нормальное состояние образуется вдоль всей полоски, и возникает падение напряжения, которое и детектируется приборно.

2. Тепловой распад сверхтокового состояния в туннельном контакте

2.1. Джозефсоновский контакт с током

Рассмотрим два сверхпроводника, соединенные друг с другом через туннельный контакт. Туннелирование куперовских пар через барьер приводит к тому, что фазы параметра порядка в сверхпроводниках стремятся стать одинаковыми. Этот эффект выражается в терминах энергии джозефсоновского контакта, которая записывается в виде

$$U(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

где φ — разность фаз между сверхпроводниками. Джозефсоновская энергия E_J определяется прозрачностью границы (соотношение Амбегаокара-Баратова). Зная зависимость $U(\varphi)$, можно найти сверхтекучий ток, возникающий при ненулевой разности фаз:

$$I = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

В присутствии задаваемого внешним источником тока энергию джозефсоновского контакта следует модифицировать согласно

$$U(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi) - E_J j \varphi, \quad (3)$$

где $j = I/I_c$. Потенциал (3) называется потенциалом стиральной доски. При $j < 1$ в нем еще сохраняются минимумы, пропадающие при $j > j_c$.

Пусть $j < 1$ и фаза сидит в минимуме $\varphi_{\min} = \arcsin j$. Рядом, при $\varphi_{\max} = \pi - \arcsin j$, расположен максимум потенциала. Если фаза до него доберется и перевернется, она покинет свой минимум, и это приведет к скачку напряжения. Вероятность такого процесса за счет тепловых флуктуаций может быть оценена по формуле Больцмана как $\exp(-\Delta U/T)$, где величина барьера

$$\Delta U = U(\varphi_{\max}) - U(\varphi_{\min}) = 2E_J[\sqrt{1-j^2} - j \arccos j]. \quad (4)$$

В пределе $I \rightarrow I_c$ барьер ведет себя степенным образом:

$$\Delta U \approx \frac{2^{5/2}}{3} E_J (1 - I/I_c)^{3/2}. \quad (5)$$

2.2. Термоактивация в реальном времени

Посмотрим, как описывать тепловой выход из локального минимума потенциала $U(x)$ в реальном времени. Для этого мы напишем простейшее диссипативное уравнение движения на переменную x

$$\gamma \dot{x} + U' = \xi(t) \quad (6)$$

в присутствии ланжевеновской силы $\xi(t)$, которая является гауссовым белым шумом с коррелятором

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2T\gamma \delta(t - t'). \quad (7)$$

Наша цель — найти оптимальную траекторию, которая, стартуя из минимума потенциала достигает его максимум, тем самым покидая метастабильный минимум. Для этого рассмотрим функциональный интеграл для заданной ланжевеновской силы $\xi(t)$:

$$Z = \int \delta(\gamma \dot{x} + U' - \xi) Dx(t), \quad (8)$$

который говорит просто, что $x(t)$ — решение уравнения (6).

По аналогии с разложением дельта-функции по плоским волнам (интеграл Фурье)

$$\delta(x) = \int e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad (9)$$

представим функциональную дельта-функцию в уравнении (8) с помощью функционального интеграла по вспомогательной переменной $\mu(t)$:

$$Z = \int \exp \left[i \int \mu(\gamma \dot{x} + U' - \xi) dt \right] Dx(t) D\mu(t). \quad (10)$$

Полученное выражение может быть легко усреднено по ланжевеновскому шуму $\xi(t)$ с коррелятором (7):

$$\langle Z \rangle = \int \exp \left[i \int \mu(\gamma \dot{x} + U' + iT\gamma\mu) dt \right] Dx(t) D\mu(t) \quad (11)$$

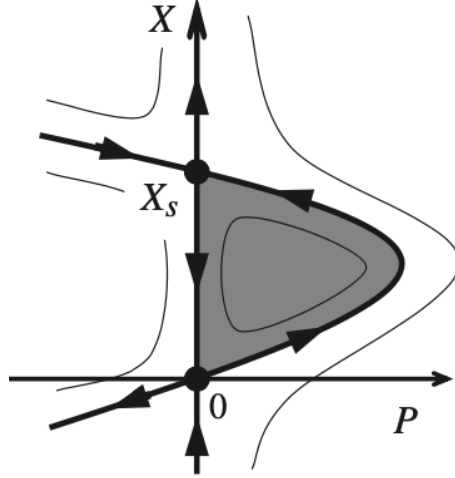


Рис. 2. Фазовый портрет системы с гамильтонианом (14). Минимум потенциала достигается при $x_{\min} = 0$, а максимум — при $x_{\max} = x_s$ (из книги [1]).

Чтобы избавиться от мнимых единиц, обозначим $\mu = ip/\gamma$ и перейдем к интегрированию по переменной $p(t)$:

$$\langle Z \rangle = \int e^{-S} Dx(t) Dp(t), \quad (12)$$

где

$$S = \int (p\dot{x} - H) dt \quad (13)$$

и

$$H(x, p) = \frac{Tp^2 - pU'}{\gamma}. \quad (14)$$

По аналогии с классической механикой будем называть S действием, а H — гамильтонианом. (Во избежание недоразумений, подчеркнем, что исходное уравнение (6), описывающее релаксационную динамику без массового члена, не является гамильтоновым.)

С гамильтонианом (14) стандартные уравнения движения $\dot{x} = \partial H/\partial p$ и $\dot{p} = -\partial H/\partial x$ принимают вид

$$\gamma\dot{x} = -U' + 2Tp \quad (15)$$

$$\gamma\dot{p} = U''p \quad (16)$$

Гамильтонова динамика сохраняет гамильтониан, и нужно понять чему он равен для интересующей нас траектории. Поскольку мы интересуемся переходом из минимума в максимум, где $U' = 0$, и этот выход/приближение к начальной/конечной точки происходит экспоненциально медленно, то искомой траектории соответствует $H(x, p) = 0$. На фазовом портрете, показанном на Рис. 2, линии $H(x, p) = 0$ показаны жирным.

Уравнение $H(x, p) = 0$ имеет два решения: тривиальное $p = 0$, которое отвечает вязкому движению из максимума в минимум, и нетривиальное с

$$p = U'/T. \quad (17)$$

которое как раз и позволяет попасть из минимума в максимум.

Подставляя в уравнение движения (15) на x , получаем замкнутое уравнение на переменную $x(t)$:

$$\gamma \dot{x} = U', \quad (18)$$

которое отличается от исходного уравнения (6) отсутствием случайной силы и *изменением знака потенциала*. Таким образом, на седловой траектории роль переменной p сводится к перевороту потенциала $U(x)$! В результате, минимум и максимум потенциала меняются местами, и нужная нам траектория отвечает вязкому скатыванию из максимума в минимум потенциала $-U(x)$.

Поскольку $H = 0$, действие (13) упрощается до первого члена, и, принимая во внимание выражение (17), находим

$$S = \int p \dot{x} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dU}{dx} dx = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{T} = \frac{\Delta U}{T}. \quad (19)$$

Как и следовало ожидать, вероятность термоактивационного выхода из метастабильного минимума дается Больцмановским весом $\exp(-S) = \exp(-\Delta U/T)$.

Обратим внимание, что хотя сама траектория зависит, естественно, и от формы потенциала $U(x)$, и от коэффициента трения γ , в выражении для седлового действия все эти детали пропадают. Время же, необходимое для подъема на барьер, может быть оценено как

$$\Delta t \sim \gamma \Delta x^2 / \Delta U, \quad (20)$$

то есть, чем сильнее трение, тем больше времени требуется системе для выхода из метастабильного минимума.

3. Тепловой распад сверхтокового состояния в проводочках

3.1. Теория Гинзбурга-Ландау

Поведение сверхпроводника вблизи критической температуры описывается функционалом Гинзбурга-Ландау, представляющий собой разложение свободной энергии по степеням комплексного параметра порядка, в котором оставлены только низшие члены:

$$F = \nu \int [-\alpha |\Delta|^2 + \beta |\Delta|^4 / 2 + \xi_0^2 |\nabla \Delta|^2] d\mathbf{r}, \quad (21)$$

где $\alpha = 1 - T/T_c$, ν — плотность состояний на энергии Ферми, а безразмерный коэффициент β и длина ξ_0 зависят от силы примесного рассеяния. Необходимость удерживать член $|\Delta|^4$ связана с тем, что коэффициент при $|\Delta|^2$ обращается в нуль при $T = T_c$.

Градиентный член в уравнении (21) написан без векторного потенциала, потому что мы пренебрегаем магнитным полем, как внешним, так и индуцированным протекающим током.

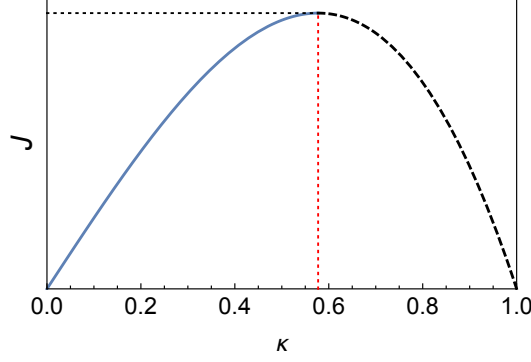


Рис. 3. Зависимость тока от градиента фазы согласно уравнению (27).

Варьируя функционал (21) по $\Delta^*(\mathbf{r})$, получаем уравнение Гинзбурга-Ландау, которому должен удовлетворять параметр порядка:

$$-\xi_0^2 \nabla^2 \Delta - \alpha \Delta + \beta |\Delta|^2 \Delta = 0 \quad (22)$$

Если записать параметр порядка через модуль и фазу, $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$, то плотность сверхтекучего тока представляется в виде

$$\mathbf{j} = \eta |\Delta|^2 \nabla \varphi, \quad (23)$$

где $\eta = 4e\nu\xi_0^2/\hbar$.

Разберемся для начала с тем, как устроено решение *в отсутствие тока*. В этом случае Δ не зависит от координат, так что уравнение (22) становится алгебраическим. Оно имеет два решения: тривиальное $\Delta = 0$, отвечающее нормальному состоянию, и сверхпроводящее с фиксированным модулем параметра порядка

$$\Delta_0 = \sqrt{\alpha/\beta} \quad (24)$$

и произвольной фазой. Ниже T_c реализуется сверхпроводящее решение, имеющее меньшую энергию. Выигрыш энергии при переходе в сверхпроводящее состояние определяется плотностью энергии конденсации:

$$\varepsilon_{\text{cond}}(T) = \frac{\nu\alpha^2}{2\beta} \propto (T_c - T)^2. \quad (25)$$

В присутствии тока, согласно (23), возникает градиент фазы, и решение будем искать в виде $\Delta = f|\Delta_0|e^{ikx}$, где константа f описывает изменение модуля параметра порядка. Из уравнения (22) находим

$$f^2 = 1 - \kappa^2, \quad (26)$$

где $\kappa = k\xi$ есть волновой вектор конденсата, измеренный в единицах длины локализации $\xi(T) = \xi_0/\sqrt{\alpha}$. Подставляя найденное f в выражение для тока, находим

$$j = \frac{\eta|\Delta_0|^2}{\xi(T)} J, \quad J = (1 - \kappa^2)\kappa. \quad (27)$$

График зависимости $J(\kappa)$ построен на Рис. 3. Критический ток $J_c = 2/3^{3/2}$ отвечает $\kappa_c = 1/\sqrt{3}$. При $J < J_c$ есть уравнение $J = (1 - \kappa^2)\kappa$ имеет два решения, $\kappa_0 < \kappa_c$ и $\kappa'_0 > \kappa_c$. Из них меньшую энергии имеет решение с κ_0 , которое и описывает однородное сверхпроводящее состояние.

3.2. Наивная попытка оценить барьер

Рассмотрим теперь вопрос о величине барьера, который нужно преодолеть для того, чтобы разрушить однородное состояние в проволочке с заданным сверхтоком I . Какова бы ни была дальнейшая эволюция системы, появление нормального тока приведет к импульсу напряжения, что будет задетектировано прибором. Такое ложное срабатывание называется «темновым отсчетом».

Для того, чтобы найти величину барьера ΔF , нужно определиться с конечным состоянием, по достижении которого систему уже ничто не будет сдерживать от появления конечного напряжения и нормального тока.

По аналогии со джозефсоновским контактом, конечное состояние также является экстремумом свободной энергии, но не минимумом, а максимумом. Иными словами, оно должно быть решением уравнения Гинзбурга-Ландау (22).

Одно из таких решений нам уже известно. Действительно, при обсуждении однородного случая мы видели, что при заданном токе существуют два возможных значения параметра κ , отвечающих двум решениям уравнения (27). Поэтому в качестве конечного состояния мы можем взять решение с большим κ , то есть κ'_0 . Для величины барьера тогда получим

$$\Delta F = [(1 - \kappa_0^2)^2 - (1 - \kappa'_0{}^2)^2 - 4J(\kappa'_0 - \kappa_0)] \varepsilon_{\text{cond}}(T)V, \quad (28)$$

где V — объем провода, а последний член в квадратных скобках учитывает работу источника, которую необходимо затратить для изменения градиента фазы κ [аналогичен последнему члену в уравнении (3)]. Здесь плотность энергии конденсации, даваемая выражением (25), описывает температурную зависимость барьера, а множитель в квадратных скобках — зависимость барьера от тока. По мере приближения к критическому току барьер обращается в нуль степенным образом:

$$\Delta F \sim (1 - I/I_c)^{3/2} \varepsilon_{\text{cond}}(T)V. \quad (29)$$

Выражение (28) хорошо всем, кроме того, что оно экстенсивно по длине провода: чем длиннее провод (заданного сечения), тем больший барьер требуется преодолеть для теплового разрушения сверхтокового состояния. В пределе бесконечного провода барьер оказывается бесконечным.

3.3. Инстантон Лангера-Амбегаокара

Чтобы получить конечную вероятность распада для длинного провода, необходимо рассмотреть решения уравнения Гинзбурга-Ландау с неоднородным профилем модуля параметра порядка $|\Delta(x)|$, что было проделано в работе Лангера и Амбегаокара [2].

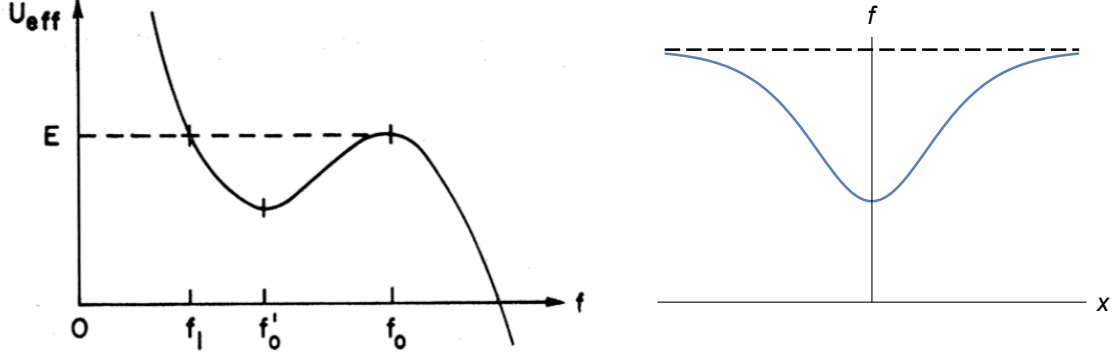


Рис. 4. (а) Форма потенциала $U_{\text{eff}}(f)$ при $J < J_c$. (б) Инстантонное решение $f(x)$.

Для начала, записав $\Delta(x) = f(x)|\Delta_0|e^{i\varphi(x)}$, перепишем уравнение (22) в терминах функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Выделяя действительную и мнимую части и переходя к безразмерным координатам в единицах ξ , получим

$$-f'' - (1 - \varphi'^2)f + f^3 = 0 \quad (30)$$

$$(f^2\varphi')' = 0 \quad (31)$$

Второе из этих уравнений есть закон сохранения тока: $J = f^2\varphi' = \text{const}$. Выражая отсюда производную фазы и подставляя в первое уравнение, приходим к замкнутому уравнению на f :

$$-f'' - (1 - J^2/f^4)f + f^3 = 0, \quad (32)$$

которое имеет смысл переписать в виде

$$f'' = -\frac{dU_{\text{eff}}}{df}, \quad U_{\text{eff}}(f) = \frac{f^2}{2} + \frac{J^2}{2f^2} - \frac{f^4}{4}. \quad (33)$$

Данное уравнение формально описывает классическую динамику частицы единичной массы с координатой f , движущейся в потенциале $U_{\text{eff}}(f)$, где положение вдоль провода (x/ξ) играет роль времени.

Форма потенциала $U_{\text{eff}}(f)$ при токе $J < J_c$ представлена на Рис. 4(а). Он имеет максимум при $f = f_0$ и минимум при меньшем значении $f = f'_0$. Несложно догадаться, что максимум соответствует обычному сверхтоковому состоянию, в то время как минимум — рассмотренному выше однородному кандидату на конечное состояние, приводящему к барьеру ΔF линейно растущему с размером провода.

Используя механическую аналогию, можно понять, как устроено решение с конечным барьером ΔF . Это траектория, которая в далеком прошлом находится на максимуме, затем скатывается с него налево, проходит минимум при f'_0 , останавливается в точке $f = f_1$ и возвращается к исходному положению f_0 . Такое решение называется инстантоном.

Осталось проинтегрировать уравнение (33) с таким начальным условием. Поскольку система является консервативной, имеется интеграл энергии E , что позволяет получить решение в квадратурах:

$$\frac{|x|}{\xi} = \int_{f_1}^f \frac{df}{\sqrt{2[E - U_{\text{eff}}(f)]}}, \quad (34)$$

где мы приняли, что разворот при $f = f_1$ происходит при $x = 0$. В силу сложности потенциала $U_{\text{eff}}(f)$ решение при произвольной энергии не выражается в элементарных функциях. Однако интересующее нас инстантонное решение соответствует особой энергии $E = U_{\text{eff}}(f_0)$. В этом случае интеграл (34) вычисляется в элементарных функциях и позволяет найти явную зависимость $f(x)$ [2, 3], показанную на Рис. 4(b).

Вычисляя разницу свободных энергий между найденным инстантонным решением и исходным решением, отвечающему минимуму свободной энергии, можно найти высоту активационного барьера [2, 3]:

$$\Delta F = \varepsilon_{\text{cond}}(T) A \xi(T) \left[\frac{8}{3} \sqrt{2} \sqrt{1 - 3\kappa^2} - 8\kappa (1 - \kappa^2) \arctan \frac{\sqrt{1 - 3\kappa^2}}{\sqrt{2}\kappa} \right], \quad (35)$$

где A — площадь поперечного сечения провода, а $\kappa = \kappa_0$ отвечает обычному сверхтоковому решению.

Вблизи критического тока барьер обращается в нуль по закону

$$\Delta F \sim (1 - I/I_c)^{5/4} \varepsilon_{\text{cond}}(T) A \xi(T). \quad (36)$$

Отличие степени $5/4$ от степени $3/2$ в уравнении (29) связано с тем, что по мере приближения току к критическому растет размер инстантона согласно

$$L_{\text{inst}} \sim \xi(T) (1 - I/I_c)^{-1/4}. \quad (37)$$

Выражение (36) хорошо описывает скорость тепловых отсчетов в токонесущих сверхпроводящих проволоках.

Список литературы

- [1] A. Kamenev, *Field Theory of Non-Equilibrium Systems* (Cambridge, 2011).
- [2] J. S. Langer and V. Ambegaokar, Intrinsic Resistive Transition in narrow superconducting channels, *Phys. Rev.* **164**, 498 (1967).
- [3] D. E. McCumber, Intrinsic resistive transition in thin superconducting wires driven from current sources, *Phys. Rev.* **172**, 427 (1968).