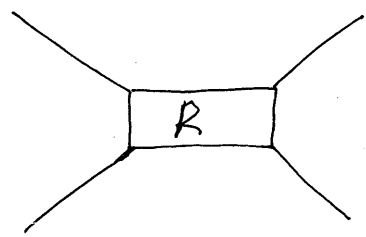


# Квантовые контакты. Квантование проводимости (контактанса).



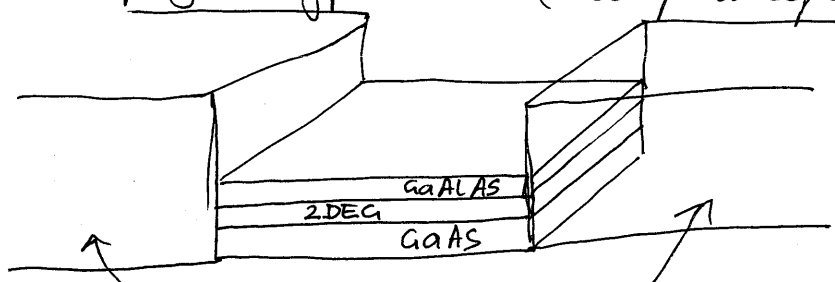
классика:  $I = \frac{V}{R} = GV$

↑  
полная проводимость  
(контактанс)

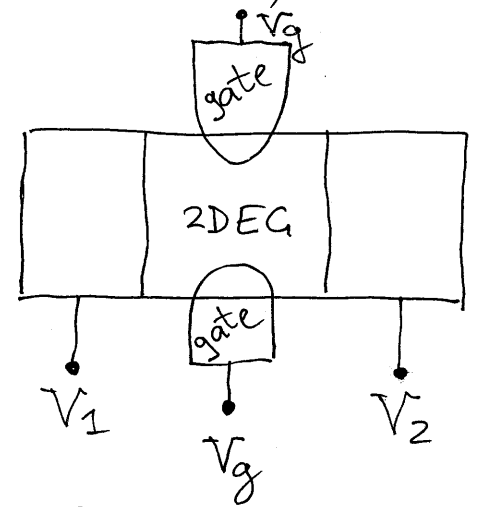
Квантовый случай (точечные контакты):  
ширина сопоставима с  $\lambda_F$   
(транспорт при низких напряжениях осуществляется ~~электронами~~ электронами с энергией  $\sim E_F$ ).

- в этом случае локальная (удельная) проводимость вообще теряет смысл, контакт характеризуется контактансом

Реализация: 2DEG в полупроводниковых гетероструктурах (например, GaAlAs / GaAs).

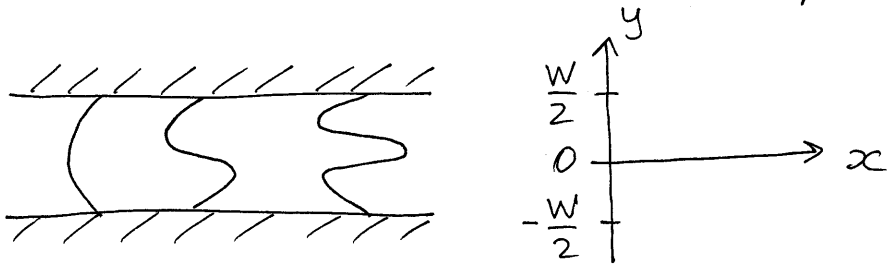


резервуары,  
между ними напряжение



- Преимущества по сравнению с 3D металлами:
- 1) Допированием можно регулировать плотность носителей  $\Rightarrow E_F$
  - 2) В 3D металле  $\lambda_F$  - десятки  $\mu\text{m}$  нм, в 2DEG - десятки нм.  $\Rightarrow$  квантовые эффекты проявляются в сравнительно больших контактах, которые легче сделать.
  - 3) С помощью затворов можно менять форму контакта!

# Моды и каналы в электронном вихре. (2)



$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(y) \right] \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

- уравнение Шрёдингера

Разделение переменных:

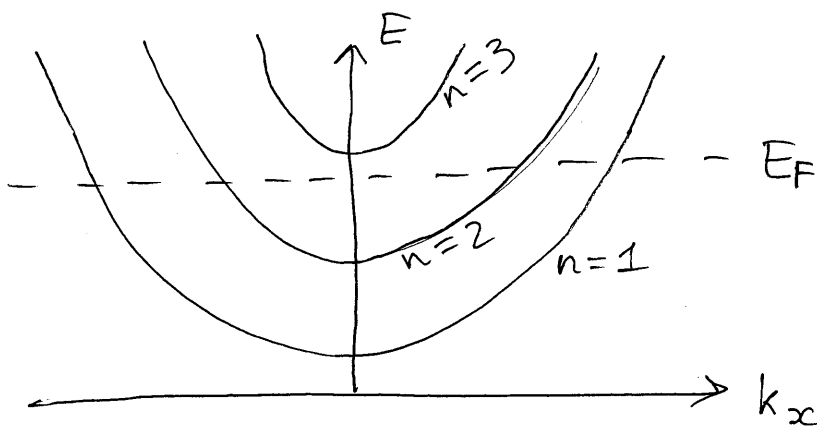
$$\Psi_n(x, y) = \psi_n(x) \varphi_n(y), \quad \varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\left(k_y^{(n)} \left(\frac{y}{W} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$k_y^{(n)} = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mW^2} \right) \psi_n(x) = E \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = e^{ik_x x}$$

"эффективная"  
потенциальная  
энергия

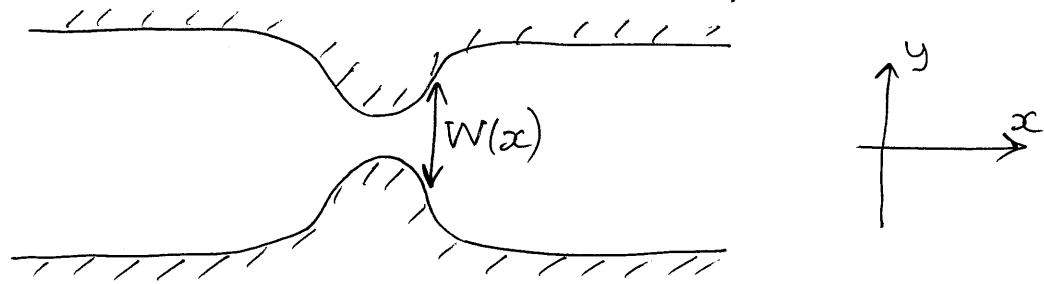
$$E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + E_n, \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mW^2} n^2$$



← 2 проводящие  
моды  
(2 открытых  
канала)

## Точечные контакты.

Теперь рассмотрим контакт в форме сужения:



$$\hat{H}(x, y) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

$$\hat{H}(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(x, y)$$

→ теперь нет разделения переменных

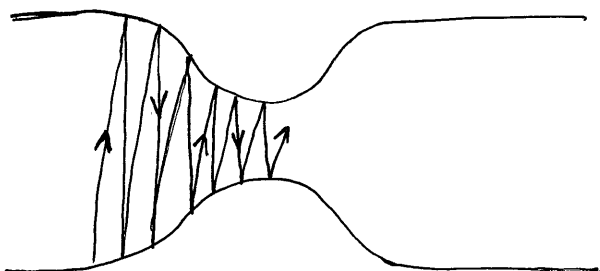
Однако, если  $W(x)$  - медленная функция ( $W(x)$  медленно меняется на расстоянии  $\sim \lambda_F$ ), то имеет место адиабатическое разделение переменных (это доказывается, см. [Галицкий, Каржаков, Коган]):

$$\Psi_n(x, y) = \psi_n(x) \sqrt{\frac{2}{W(x)}} \sin\left(\pi n \left(\frac{y}{W(x)} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

На  $\psi_n(x)$  получается 1D уравнение:

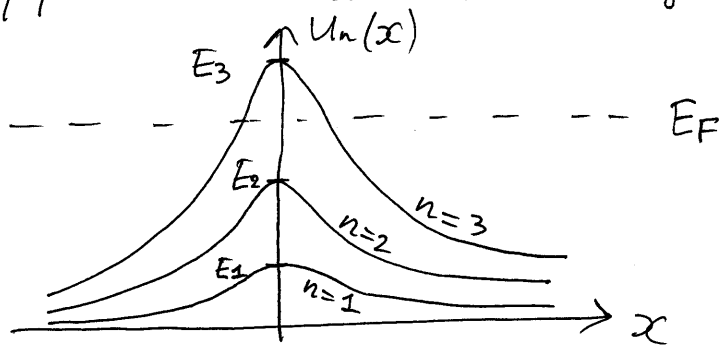
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_n(x)\right) \psi_n(x) = E \psi_n(x), \quad U_n(x) = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m W^2(x)}$$

Качественное объяснение адиабатического приближения: движение по  $y$  гораздо более быстрое, чем по  $x$ , поэтому в своём движении по  $x$  электрон чувствует некоторые усреднённые характеристики поперечного движения.



Эффективная потенциальная энергия:

4



← 2 открытых канала, остальные не "пролезают" через сужение.

На ширине сужения должно укладываться целое число полувавил  $\lambda_F/2$  (т.к. ток переносится электронами вблизи уровня Ферми).

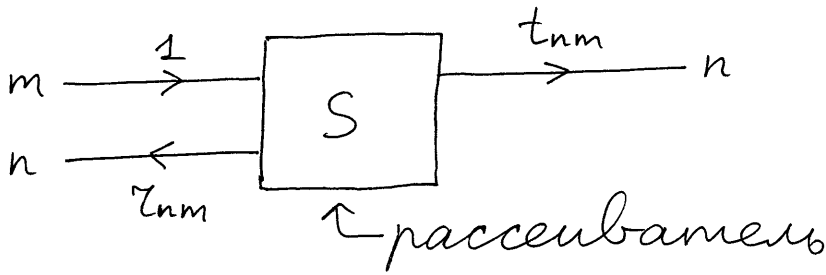
Состояние с номером  $n$  —  $n$ -тый канал.

В главном приближении считаем прохождение барьера классическим (не учитываем подбарьерное прохождение и надбарьерное отражение — к делу приводит их учет, будет сказано позже).

Таким образом, сужение в точечном контакте без потенциального барьера приводит к "эффективному" потенциальному барьеру.

Обозначаем  $E_n = \max_x U_n(x)$ .

# Матрица рассеяния. Подход Ландауэра.



$$T_{nm} = |t_{nm}|^2$$

$$R_{nm} = |r_{nm}|^2$$

Пусть резервуары пропускают  $N$  каналов.

Матрица рассеяния:  $\hat{S}(E) = \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{t}' \\ \hat{t} & \hat{r}' \end{pmatrix} - 2N \times 2N$

Вообще - то зависит от  $E$ , но мы считаем малые  $V \Rightarrow E \approx E_F$

$\hat{r}, \hat{t}, \hat{r}', \hat{t}' - N \times N$

$\hat{r}', \hat{t}' - \text{справа налево}$

Как действует матрица рассеяния:

$$\hat{S} \begin{pmatrix} a_{L1} \\ \vdots \\ a_{LN} \\ \hline a_{R1} \\ \vdots \\ a_{RN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{L1} \\ \vdots \\ b_{LN} \\ \hline b_{R1} \\ \vdots \\ b_{RN} \end{pmatrix}$$

слева справа

то, что падает на рассеиватель

то, что летит от рассеивателя



$$\vec{B} = \hat{S} \vec{A}$$

$\vec{A}^+ \vec{A}$  - полный поток, падающий на рассеиватель

$\vec{B}^+ \vec{B}$  - улетяющий

$$\vec{A}^+ \hat{S}^+ \hat{S} \vec{A} = \vec{A}^+ \vec{A} \Rightarrow \hat{S}^+ \hat{S} = 1$$

Например:  ~~$\hat{S} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1N} + t'_{11} + \dots + t'_{1N} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$~~

Унитарность (сохранение тока):  $\hat{S}^+ \hat{S} = 1$ .

Симметрии системы приводят к симметриям  $\hat{S}$ . Например, если есть симметрия по отношению к обращению времени

то  $\hat{S} = \hat{S}^T$ . Доказательство:  $\frac{a^*}{\sqrt{v}} e^{-ikx}$  - обратная по вр. волна.  $\vec{B} = \hat{S} \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \hat{S}^+ \vec{B} \Rightarrow \vec{A}^* = \hat{S}^T \vec{B}^*$ . Но если есть T-инв., то  $\vec{A}^* = \hat{S} \vec{B}^* \Rightarrow \hat{S} = \hat{S}^T$

~~$$R_n = \sum_m R_{nm}$$
  
$$T_n = \sum_m T_{nm}$$~~

$$(\hat{S}^+ \hat{S})_{nn} = \sum_m |r_{nm}|^2 + \sum_m |t_{nm}|^2 = \sum_n (R_{nm} + T_{nm})$$

1 Вотразумься хоть куда Вотрайти хоть куда

Вычисляем ток слева от рассеивателя: 6

~~В~~  $v_n$  — скорость электрона в  $n$ -ом канале  
 Вклады в ток пропорциональны следующему:

- $e f_L(E) \sum_n v_n$  — электроны, падающие слева
- $-e f_L(E) \sum_{n,m} v_n R_{nm}$  — электроны, прошедшие слева и отражённые рассеивателем
- $-e f_R(E) \sum_{n,m} v_n T_{nm}$  — электроны, прошедшие справа и прошедшие через рассеиватель

ТОК:

$$I = 2s \sum_{n,m} \int_0^{\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar v_n} e v_n [f_L(E) (\delta_{nm} - R_{nm}) - f_R(E) T_{nm}] =$$

↑  
 без учёта знака числа состояний в  $dp$

равно  $\frac{dN}{Vol} = \frac{dn}{Vol} = \frac{dE}{2\pi\hbar(\partial E/\partial p)} = \frac{dE}{2\pi\hbar v}$

$$\sum_n (\delta_{nm} - R_{nm}) = 1 - \sum_n R_{nm} = \sum_n T_{nm}$$

$$\frac{dN}{Vol} f(E) = dn$$

$$= \frac{e}{\pi\hbar} \sum_{n,m} \int_0^{\infty} dE [f_L(E) (\delta_{nm} - R_{nm}) - f_R(E) T_{nm}] =$$

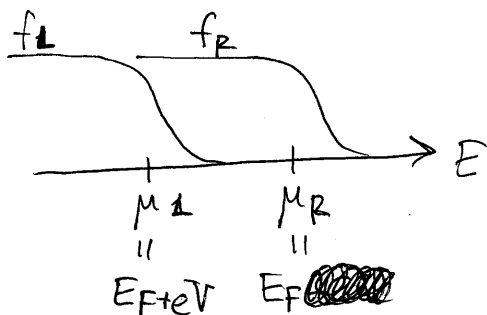
$$= \frac{e}{\pi\hbar} \sum_{n,m} \int_0^{\infty} dE T_{nm} [f_L(E) - f_R(E)] = \frac{e}{\pi\hbar} \int_0^{\infty} dE \underbrace{TR(\hat{t}^+ \hat{t})}_{\sum_i \tau_i = \sum_{n,m} T_{nm}} [f_L(E) - f_R(E)]$$

Transmission eigenvalues:  $\tau_i$  — собственные значения матрицы  $\hat{t}^+ \hat{t}$ .

$0 \leq \tau_i \leq 1$  из-за унитарности матрицы рассеяния (доказательство — стр. 8).

При малых напряжениях  $\tau_i(E) \approx \tau_i(E_F) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{e}{\pi\hbar} \sum_i \tau_i \cdot \int_0^{\infty} dE [f_L(E) - f_R(E)] \stackrel{T \rightarrow 0}{=} \frac{e}{\pi\hbar} \sum_i \tau_i \cdot eV$$



$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_i \tau_i(E_F) \text{ — формула Ландауэра (1970)}$$

$$G_0 = \frac{e^2}{\pi\hbar}, \quad G_0^{-1} \approx 13 \text{ кОм}$$

$$e < 0$$

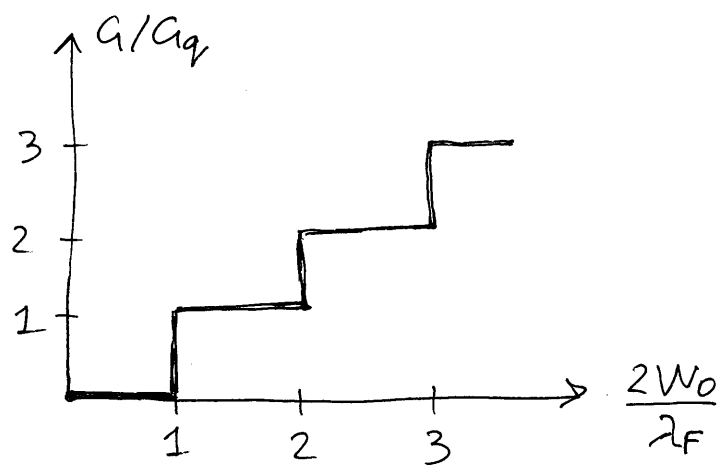
Чистое сужение (квантовый точечный контакт):

$T_{nm} = \delta_{nm}$ , если канал открыт ( $n \leq N_0$ ,  $N_0$  - число открытых каналов)

$T_{nm} = 0$ , если  $n > N_0$  (канал закрыт)

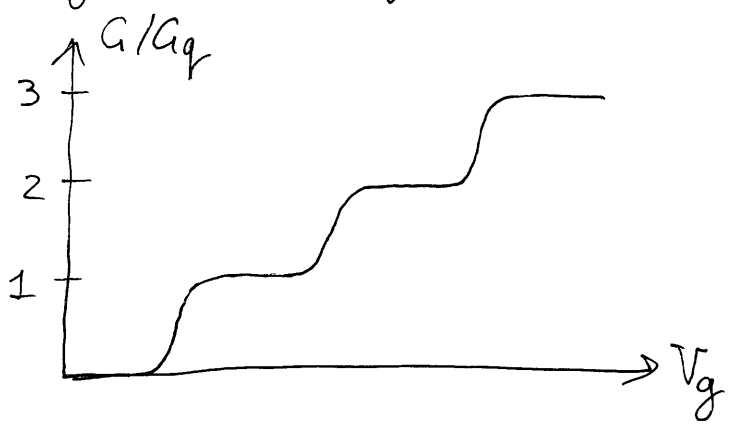
$T_{nm}$  диагонально, т.к. в ~~отсутствии~~ сужении нет примесей, а тогда из-за его тавтологии каналы не перемешиваются.

$G = G_q \sum_{n,m} T_{nm} = N_0 G_q$   
↑ "квант кондуктанса"



- каналы "включаются" один за другим

Квантовость прохождения через барьеры приводит к размытию краёв ступенек:



- эксперимент (1988)

Родственное явление: проводимость отверстия в непроницаемом экране

$G = G_q N_L$  ← формула Шарвина  
 $N_L = AK_F^2 / 4\pi$   
A - площадь отверстия



В общем случае производного рассеивателя набор transmission eigenvalues — наиболее универсальная характеристика.

Если есть примеси, то набор transmission eigenvalues (прозрачностей) зависит от конкретной конфигурации примесей. нас же интересуют усредненные величины.

После усреднения по реализациям беспорядка в интервал от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$  попадает  $P(\tau)d\tau$  прозрачностей.

$P(\tau)$  — распределение прозрачностей.

Все усреднения теперь производятся интегрированием по  $\tau$  от 0 до 1 с весом  $P(\tau)$ .

Например,  $\langle G \rangle = \int_0^1 G_q \tau P(\tau) d\tau$

Примеры:

1) Точечный контакт:  $P_{QPC}(\tau) = N_0 \delta(1-\tau)$   
(еще есть закрытые каналы  $\sim \delta(\tau)$ , но мы их не пишем — они не дают вклад в транспорт)

2) Диффузная проволока:  $P_D(\tau) = \frac{\langle G \rangle}{2G_q} \frac{1}{\tau \sqrt{1-\tau}}$   
— формула Дорхова (бимодальное распределение)

$\ominus! 0 \leq \tau_i \leq 1$ .  
 $\hat{S}^+ \hat{S} = 1 \Rightarrow \hat{e}^+ \hat{e} + \hat{t}^+ \hat{t} = 1$  (верхний левый блок).  
 $\hat{e}^+ \hat{e}$  и  $\hat{t}^+ \hat{t}$  эрмитовы  $\Rightarrow$  с.з. вещественные эрмитова матрица и.б. диагонализуются с помощью унитарной  $\hat{u}^+ \hat{t}^+ \hat{t} \hat{u} = \text{diag}(\tau_n)$   
 $\hat{u}^+ \hat{e}^+ \hat{u} \hat{u}^+ \hat{t} \hat{u} \Rightarrow \tau_n = (\hat{t}_1^+ \hat{t}_1)_{nn} = \sum_m |t_{1mn}|^2 \geq 0$

н.в.  $\hat{u}$  одновременно диагонализует  $\hat{e}^+ \hat{e}$ :  $\hat{u}^+ \hat{e}^+ \hat{e} \hat{u} + \begin{pmatrix} \tau_1 & & \\ & \tau_2 & \\ & & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow \hat{u}^+ \hat{e}^+ \hat{e} \hat{u} = (R_1 R_2 \dots)$