А/

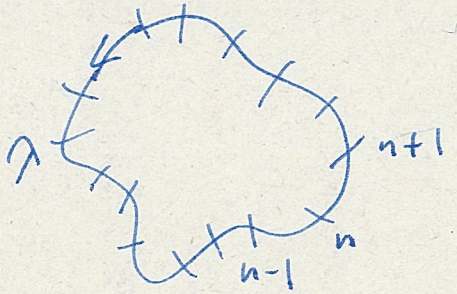
спин

определим фазу, набираемую по пути в параметрическом пространстве $\lambda = 1 \ldots N$

$$\varphi = -\operatorname{Im} \ln \Big(\langle \lambda=1 | \lambda=2 \rangle \ldots \langle \lambda=n | \lambda=n+1 \rangle \ldots \langle \lambda=N-1 | \lambda=N \rangle \Big)$$

знак не обязательно минус, может быть и плюс. как удобнр.

адиабатическое изменение - перекрытия гладкие



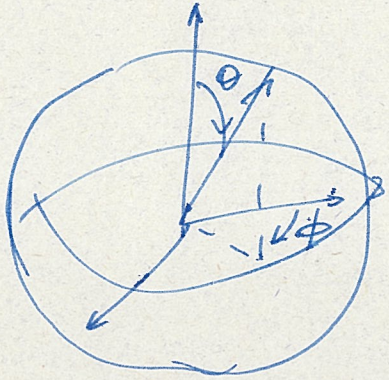
B/

спин :

$$H = -g\vec{B}\vec{S} \qquad |\vartheta,\phi\rangle = \begin{bmatrix} \cos\vartheta/2 \\ \sin\vartheta/2 \; e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

путь :

тащим спин магнитным полем $\vec{B}$, например



$$\begin{cases} \vec{S} \Rightarrow S\hat{e}_z \longrightarrow \vec{S} = S\hat{e}_y \\ \vec{S} = S\hat{e}_y \longrightarrow \vec{S} = -S\hat{e}_z \\ \vec{S} = -S\hat{e}_z \longrightarrow \vec{S} = -S\hat{e}_y \\ \vec{S} = -S\hat{e}_y \longrightarrow \vec{S} = S\hat{e}_z \end{cases}$$

$$\langle +z|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle +y|-z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2}$$

$$\langle -z|-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\langle -y|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\mathrm{Im}\ln\left[e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= -\pi$$

набрали фазу

с/

фаза, мнимая часть волновой функции, отвечает за скорость, если есть возможность пускать ток (в нашем примере синн был нулевым)

поэтому изучим случай, когда эта фаза будет определять ток в двумерной электронной системе

A/

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{k}^2}{2m} + \underbrace{\lambda(\hat{k}_x \hat{\sigma}_y - \hat{k}_y \hat{\sigma}_x)}_{\text{спин-орбитальное взаимодействие } \lambda = const} + \Delta \hat{\sigma}_z - \mu$$

μ — химический потенциал

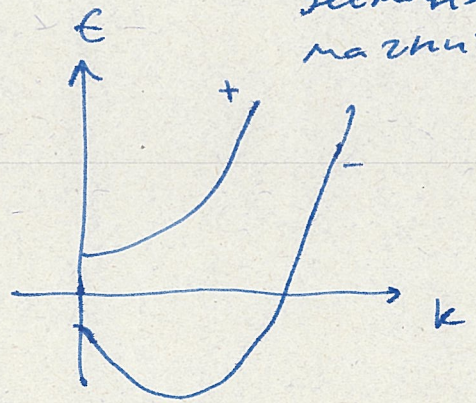
$\Delta \hat{\sigma}_z$ — обменное взаимодействие или Зеемановское магнитное поле $\Delta = const$

2D система

$\vec{k} \in (k_x, k_y)$

спектр

$$\epsilon_{k,\pm} = \frac{k^2}{2m} \pm \sqrt{(\lambda k)^2 + \Delta^2} - \mu$$



$$\psi_{k+} = \begin{pmatrix} \cos \xi_k/2 \; e^{i\phi_k} \\ -\sin \xi_k/2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{k-} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\xi_k}{2} \, e^{i\phi_k} \\ \cos \frac{\xi_k}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos \xi_k = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2}}$$

$$\phi_k = \arctan \frac{k_y}{k_x}$$

В/

Спиноры напоминают то, как мы параметризовали спин на единичной сфере.

Теперь импульс (k_x, k_y) „управляет" спинором.

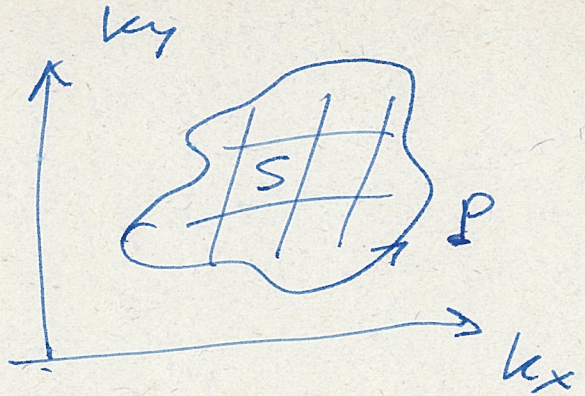
Чтобы ~~спин мог~~ фаза спина могла проявиться, нужно задействовать все три компонента спина, b_x, b_y, b_z, в Гамильтониане. В нашем модеме так оно и есть.

C1/

<u>фаза</u>:

$\lambda \in (k_x; k_y)$

$\lambda \in P$ путь



$$\varphi = -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} \ln \langle u_\lambda | u_{\lambda+d\lambda} \rangle =$$

$$|u_{\lambda+d\lambda}\rangle \simeq |u_\lambda\rangle + d\lambda \left| \frac{\partial}{\partial\lambda} u_\lambda \right\rangle \qquad \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda}$$

$$= -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} \ln \Big(\underbrace{\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle}_{=1} + d\lambda \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle \Big]$$

$$= -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} d\lambda \underbrace{\langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle}_{\text{мнимая}}$$

$$= \oint_P \langle u_\lambda | i\partial_\lambda u_\lambda \rangle d\lambda$$

C2

$\langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$ почему мнимая

$$\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \partial_\lambda \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0 = \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle + \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle = - \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle$$

эрмитовость:

$$A_{ij} = A_{ji}^* \quad , \text{где} \quad A_{ij} = \langle i | \hat{A} | j \rangle$$

поскольку в нашем случае $A_{ij} \equiv \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$

, то $A_{ji} = \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle$, тогда

$$A_{ij} = - A_{ji} = A_{ji}^* \Rightarrow A_{ij} \text{ мнимая величина}$$

Теорема Стокса:

$$\oint_{P} \langle u_\lambda | i\partial_\lambda u_\lambda \rangle = \int_S \vec{\Omega}(\lambda)\cdot d\vec{S}$$

по пути

по площади

$$\vec{\Omega} = \hat{e}_z \Omega = -2\,\mathrm{Im}\,\langle \partial_x u | \partial_y u \rangle$$ кривизна Берри

в нашем случае двумерие

в нашей модели

$$|u\rangle \Rightarrow |\psi_{k,\pm}\rangle \qquad \partial_{x/y} = \frac{\partial}{\partial k_{x/y}}$$

$$\vec{\Omega} \to \vec{\Omega}_{k,\pm}$$

$\vec{\Omega}$ эффективное магнитное поле в импульсном пространстве

$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{A}$ - потенциал

E/

к чему это эффективное магнитное поле приводит:

уравнения движения

$$\dot{\vec{r}}_{k\pm} = \frac{\partial \epsilon_{k\pm}}{\partial \vec{k}} + \dot{\vec{k}}_{\pm} \times \vec{\Omega}_{k\pm}$$ скорость

$$\dot{\vec{k}}_{\pm} = \underbrace{e\vec{E} + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_{k,\pm} \times \vec{B}}_{\text{сила Лоренца}}$$ второй закон Ньютона

получим „аномальную" скорость:

$$\left(\dot{\vec{r}}_{k\pm}\right)_{\text{аномальная}} \propto e\left[\vec{E} \times \vec{\Omega}_{k\pm}\right]$$

если аккуратно подсчитать ток

$$\vec{j}_{AHE} = e^2 \sum_{\delta=\pm} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \left[\vec{E} \times \vec{\Omega}_{k\pm}\right] f(\epsilon_{k\pm})$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{x/T}+1}$$ функция распределения Ферми-Дирака

F/ в нашей модели

$$\Omega_{k,\pm} = \mp \frac{\lambda^2 \Delta}{2\left[\Delta^2 + (\lambda k)^2\right]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{AHE} = e^2\left[\vec{E} \times \hat{e}_z\right] \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \left[f(\epsilon_{k,-}) - f(\epsilon_{k,+}) \right] \cdot \frac{\lambda^2 \Delta}{2\left(\Delta^2 + (\lambda k)^2\right)^{3/2}}$$

не ноль в меру разницы заполнения энергетических подзон $\epsilon_{k,+}$ и $\epsilon_{k,-}$

напомним, $\epsilon_{k\pm} = \frac{k^2}{2m} \pm \sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2} - \mu$

Это понятно: у разных подзон противоположная по знаку кривизна (фаза)

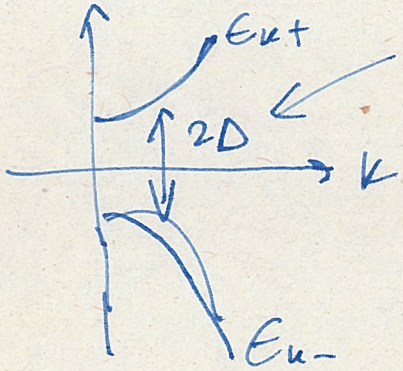
A/

Модель изолятора:

$$\hat{H}_B = \lambda(\hat{k}_x \hat{\sigma}_y - \hat{k}_y \hat{\sigma}_x) + \Delta \hat{\sigma}_z$$

всё тоже самое, но $\frac{1}{2m} \to 0$ и $\mu = 0$

спектр, $\epsilon_{k,\pm} = \pm\sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2}$



энергетическая щель
$T=0$

$$\Rightarrow J_{AHE} = e^2 \left[\vec{E} \times \hat{e}_z\right] \Big/ \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} 2\left[\Delta^2 + (\lambda k)^2\right]^{3/2} \lambda^2 \Delta$$

только ϵ_{k-} полозона
даёт вклад при $T=0$

В/

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\lambda^2 \Delta}{(\Delta^2 + (\lambda k)^2)^{3/2}} = \int_0^{\Lambda} \frac{k\,dk}{(2\pi)} \frac{\lambda^2 \Delta}{(\Delta^2 + (\lambda k)^2)^{3/2}}$$

$$\underset{\Lambda \to \infty}{\approx} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y+1)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \left(- \frac{2}{\sqrt{y+1}} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi}$$

просто число, независящее от λ и Δ, коль скоро $\lambda \neq 0$ $\Delta \neq 0$

$$\vec{j}_{AX7} = e^2 \frac{1}{4\pi} \left[\vec{E} \times \hat{e}_z \right]$$

мы работали в $\hbar \equiv 1$; $h = 2\pi\hbar$

$$\vec{j}_{AX7} = \frac{e^2}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{E} \times \hat{e}_z \right]$$

если вернуть $h = 2\pi\hbar$

c/

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812\ \Omega \approx 25\ k\Omega$$

Ом

Сопротивление Клитцинга (klitzing)

Черн - число (Chern number)
(Число Черна)

$$\oint \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2\pi C$$

целое число
$C = \pm 1, \pm 2, \ldots$ в зависимости от модели