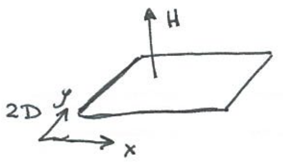
Квантовый эффект Холла и его родственники

(1) Классический эффект Холла [Edwin Hall (1855–1938, USA)]

золотая пластинка → эффект in PhD thesis. **1879**

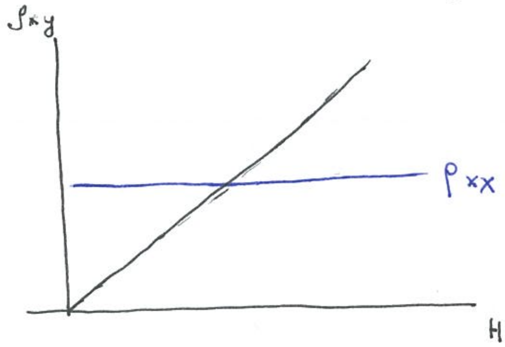


$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{e^2 n\tau/m}{1+\omega_c^2\tau^2} \qquad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \omega_c\tau\sigma_{xx}$$

$$\omega_c = \frac{|e|H}{mc} \ll \tau^{-1}$$ ← обратное транспортное время рассеяния

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m}{e^2 n\tau} \qquad \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{m\omega_c}{e^2 n} = \frac{H}{|e|cn} \; {}^{*)}$$

*) Не вошло τ!



магнитная длина

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|H}} \simeq 26 \text{ нм при } H = 1\text{Т}$$

Кратность вырожд. ур. Ландау

$$\frac{S}{2\pi l_H^2}$$

если ввести фактор заполнения

$$\nu = 2\pi l_H^2 \cdot n$$

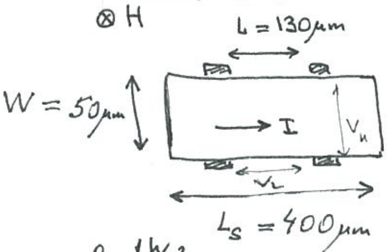
если $\nu = 1$ → запол. 1 ур. Ландау

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\cdot\frac{1}{\nu}$$

$\frac{h}{e^2} = 25813\ \Omega$ [квант сопротивления ≡ постоянная фон Клитцинга]

(2) Целочисленный кв. эфф. Холла [Klaus von Klitzing, 1980]

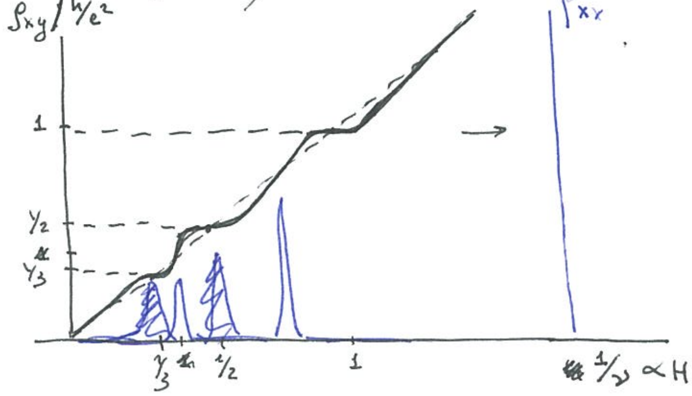
2.1 Эксперимент



$$\rho_{xx} \simeq R\frac{W}{L} = \frac{V_L}{I}\frac{W}{L} \qquad \rho_{xy} \simeq R_H = \frac{V_H}{I}$$

$T \simeq 4$ K

подвижность $\mu = 10^4 - 10^5 \frac{\text{см}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$



$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\cdot\frac{1}{k}\left[1 + \ldots 10^{-5}\right]^{**)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

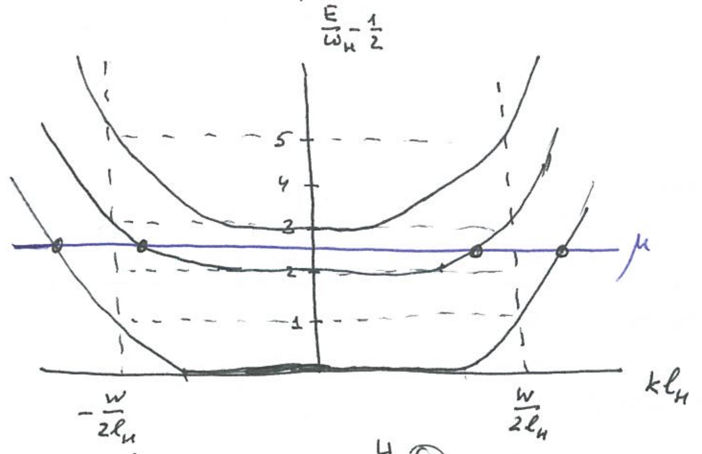
**) 1) сейчас уже 10^{-8}
2) в графене $T \simeq 300$K

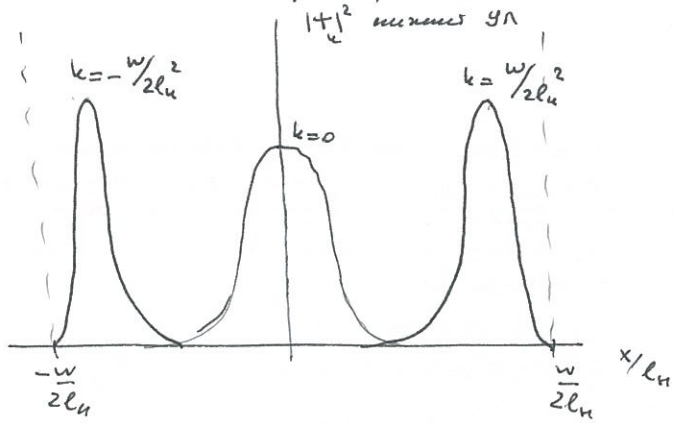
Приложение:
1) стандарт сопротивления
2) значение постоянной тонкой структуры.

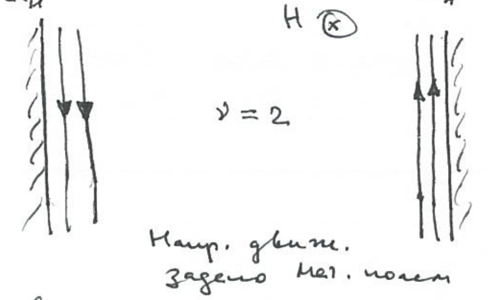
2.2. Наивное объяснение

Конечная ширина полоски $W \gg l_H$. Уровни Ландау изгибаются → ненулевая дисперсия

[B. Halperin, 1982]







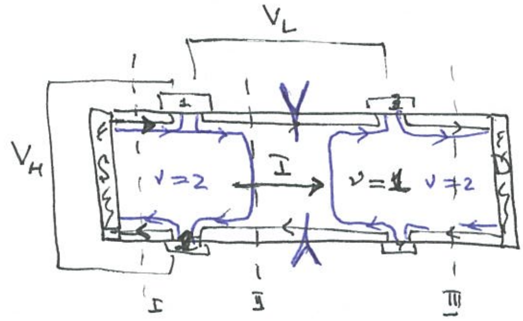
Краевые состояния: (скачущие орбиты)

лин. спектр. $\omega(k)=v\cdot k$, $v\sim\frac{\omega_c}{l_H}$

Каждое ~~кр. с-е со~~ КС дает вклад e^2/h в σ_{xy}.

Правило расчета токов [Büttiker, 1988]

Каждое кр. состояние переносит ток $I=\frac{e^2}{h}\cdot\mu$, μ — эл.-хим. пот. резерв., из которого оно выходит



~~I) $I=\frac{e^2}{h}\mu_S-\frac{e^2}{h}\mu_3$~~

~~II) $I=\frac{e^2}{h}\mu_1-\frac{e^2}{h}\mu_4$~~

~~III) $I=\frac{e^2}{h}\mu_3-\frac{e^2}{h}\mu_D$~~

~~$\frac{e^2}{h}\mu_S=\frac{e^2}{h}\mu_1 \quad \frac{e^2}{h}\mu_1=\frac{e^2}{h}\mu_3$~~

S: $I=\frac{e^2}{h}(\mu_S-\mu_2)$

1: $0=\frac{e^2}{h}(\mu_S-\mu_1)$ $\qquad \mu_S=\mu_1=\mu_3$

3) $0=\frac{e^2}{h}(\mu_1-\mu_3)$ $\qquad \mu_D=\mu_4=\mu_2$

D: $I=\frac{e^2}{h}(\mu_3-\mu_D)$ $\qquad I=\frac{e^2}{h}(\mu_S-\mu_D)$

4: $0=\frac{e^2}{h}(\mu_D-\mu_4)$ $\qquad V_L=0 \quad V_H=\frac{h}{e^2}I$

2: $0=\frac{e^2}{h}(\mu_4-\mu_2)$ $\qquad R_L=0 \quad R_H=h/e^2$

2.3. Проблемы:

Не учитывается беспорядок, электрон-электр. взаимодействие.

↓ существ. для суп. ЦКЭХ

[помним, что кл. эф. Холла $\omega_c \gg 1/\tau$]

Экспер. говорит, что все выживает и с учетом беспор. и э-э взаим.

2.4

Тот факт, что $\rho_{xy}=\frac{h}{e^2}\frac{1}{k}$ k — целое [число ~~кр.~~ КС]

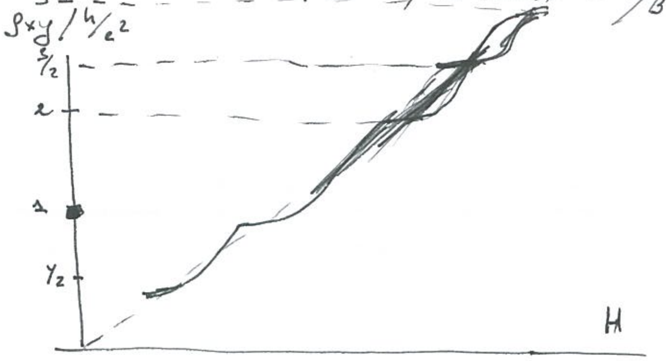
указывает на наличие топологии

Число КС сложно изменить и оно может быть только целым !!!

③ Дробный квантовый эффект Холла (Dan Tsui, H. Störmer, A. Gossard 1982) ③

3.1 Эксперимент

более чистые образцы $\mu = 10^5 - 10^6\ cm^2/В\cdot с$ [сейчас $\mu = 3\cdot 10^7\ cm^2/В\cdot с$



плато соотв. $\rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{\nu}$

$$\nu = p/q$$

как правило q нечетное.

под плато $\rho_{xx} \propto \exp(-\Delta/T)$

$\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$ $\quad \Delta \sim e^2/l_H$

Как объяснить?

3.2 В.ф. Лафлина (вариац. в.ф.) для сост. с $\nu = 1/m$ [m odd] $\quad z = x+iy$ N частиц [взаимод., но без беспорядка]

$$|\psi_m\rangle = \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}|z_j|^2\right)$$

m — нечетное целое число!

0.1% перекрытие с точной в.ф. для $N \lesssim 10$ электр.

$$n(z_1) = \frac{N}{\langle\psi_m|\psi_m\rangle}\int\ldots\int dz_2\ldots dz_N |\psi_m|^2 \underset{N\to\infty}{=} \frac{1}{2\pi l_H^2 m}$$

дробный заряд!

$$\langle\psi_m|\psi_m\rangle = \int dz_1\ldots dz_N\, e^{-\frac{1}{m}F}$$

$$F = -\frac{m^2}{2}\int dz\,dz'\,\rho(z)\rho(z')\ln|z-z'| + \frac{m}{2}\int dz\,|z|^2\rho(z)$$

$$\rho(z) = \sum_{j=1}^{N}\delta(z-z_j)$$

$$\int dz'\,\langle\rho(z')\rangle \ln|z-z'| = +\frac{1}{4m}|z|^2$$

$$2\pi\langle\rho(z)\rangle = \frac{1}{4m}\Delta|z|^2 \Rightarrow \frac{1}{2\pi m} = \langle\rho\rangle$$

$$\Delta \ln|z-z'| = 2\pi\delta^{(2)}(z-z')$$

3.3 Композит. фермионы

$$\Psi(r_1,\ldots,r_N) = \prod_{j<k}^{N} e^{-i\,2m\arg(r_j-r_k)}\cdot\tilde{\Psi}(r_1,\ldots,r_N)$$

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{a}$$

$$\vec{a}(r_k) = i\nabla_k \prod_j e^{-i2m\arg(r_k-r_j)} \equiv \frac{2m\Phi_0}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\vec{e}_z\times(\vec{r}_k-\vec{r}_j)}{|r_k-r_j|^2}$$

$$\nabla\times\vec{a} = 2m\sum_j \Phi_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_j)$$

$$b = 2m\Phi_0\cdot n(r)$$

$$\langle b\rangle = 2m\cdot\Phi_0\cdot\langle n\rangle = \cancel{2m\Phi_0\frac{1}{2\pi m l_H^2} = \frac{\Phi_0\,eH}{\pi\,\hbar c}}$$

$$H_{2m} = \langle b\rangle = 2m\Phi_0\langle n\rangle \qquad \langle n\rangle = \frac{1}{2\pi l_H^2\cdot 2m} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{2m}}$$

external field cancels $\langle b\rangle$

$H = H_{2m} + \Delta H$ УКЭХ для CF

$$p = \frac{\langle n\rangle \phi_0}{\Delta H} \qquad \Delta H = \frac{\langle n\rangle \phi_0}{p}$$

$$\frac{\langle n\rangle \phi_0}{p} + 2m\,\phi_0 \langle n\rangle = H$$

$$\nu = \frac{\langle n\rangle \phi_0}{H} = \frac{p}{2mp+1} \qquad \text{[Jain 1989)}$$

m	1	1	1	1	2	2
p	1	2	3	4	1	2
ν	$1/3$	$2/5$	$3/7$	$4/9$	$1/5$	$2/9$

$$\vec{v} = \vec{j}/n$$

$$\vec{j} = \sigma_{CF}(\bar{E} + \bar{E}_{in}) \qquad \bar{E}_{in} = \frac{e}{c}[\vec{B}\times\vec{v}]$$

$$= 2m\phi_0 \frac{e}{c}[\vec{z}\times\vec{j}] = -\rho_{CS}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E} = \rho_{CF}\cdot\vec{j} - \vec{E}_{in} \qquad \rho_{CS} = \frac{h\cdot 2m}{e^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \rho_{CF} + \rho_{CS} \qquad \rho_{CF} = p\frac{h}{e^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{h}{e^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{p} + 2m\right). \qquad \rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{\nu} \qquad \nu = \frac{p}{2mp+1}$$

More exotic states:

$\nu = \frac{5}{2}$:

$$\Psi_{MR} = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)\prod_{j<k}(z_j - z_k)^2 \prod_j e^{-\frac{|z_j|^2}{4}}$$

SC состояние CF.

Non-abelian statistics

квазидырка

$$S_{z_0}|m\rangle = \prod_{j=1}^{N} (z_j - z_0)|m\rangle$$

~~$\langle m | S_{z_0}^{+} S_{z_0} | m \rangle =$~~

$$\rho(z_1) = \frac{N}{\langle m | S_{z_0}^{+} S_{z_0} | m\rangle} \int |S_z|m\rangle|^2 \, dz_2 \dots dz_N$$

$$F = -m^2 \int dz\, dz' \rho(z) \rho(z') \ln|z-z'| + \frac{m}{2}\int dz\, |z|^2 \rho(z)$$

$$+ 2m \int dz\, \rho(z) \ln|z - z_0|$$

$$\int dz' \rho(z') \ln|z-z'| = \frac{1}{4m}|z|^2 + \frac{1}{m}\ln|z-z_0|$$

$$2\pi \overline{\rho} = \frac{1}{4m}\Delta|z|^2 + \frac{1}{m}\Delta \ln|z-z_0|$$

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi m} + \frac{1}{m}\delta^{(2)}(z-z_0)$$

$$\boxed{\delta Q = \int \delta\rho \cdot d^2 z = \frac{1}{m}}$$