1. Кубиты

2-уровневые квантовые системы, $a|0\rangle + b|1\rangle$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$

Лок. операции: эволюция, УШ

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -i\hat{H}|\psi\rangle$$

$$|\psi_0\rangle \Rightarrow U(t)|\psi_0\rangle,$$

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right)$$

Элементарные операции: один кубит

↑ - спин-1/2 $|0\rangle = |\uparrow\rangle$, $|1\rangle = |\downarrow\rangle$

$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad |0\rangle \mapsto |1\rangle, \quad |1\rangle \mapsto |0\rangle$$

$$\sqrt{NOT} = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}: \quad |0\rangle \mapsto \frac{1+i}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$$
$$|1\rangle \mapsto \frac{1-i}{2}(|1\rangle + i|0\rangle)$$

$$\sqrt{NOT}\cdot\sqrt{NOT} = NOT$$

фазовый сдвиг $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}: \quad |0\rangle \mapsto |0\rangle$
$|1\rangle \mapsto e^{i\varphi}|1\rangle$

Спин-1/2. Гамильтониан $\hat{H} = -B\cdot\frac{\hat{\sigma}}{2}$ (+const)

Пример 1. $B \parallel \hat{z}$: $\hat{H} = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{Bt}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iBt}{\hbar}} \end{pmatrix}$

~~(поворот спина)~~ (сдвиг фазы)

Пример 2. $B \parallel \hat{x}$: $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$, $e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{Bt}{\hbar} & i\sin\frac{Bt}{\hbar} \\ i\sin\frac{Bt}{\hbar} & \cos\frac{Bt}{\hbar} \end{pmatrix}$

(поворот спина)

② Принципы реализации квантового компьютера.

- 2-уровневые квантовые системы — кубиты

  ↑ спин 1/2 фотон ↕ ↔ атом

  — без „утечки" на высшие уровни

  — с хорошо определёнными (регулируемыми) параметрами → гамильтониан

  — масштабируемость

- $$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\overline{H}^{i}(t)}_{\text{регулируется (вкл/выкл)}} \hat{\sigma}^{i}$$

  1-кубитные (логические) операции

- $$\mathcal{H} = \text{—}\,''\,\text{—} + \sum_{i<j} \underbrace{J^{ij}(t)}_{\text{регулируется}} \underbrace{\left[\hat{\sigma}_x^{i}\hat{\sigma}_x^{j} + \hat{\sigma}_y^{i}\hat{\sigma}_y^{j}\right]}_{\text{пример взаимодействия}}$$

  2-кубитные операции:

  $$\mathcal{H} = J\left(\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)} + \hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\right) \text{ на время } \tau$$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -i\sin\gamma & 0 \\ 0 & -i\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \begin{matrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{matrix}, \quad \gamma = \frac{2J\tau}{\hbar}$$

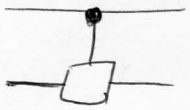
Например, $U\left(\gamma = \frac{\pi}{4}\right)$: $|\uparrow\downarrow\rangle \to \dfrac{|\uparrow\downarrow\rangle - i|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ — „запутанное" состояние

Оператор Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{—}\boxed{H}\text{—}$$

Управляемый фазовый сдвиг

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{Bmatrix}$$



Дискретное преобразование Фурье

операций $\sim L^2$

классически $\sim 2^L \cdot L$

ДПФ: $\displaystyle\sum_{x=0}^{2^L-1} c_x|x\rangle \longmapsto \sum_{k=0}^{2^L-1} c_k|k\rangle$, где $c_k = \dfrac{1}{2^L}\displaystyle\sum_{x=0}^{2^L-1} e^{\frac{2\pi i}{2^L}kx} \cdot c_x$

③ Кв. алгоритм: — инициализация
— унитарная эволюция (обратимость)
— считывание (квантовое измерение)

Кв. параллелизм — ускорение вычислений

N битов — 2^N состояний

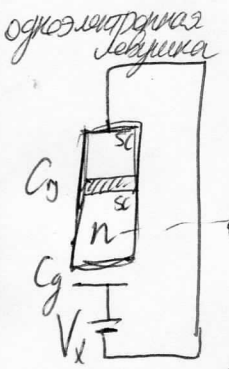
N кубитов можно приготовить в суперпозиции 2^N состояний, т.е. обработать все их за один раз

Почему не всегда быстрее? — Кв. измерение. — Но иногда!

$$\mathcal{H} = \text{—''—} + \underbrace{\mathcal{H}_{meas}(t)}_{\text{регулируется}} + \underbrace{\mathcal{H}_{diss}}_{\text{слабое}} \; (!)$$

---

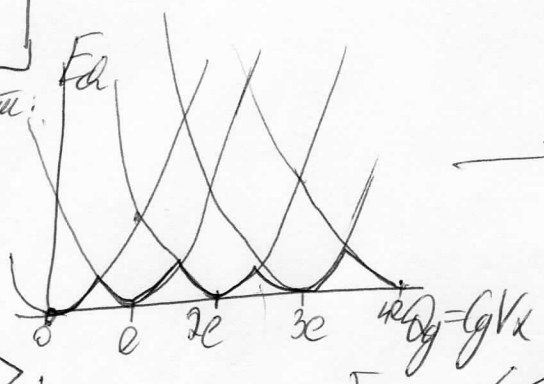
2. Сверхпроводниковые кубиты



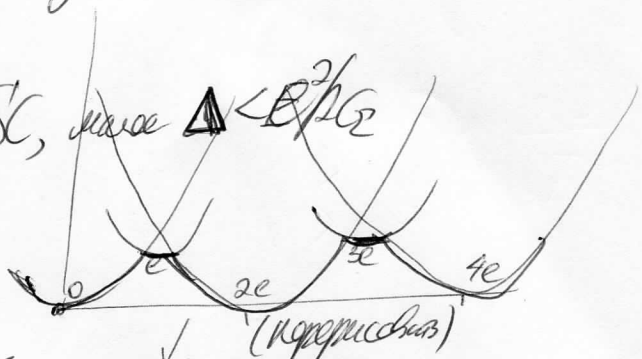
$$E_{ch}(Q, V_x) = \frac{(Q - C_g V_x)^2}{2(C_g + C_y)^2}$$

Кул. блокада

Нормальный:

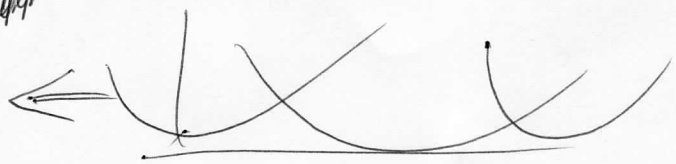


SC, малое $\Delta < E^2/2C_\Sigma$



$\Delta > E^2/2C_\Sigma$

(перерисовать)



Кулоновская лестница

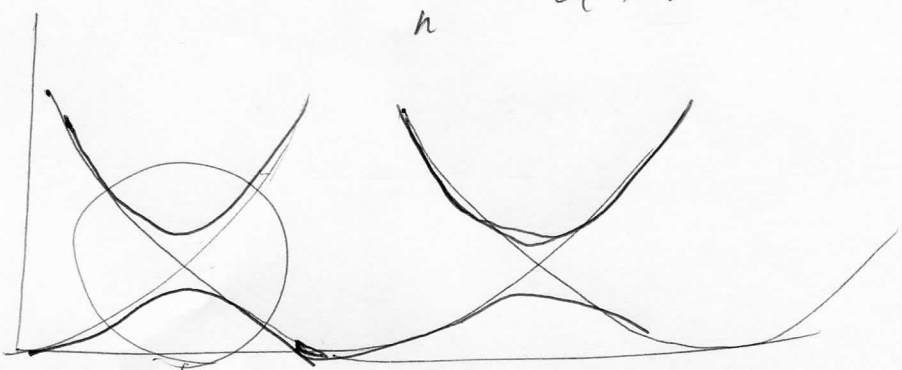
④ Когерентная динамика заряда

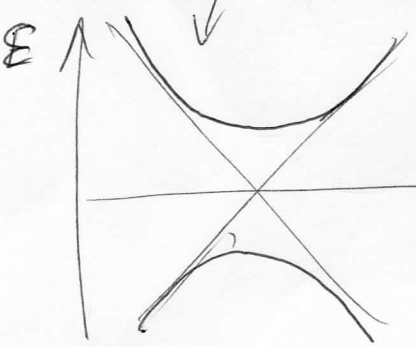
Джозефсоновское туннелирование

$$\sum_n \left[-\frac{E_J}{2} |n\rangle\langle n+1| \right] + h.c.$$

$$|\varphi\rangle \equiv \sum_n e^{i\varphi n} |n\rangle \Rightarrow -E_J \cos\varphi$$

$$\hookrightarrow + \sum_n E_{ch}(n) |n\rangle\langle n|$$





$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta E_{ch}}{2} & -E_J/2 \\ -E_J/2 & +\frac{\Delta E_{ch}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} |n=0\rangle \\ |n=1\rangle \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\Delta E_{ch} \cdot \hat{\sigma}_z + E_J \cdot \hat{\sigma}_x \right],$$

$$\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta E_{ch}^2 + E_J^2}$$

(V. Bouchiat et al.) 97

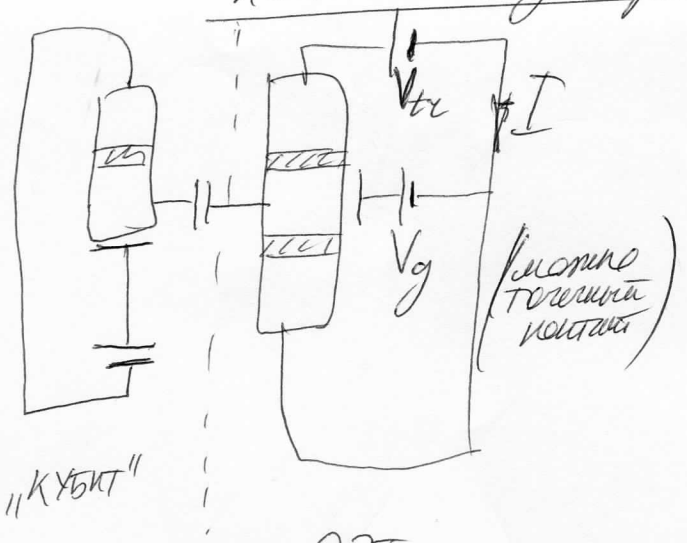
Начальное состояние. $\Delta E_{ch} = 0$, при $t=0$ $|n=0\rangle$.

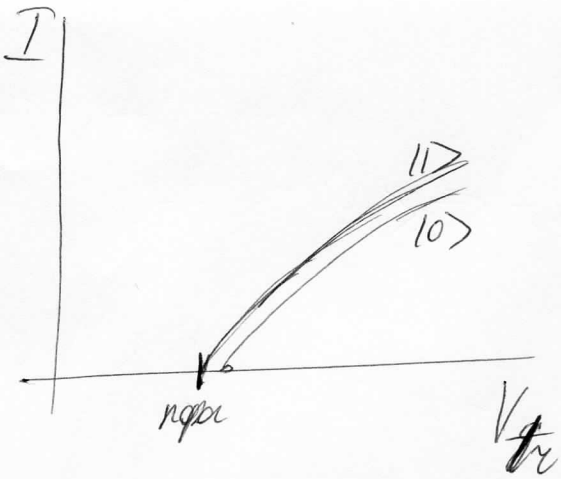
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{E_J t}{2\hbar} & i\sin\frac{E_J t}{2\hbar} \\ i\sin\frac{E_J t}{2\hbar} & \cos\frac{E_J t}{2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \\ i\sin \end{pmatrix}$$

$$\langle Q \rangle = 2e \cdot (\cos^2 \cdot 0 + \sin^2 \cdot 1) = 2e \sin^2\frac{E_J t}{2\hbar} = e \cdot \left(1 - \cos\frac{E_J t}{\hbar}\right)$$

(5)

Квантовое измерение



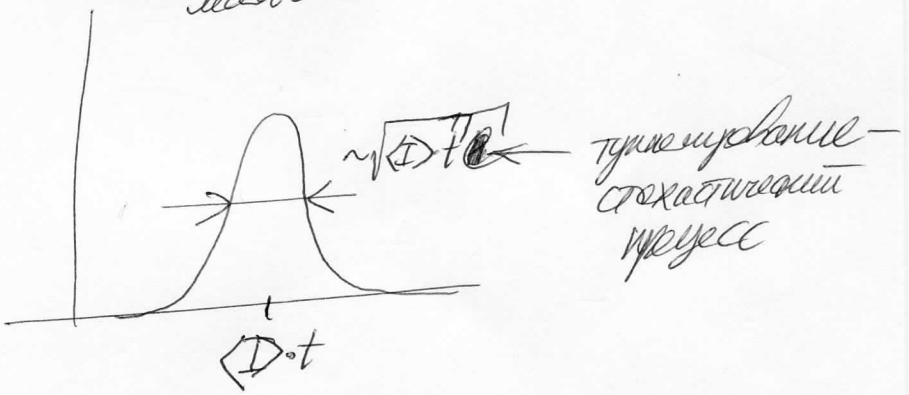


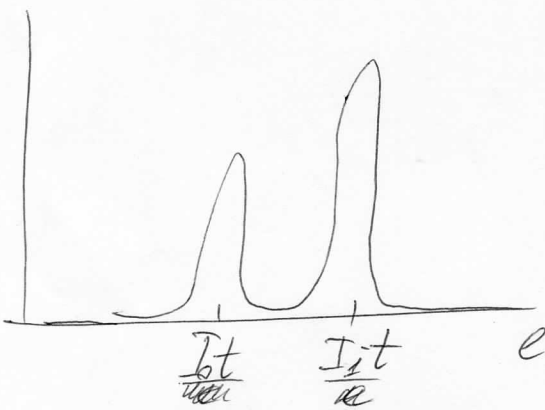
Измерение – включаем $V_{tr} \neq 0$ – бежим мимо порога.

$I_0 \neq I_1$ – !

Распределение прошедшего заряда $me = \int I dt$

$t = 0$





$(I_1 - I_0)\cdot t$, а ширина пиков $\sim\sqrt{t}$.

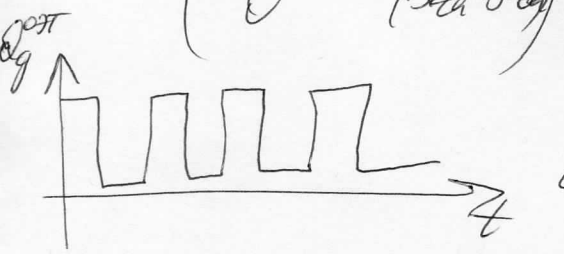
При $t \sim t_{meas}$ пики расходятся.

Измерен заряд m после t_{meas} $\Rightarrow$ узнали состояние кубита или 1

⑥ А что происходит с кубитом во время измерения?

Электроны в транзисторе проходят по одному — дробовой шум. Шум заряда на островке ОЭТ ⟹ ⟹ шум затворного напряжения для кубита.

$$H = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta E_{ch} + \delta E_{ch} & 0 \\ 0 & -(\Delta E_{ch} + \delta E_{ch}) \end{pmatrix}; \quad e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \sim \begin{pmatrix} e^{-\frac{2i}{\hbar}\Delta E_{ch} t} \cdot e^{-\frac{2i}{\hbar}\int_0^t \delta E_{ch}(\tau)d\tau} & 0 \\ 0 & (\sim)^* \end{pmatrix}$$



случайная фаза, растущая (rms) со временем

Эта фаза ~ 1 при $t \sim \tau_\varphi$.

Простой расчёт даёт:

$$\tau_\varphi < t_{meas}.$$

Нельзя измерить, не испортив!