Фрактальные системы в природе и их необычные физические свойства.

А.С.Иоселевич

Математики придумывают регулярные фракталы - самоподобные структуры, мелкие детали которых в уменьшенном масштабе воспроизводят картину крупных. Природа создает случайные фракталы - неупорядоченные системы, для которых самоподобие выполняется только в среднем. Примеры таких систем: кластеры из слипшихся частиц, различные гели, шероховатые поверхности и пористые вещества. Кроме экзотических геометрических свойств, природные фракталы обладают необычными физическими характеристиками.

1 Смеси.

1. **Кластеры. Явление перколяции.** Если смешать частицы двух разных сортов – скажем, металлические (доля x) и диэлектрические (доля $1-x$) – то некоторые частицы одного сорта будут касаться друг друга, образуя кластеры. При малом x в системе будут только малые металлические кластеры – размером порядка размера одной частицы a, и их будет мало. Наоборот, при x, близком к единице, почти все металлические частицы образуют один большой (бесконечный – в термодинамическом пределе) кластер, а маленьких кластеров опять будет мало. Бесконечный кластер имеется при $x > x_{\rm perc}$, а при $x < x_{\rm perc}$ его нет. При $x = x_{\rm perc}$ происходит, как говорят, "перколяционный переход". Вблизи этого перехода, при $x \approx x_{\rm perc}$ как конечные кластеры (те из них, которые включают много частиц $s \gg 1$), так и бесконечный кластер, имеют фрактальные свойства в некотором большом, но конечном интервале масштабов $a < r < \xi$. На этих масштабах структура кластеров обладает свойством самоподобия

2. **Фрактальные свойства кластеров: геометрия.**

   - Зависимость массы кластера M от его размера L

     $$\overline{M}(L) \propto (L/a)^{d_{\rm f}}, \qquad \Delta M \sim \overline{M}(L), \tag{1}$$

     причем величина $d_{\rm f}$ называется фрактальной размерностью. В трехмерном случае (который мы только и рассматриваем в этой лекции)

     $$d_{\rm f} = 2.524 \tag{2}$$

     Мы видим, что $d_{\rm f} < d = 3$, т.е. число узлов в кластере растет медленнее, чем его объем, так что средняя плотность на масштабе L убывает с L как $\rho(L) \sim L^{-(d-d_{\rm f})}$. С чем связан нетривиальный степенной закон роста (1) для фрактальных

объектов? Дело в том, что большой кластер размера L весь усеян дырками различных размеров r в диапазоне от $r \sim 1$ до $r \sim L$, причем распределение дырок по размерам в этом диапазоне имеет степенной вид. Геометрическая картина кластера обладает масшабной инвариантностью – родовым свойством всех фрактальных объектов. Чтобы пояснить это свойство, рассмотрим процедуру огрубления. Разобъем кластер на кубики размером L_1, такого, что $1 \ll L_1 \ll L$ и сосчитаем число узлов M_i в каждом кубике. Те кубики, в которых оказалось $M_i < \overline{M}(L_1)$, мы сотрем и посмотрим на образовавшуюся картину из оставшихся кубиков. Она окажется подобной исходной! Разумеется, это подобие нужно понимать в статистическом смысле – в смысле эквивалентности соответствующих ансамблей: не конкретная реализация остается самоподобной при огрублении, а ансамбль огрубленных реализаций совпадает (с точностью до масштабного преобразования) с ансамблем исходных. Итак, свойство самоподобия выполняется только для средних по ансамблю величин (например, для $\overline{M}(L)$), а флуктуации от образца к образцу велики: $\Delta M \sim \overline{M}(L)$.
Масса каждого "узла" в огрубленной конфигурации есть $\overline{M}(L_1)$, следовательно, для средней массы исходного кластера размером $L \gg L_1$ мы можем записать

$$\overline{M}(L) = \overline{M}(L/L_1)\overline{M}(L_1). \tag{3}$$

Этому уравнению удовлетворяют все функции $\overline{M}(L) \sim L^u$, что предопределяет степенной вид (1), однако показатель u таким образом не найдешь.

- Бесконечный кластер и его свойства на различных пространственных масштабах. Плотность бесконечного кластера:

$$P(x) \propto (x - x_{\rm perc})^{\beta}\theta(x - x_{\rm perc}), \qquad \beta = 0.417. \tag{4}$$

Корреляционный радиус:

$$\xi(x) \propto |x - x_{\rm perc}|^{\nu}, \qquad \nu = 0.875 \tag{5}$$

На масштабах $L \gg \xi$ бесконечный кластер "самоусредняется" т.е., выглядит, как сплошная среда, характерный размер неоднородности в которой не превышает ξ. На масштабах $1 \ll L \ll \xi$ бесконечном кластере встречаются "большие" дырки и он проявляет фрактальные свойства – точно такие же, какие имеет и конечный кластер этого масштаба.

- Распределение конечных кластеров по размерам M

$$n_M(x) \approx M^{\tau} f(M/M_c(x)), \qquad M_c(x) \sim |x - x_{\rm perc}|^{-1/\sigma}, \tag{6}$$

причем τ и σ – универсальные (зависящие только от размерности пространства) критические индексы:

$$\tau \approx 2.32, \qquad \sigma_{d=3} \approx 0.453. \tag{7}$$

Явный вид функции $f(y)$ неуниверсален, более того, он зависит от того, с какой стороны от перехода мы находимся. Однако качественное поведение этой функции – универсально:

$$f(y) \approx \begin{cases} c_1, & \text{при } y \ll 1, \\ c_2 \exp(-y), & \text{при } y \gg 1, \end{cases} \tag{8}$$

где c_1, c_2 – некоторые константы.

- Как устроен кратчайший путь, соединяющий две точки расположенные на расстоянии R друг от друга на фрактальном кластере? Средняя длина такого пути

$$\overline{\ell}(R) \sim R^{d_{\min}}, \qquad d_{\min(d=3)} \approx 1.34. \tag{9}$$

В случае бесконечного кластера формула (9) справедлива только при $R < \xi$, при $R > \xi$ восстанавливается линейный закон $\overline{\ell}(R) \sim cR$, но с большим коэффициентом c.

3. **Фрактальные свойства кластеров: физика.**

- Сопротивление и емкость конечного кластера проводящих частиц в диэлектрической матрице.
Средний кондактанс ($G \equiv 1/R$) фрактального кластера размером L:

$$\overline{G}(L) \approx g a^{d-2} (L/a)^{-\tilde{\zeta}}, \qquad \tilde{\zeta} = 1.3. \tag{10}$$

где a – размер зерна, а g – кондактанс одного зерна.
Средняя емкость

$$\overline{C}(L) \approx L\varepsilon_0 (L/a)^{s/\nu}, \qquad s \approx 0.74. \tag{11}$$

- Проводимость и диэлектрическая проницаемость бесконечного кластера проводящих частиц.
Макроскопическая (на масштабах $L \gg \xi$) проводимость системы:

$$\sigma(p) \sim g(x - x_{\text{perc}})^{\mu} \theta(x - x_{\text{perc}}), \qquad \mu = 2.14. \tag{12}$$

Диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_{\text{eff}}(x) \sim \varepsilon_0 (x - x_{\text{perc}})^{-s} \tag{13}$$

- Проводимость смеси сверхпроводящих (доля x) и нормальных (доля $1 - x$) металлических частиц.
В нормальной области (при $x < x_{\text{perc}}$) проводимость конечна, но расходится при приближении к порогу перколяции по сверхпроводящим гранулам:

$$\sigma = g(x_{\text{perc}} - x)^{-s} \tag{14}$$

2 Агрегаты: Diffusion-limited aggregation (DLA).

Диффундирующие (или, в другой постановке – баллистические) частицы конечного размера a, прилипают к затравке (и сами приобретают свойства затравок). Постепенно нарастает кластер из частиц, обладающий фрактальными свойствами:

$$\overline{M}(L) \propto L^{d_{\mathrm{f}}}, \qquad d_{\mathrm{f}} < d. \tag{15}$$

Фрактальная размерность $d_{\mathbf{f}}$ зависит от деталей постановки задачи (например, от того, замирает ли частица в том положении, в каком прилипла, или ей разрешается "устроиться по-удобнее")

3 Cluster-cluster aggregation (CCA). Gelation transition

В пространстве диффундируют частицы конечного размера a с малой концентрацией n ($na^3 \ll 1$). Как только две частицы касаются друг друга, они слипаются. Образующиеся кластеры тоже диффундируют (с коэффициентами диффузии, вообще говоря, зависящими от числа частиц в кластере M и его формы) и продолжают слипаться друг с другом. С течением времени t кластеры растут и приобретают фрактальную структуру – разбухают: $\overline{M}(t) \propto (L(t)/a)^{d_{\mathrm{f}}}$. Средний размер кластеров $L(t)$ растет, концентрация кластеров $n_{\mathrm{cl}}(t) \sim n/\overline{M}(t)$ падает, а плотность внутри кластера $n_{\mathrm{in}}(t) \sim a^{-3}(L(t)/a)^{-(d-d_{\mathrm{f}})}$ уменьшается. В какой-то момент кластеры так разбухают, что выполняется условие $n_{\mathrm{cl}}(t)L^3(t) \sim 1$ и конечная их доля слипается в бесконечный кластер. Образуется гель.

4 Шероховатые поверхности.

Шероховатые поверхности обычно получают методом осаждения, очень похожим на агрегацию, с той разницей, что в качестве "затравки" выступает не точка, а поверхность. Представим себе коробку с плоским квадратным дном $L \times L$ и вертикальными стенками. Сверху в нее случайным образом со скоростью ν штук в единицу времени на единицу площади падают шарики радиуса a, которые прочно прилипают к ее дну (если попадают на дно) или к ранее уже прилипшим шарикам, если попадают на них. Что за структура образуется по прошествии достаточно большого времени? Оказывается, что в нижней части коробки образуется плотное нефрактальное тело: его плотность $\rho_{\mathrm{dense}} \sim a^{-3}$ – порядка максимальной возможной (хотя, конечно, заметно меньше него), а высота $h_{\mathrm{dense}}(t) \sim \nu t a^3$ растет со временем по тривиальному линейному закону. Верхняя поверхность этого плотного тела представляет собой слой фрактальной "пены" со средней толщиной

$\overline{\Delta h}_{\mathrm{fract}}(t)$, зависящей от времени. Существует некоторое характерное, зависящее от размеров коробки, время

$$t_0 \sim \frac{1}{\nu a^2}(L/a)^{\gamma}, \qquad \gamma > 0. \tag{16}$$

Сначала, на временах $t < t_0$, толщина поверхности $\overline{\Delta h}_{\mathrm{fract}}$ растет со временем:

$$\overline{\Delta h}_{\mathrm{fract}}(t) \sim a(\nu t a^2)^{\beta}, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{17}$$

Позднее, на временах $t > t_0$, толщина $\overline{\Delta h}_{\mathrm{fract}}$ перестает зависеть от времени и выходит на значение

$$\overline{\Delta h}_{\mathrm{fract}} \sim a(L/a)^{\alpha}, \qquad \alpha = \gamma\beta < 1, \tag{18}$$

зависящее от размеров коробки. Численные значения критических индексов α, β, входящих в формулы (17,18) – неуниверсальны, они зависят от конкретного механизма прилипания частиц.

5 Пористые вещества.

Пористое вещество представляет собой частный случай смеси, в качестве одной из компонент которой выступает вещество (скажем – металл), а в качестве другой – пустота. Поэтому для описания свойств пористых тел часто используют теорию перколяции. Существует, однако, одно важное отличие: В системе не может существовать конечных металлических кластеров, так как они не могут висеть в пустоте. Следовательно, металлическая компонента всегда является связной: весь металл принадлежит одному бесконечному кластеру. В обычной двухкомпонентной смеси происходят ДВА перколяционных перехода при разных значениях x, соответствующих образованию бесконечного кластера для каждой из двух компонент. В пористой системе имеется только ОДИН переход, при котором возникает бесконечный кластер пор. Около этого перехода подсистема пор обладает фрактальными свойствами. Имеется, впрочем, и еще одна область фрактального поведения, не связанная ни с каким перколяционным переходом: это область низкой концентрации металла $x \ll 1$. Здесь практически все поры связаны в мощный (нефрактальный) бесконечный кластер, металл же образует весьма хилый бесконечный кластер с малой плотностью $P(x) = x$ и большой корреляционной длиной ξ. Последний обладает ярко выраженными фрактальными свойствами на масштабах $a < L < \xi$. Эти свойства во многом похожи на свойства гелей.

6 “Топливные элементы” – Solid Oxide Fuel Cells (SOFC)

Рассмотрим пример трехкомпонентной системы, используемой в некоторых электромобилях для пребразования энергии, выделяемой при реакции сжигания водорода $2H_2+O_2=2H_2O$ непосредственно в электричество. Это смесь из металлических гранул (например, Ni) с электронным типом проводимости и гранул твердого электролита (например, $ZrO_2+Y_2O_3$ – Yttria stabilized Zirconia), носителями тока в котором выступают ионы O^{2-}. Кроме того в системе имеются поры. Концентрации всех трех компонент этой системы выбираются таким образом, чтобы для всех них существовали бесконечные кластеры. Через систему пор подается водород H_2, который в местах встречи всех трех бесконечных кластеров (“местах реакции”) вступает в реакцию с ионом O^{2-}, приходящим по твердому электролиту. При этом два электрона уходят через металлическую подсистему, а получающаяся молекула воды H_2O уходит через кластер пор. В результате между металлическим и твердо-электролитным бесконечными кластерами поддерживается напряжение, совершающее работу во внешней цепи. Для оптимальной работы системы желательно максимизировать количество мест реакции, не допуская при этом больших значений электрических сопротивлений обеих проводящих компонент и большого гидродинамического сопротивления системы пор. Поэтому реально работающие системы обычно проектируются так, чтобы находиться вдали от всех перколяционных переходов и их фрактальные свойства проявляются слабо.