Задача 1 (модель Китаева). Рассмотрим фермионы на решетке с гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = -\mu \sum_x c_x^\dagger c_x - \sum_x \left[t c_x^\dagger c_{x+1} + \Delta c_x c_{x+1} + \text{э.с.} \right] ,$$

где μ и t вещественны, а Δ комплексно, x пробегает целые значения.
а) Диагонализовать гамильтонина и найти спектр возбуждений $E(k)$ в (одномерном) объеме. При каких значениях параметров $E(k)$ зануляется?
Указание. Определим $\Psi_x \equiv (c_x, c_x^\dagger)$. Записать гамильтониан в виде $\sum_{x,x'} \Psi_x^\dagger \hat{H}_{x-x'} \Psi_{x'}$, где H - матрица 2×2. Используя преобразование Фурье, найти $H(k)$ и спектр $E(k)$.
б) При каких значениях параметров существуют нулевые краевые моды - операторы вида $\sum_x f(x) c_x$, коммутирующие с гамильтонианом? ($f(x)$, локализованную вблизи края, удобно искать в виде суперпозиции спадающих экспонент.) В частности, существуют ли они при $t = \Delta = 0$? А при $\mu = 0$?
(A.Kitaev, arXiv:cond-mat/0010440)

Задача 2 (классификация топологических изоляторов). Рассмотрим системы на одномерной решетке с зонным гамильтонианом $H(k) = -\mathbf{B}(k)\hat{\vec{\sigma}}$ размером 2×2, определенным в зоне Бриллюэна $-\pi < k < \pi$ и не имеющим нулевых собственных значений (гамильтониан с щелью; $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули). Если непрерывно менять зависимость $\mathbf{B}(k)$, один такой гамильтониан преобразуется в другой. Всегда ли можно один $H_1(k)$ преобразовать в другой, $H_2(k)$? Сколько существует различных типов гамильтонианов? Ответ зависит от симметрии рассматриваемых гамильтонианов.
а) Решить задачу, когда никаких дополнительных ограничений (кроме эрмитовости, $H^\dagger(k) = H(k)$) на форму операторов нет. Показать, что все $H(k)$ эквивалентны.
б) Рассмотреть случай частично-дырочной симметрии: $H(-k) = -\sigma_x H^T(k) \sigma_x$. Показать, что при этом $H(k)$ имеет вид

$$H(k) = \begin{pmatrix} \xi & \Delta \\ \Delta^* & -\xi \end{pmatrix} , \tag{1}$$

где $\xi(k)$ - четная вещественная функция, а “сверхпроводящая щель” $\Delta(k)$ - нечетная комплексная. Показать, что существуют два класса гамильтонианов, не эквивалентных между собой.
в) Как соотносятся области параметров, полученные в задачах 1б) и 2б)?