

Математика–1

Для сдачи экзамена нужно приехать в ИТФ в Черногоровке и в течение дня (11:00–18:00) решить три задачи. Дату следует предварительно — не позже, чем за 3–4 дня — согласовать по электронной почте (адрес на домашней странице теорминимума актуален).

Как правило, первая задача — найти неопределённый интеграл от элементарной функции. Набор нужных техник здесь стандартен и полностью покрывается любым сборником упражнений по анализу (например, главой «Интегрирование функций» из «Сборника задач по высшей математике» Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

Вторая задача – решение обыкновенного дифференциального уравнения в квадратурах. Если вы можете быстро решить любое уравнение из параграфов 1–14 «Сборника задач по дифференциальным уравнениям» В. Ф. Филиппова, вы знаете достаточно.

В третьей нужно произвести какие-либо вычисления (чаще всего усреднение) с геометрическими объектами в двух или трех измерениях. Эта задача не проверяет знание определённых стандартных техник; обычно её можно решить многими способами, сильно различающимися по трудоёмкости. Если ваша дисциплина выкладок достаточна, чтобы вычислить все громоздкие интегралы из первых принципов — замечательно. Если вы нашли способ применить производящие функции (сферическую тригонометрию, формулу Вика, симметрические многочлены, формулы включения-исключения из теории вероятности и т.п.) и справились в десять строк – ещё лучше. Как способ подготовки здесь можно посоветовать только самостоятельно придумать и попытаться решить возможно больше задач, аналогичных приведенной ниже в образце экзамена. Что получится, если считать средний объём вместо среднеквадратичного? А если выбирать точки не на сфере, а внутри куба? Внутри тетраэдра? Заменить объём на периметр? Как обобщить задачу на случай более чем четырёх случайных точек?

В работе современного теоретика нетривиальные неопределённые интегралы, берущиеся в элементарных функциях, возникают нечасто и вычисляются отнюдь не на бумаге. Фактически экзамен проверяет умение проводить выкладки средней сложности быстро и точно, а также общую «нажитанность» (делает ли эта замена переменной уравнение лучше или хуже?)

Формат теоретического минимума исчерпывающе описан Б. Л. Иоффе в «Без ретуши»:

Экзамен проходил следующим образом. Студент звонил Ландау и говорил, что он хотел бы сдать такой-то курс (порядок сдачи курсов был более или менее произвольным). «Хорошо, приезжайте тогда-то». Пришедший должен был оставить в прихожей все книги, записи и т.д. Затем Ландау приглашал его в маленькую комнату на втором этаже, где был круглый стол с несколькими листами чистой бумаги, стул и ничего более. Ландау формулировал задачу и уходил, но каждые 15-20 минут заходил и смотрел через плечо сдающего, что сделано. Если он молчал, это было хорошим признаком, но иногда он говорил «хм» — и это было дурным знаком.

Ответ на любой вопрос по регламенту (Есть ли дистанционные варианты сдачи? Разрешено ли пользоваться конспектами?) легко получить, просто перечитав эту цитату. Может также оказаться интересным найти её продолжение в первоисточнике.

В случае неудачи экзамен можно повторить через неделю. В случае повторной неудачи — через полгода.

Примеры задач

1. Вычислите

$$\int \frac{\sin^4 x}{\sin^6 x + 1} dx.$$

2. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + e^y = 0$$

на полуоси $x > 0$.

3. Выберем на единичной сфере в трёх измерениях четыре случайные точки A, B, C, D (равномерно по площади и независимо друг от друга). Пусть V_{ABCD} — объём тетраэдра с вершинами в этих точках. Найдите среднее значение $\langle (V_{ABCD})^2 \rangle^{1/2}$.