

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра „Проблемы теоретической физики“

**ДЕФАЗИРОВКА ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КУБИТОВ
НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ШУМА $1/f$ ВБЛИЗИ
ОПТИМАЛЬНЫХ ТОЧЕК**

Выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра студента
128 группы Сызранова С.В.

Научный руководитель
д.ф.м.н. Махлин Ю.Г.

Москва
2005

Содержание

1	Введение	3
2	Дефазировка, создаваемая одной случайной величиной в окрестности оптимальной точки	4
2.1	Постановка задачи о потере когерентности вблизи оптимальной точки	4
2.2	Представление дефазировки в виде функционального интеграла	5
2.3	Соотношения масштабной инвариантности для дефазировки	6
2.4	Решение задачи о дефазировке вблизи оптимальной точки	7
3	Потеря когерентности, связанная с несколькими флуктуирующими параметрами вблизи оптимальных точек	9
3.1	Перекрестные члены в гамильтониане возмущения	9
3.2	Случай одинаковых спектров	10
3.3	Случай разных частот инфракрасного обрезания	11
4	Заключение	12

1 Введение

Сверхпроводящие электрические нанопеи с джозефсоновскими переходами являются перспективными кандидатами для создания на их основе кубитов- двух-уровневых квантовых систем [1, 2]. Конструкции джозефсоновских кубитов весьма разнообразны [1, 2, 3]: в одних состояния различаются по количеству избыточных куперовских пар на сверхпроводящем острове [4] (зарядовые кубиты), в других- по значениям магнитного потока в петлях из нескольких джозефсоновских переходов [5] (потокосые кубиты), в третьих- по токам в переходах [6] (фазовые кубиты), а в некоторых реализуются промежуточные случаи [7, 8], когда состояния не близки к собственным функциям каких-либо макроскопических степеней свободы типа заряда, тока или магнитного потока.

Во всех существующих конструкциях джозефсоновских кубитов приготовленные квантовые состояния теряют когерентность из-за всевозможных источников шума, которыми могут быть флуктуирующие фоновые заряды [9], критические токи джозефсоновских переходов [10] и магнитные потоки [11]. Времена дефазировки существующих кубитов достигают нескольких микросекунд [7, 11], а добротность (количество когерентных осцилляций за время дефазировки)- порядка 10^4 .

Такие малые времена потери когерентности кубитов не позволяют их использовать для реализации квантовых алгоритмов обработки и передачи информации [12]. Однако, большое количество когерентных осцилляций состояний за время дефазировки дает возможность изучать законы спада вероятности измерения конкретного состояния системы после его приготовления [13] и судить по этим законам о природе и спектрах шумов, создающих дефазировку. Измерения спектров показали важность для дефазировки низкочастотного шума, и, особенно, шума $1/f$, при всех видах флуктуирующих параметров [9, 10, 11, 14].

Важный шаг на пути повышения времени дефазировки был сделан в работе [7], где к зарядово-фазовому гибриду („Квантронии“) была применена т.н. „стратегия оптимальной точки“: параметры цепи были подобраны так, что производные разности энергий уровней по флуктуациям этих параметров оказались равными нулю. В результате кубит получился более устойчивым к шуму, и когерентность была повышена на 2-3 порядка по сравнению с ранее существовавшими сверхпроводящими кубитами. Позднее стратегия оптимальной точки была применена для уменьшения чувствительности потокосого кубита к флуктуациям тока [11]. Фактически, она применяется и во всех потокосых кубитах в отношении флуктуаций магнитного потока.

Возникает, таким образом, потребность в теоретическом описании потери когерентности двухуровневой системы из-за обладающего данным спектром источника шума, возмущающего систему в оптимальных и неоптимальных точках. Динамика двухуровневой системы с возмущением разности энергий уровней, пропорциональным гауссовой случайной величине, может быть точно описана при произвольном спектре случайной величины [15]. Однако, в оптимальных точках флуктуации параметров кубита возмущают его гамильтониан квадратично. Точные выражения для дефазировки благодаря такому возмущению найдены лишь в случаях лоренцевского спектра флуктуирующего параметра [16], в случае статической случайной величине

ны, и в длинновременном приближении [17, 16]. Для шума $1/f$ дефазировка получена аналитически в коротковременной и длинновременной асимптотиках [17], а также численно на любых временах [18, 19].

В настоящей работе дефазировка вблизи оптимальной точки, т.е. обусловленная возмущением в виде произвольного квадратичного трехчлена по случайной величине, обладающей спектром $1/f$, сведена к дефазировке в оптимальной точке и вычислена в коротковременном и длинновременном приближениях. Случайная величина предполагается гауссовой и рассматривается как классическая переменная. Рассмотрена также задача о дефазировке 2-уровневой системы несколькими гауссовыми случайными величинами со спектром $1/f$ вблизи оптимальных точек: такая дефазировка выражена через несколько дефазировок, создаваемых одной случайной величиной. Рассмотрены различные случаи конструкций джозефсоновских кубитов с несколькими флуктуирующими параметрами, когда в возмущении гамильтониана есть перекрестные члены.

2 Дефазировка, создаваемая одной случайной величиной в окрестности оптимальной точки

2.1 Постановка задачи о потере когерентности вблизи оптимальной точки

Двухуровневую систему, подвергающуюся дефазировке, можно описывать гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \\ \hat{H}_0 &= -\frac{1}{2}\varepsilon\hat{\sigma}_z, \quad \hat{H}_{int} = -\frac{1}{2}V\hat{\sigma}_z - \frac{1}{2}U\hat{\sigma}_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где V и U - так называемые продольные и поперечные возмущения, зависящие от случайной величины X , ε - разность энергий уровней системы в отсутствие возмущения.

Дефазировку принято характеризовать величинами

$$\langle \hat{\sigma}_{\pm}(t) \rangle \equiv Tr(\hat{\sigma}_{\pm}\hat{\rho}(t)) = \langle \hat{\sigma}_{\pm}(0) \rangle \langle e^{\mp i \int_{-\infty}^t \Delta\varepsilon(X(t))dt} \rangle e^{\mp it\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\Delta\varepsilon(X(t))$ - приращение расщепления уровней системы, вызванное тем, что случайная величина имеет значение $X(t)$. Множитель $\langle e^{\mp it\varepsilon} \rangle$ описывает так называемые когерентные осцилляции. Множитель $\langle e^{\mp i \int_{-\infty}^t \Delta\varepsilon(X(t))dt} \rangle$, монотонно спадающая от 1 при $t = 0$ до 0 при $t = \infty$ функция, характеризует потерю когерентности.

Для описания дефазировки достаточно среднего от только одного из этих операторов, например, $\hat{\sigma}_-$. Поэтому введем величину $P(t) = \langle e^{i \int_{-\infty}^t \Delta\varepsilon(X(t))dt} \rangle$, которую и будем далее называть дефазировкой (так что $\langle \hat{\sigma}_-(t) \rangle = P(t) \langle \hat{\sigma}_-(0) \rangle e^{it\varepsilon}$).

Для заданной зависимости $\Delta\varepsilon(X(t))$ и при условии гауссовости, дефазировка полностью определяется спектром случайной величины X или ее корреляционной

функцией. Спектр шума $1/f$ имеет вид

$$S_X(\omega) = \frac{X_f^2}{|\omega|}, \quad \omega_{ir} < \omega < \omega_{uv}, \quad (3)$$

где ω_{ir} и ω_{uv} - частоты инфракрасного и ультрафиолетового обрезания.

Для возмущения $\Delta \varepsilon(X) = \lambda X^2$ дефазировку $P(t) = F(\Gamma, t)$, где $\Gamma = \lambda X_f^2$, будем считать известной функцией. Действительно, как будет показано дальше, если частота инфракрасного обрезания ω_{ir} известна хотя бы по порядку величины, $F(\Gamma, t)$ с хорошей точностью можно считать универсальной функцией аргумента Γt , и для ее определения использовать, например, результаты численных расчетов. Аналитически она известна в коротковременном и длинновременном приближениях [17]

$$F(\Gamma, t) = \left(1 - \left(\frac{2}{\pi} it \Gamma \ln \frac{1}{\omega_{ir} t} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \Gamma t \ll 1 \quad (4)$$

$$= e^{-\frac{\Gamma t}{2}}, \quad \Gamma t \gg 1. \quad (5)$$

Таким образом, задача о связи дефазировки вблизи оптимальной точки и непосредственно в ней есть задача о выражении функции $P(t)$ для возмущения вида $\Delta \varepsilon = \lambda(X + \frac{P}{2})^2$ через $F(\Gamma, t)$.

2.2 Представление дефазировки в виде функционального интеграла

Дефазировка может быть записана в виде функционального интеграла и точно вычислена в случае, если флуктуирующая величина имеет лоренцевский спектр [16]. Если разложить случайную величину с произвольным спектром на множество лоренцевских величин, то можно, по крайней мере, представить дефазировку, создаваемую этой величиной, в виде многомерного функционального интеграла. Получим это представление, повторяя, по сути, вычисления, проведенные в [16] для одного лоренцевского источника шума.

Пусть ϕ_i , $i = \overline{1, n}$ - лоренцевские случайные величины (далее будем называть их элементарными), образующие случайную величину $X(t)$ ¹, Φ - вектор, составленный из величин ϕ_i , $\Psi(\tau)$ - их корреляционная матрица:

$$\Psi(\tau) = \overline{\Phi(t)\Phi^T(t+\tau)} \equiv \overline{\Phi(t+\tau)\Phi^T(t)}$$

Так как $X(t)$ - гауссова случайная величина, плотность вероятности для вектора $\Phi(t)$ имеет вид

$$p(\Phi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Psi(0)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Phi^T\Psi^{-1}(0)\Phi\right). \quad (6)$$

¹Здесь не подразумевается, что элементарные источники шума совпадают с какими-либо реальными двухуровневыми системами, создающими низкочастотный шум [20, 21].

Плотность вероятности для вектора Φ в момент времени $t + \tau$ при условии, что в момент времени t он имел значение Φ' -

$$p(\Phi, t + \tau | \Phi', t) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\Phi - \Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)\Phi')^T A(\Phi - \Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)\Phi')\right), \quad (7)$$

где $A = (\Psi(0) - \Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)\Psi(\tau))^{-1}$.

Вероятность реализации конкретной траектории $\Phi(t)$ на отрезке времени от 0 до t равна $p(\Phi_0)p(\Phi_1, \delta t_1 | \Phi_0, 0)p(\Phi_2, \delta t_1 + \delta t_2 | \Phi_1, \delta t_1) \dots p(\Phi(t))$. Для получения дефазировки это нужно проинтегрировать по амплитудам элементарных источников в промежуточные, а также начальный и конечный, моменты времени вместе с соответствующими набегами фазы.

Получим

$$P(t) = \int e^{-\int (\frac{1}{4}\dot{\Phi}^T(\Psi_0')^{-1}\dot{\Phi} + \Phi^T(\frac{1}{4}\Psi_0'^{-1}\Psi_0'\Psi_0'^{-1})\Phi - i\Delta\varepsilon(\Phi))dt} e^{-\frac{1}{4}(\Phi_1^T\Psi_0'^{-1}\Phi_1 + \Phi_2^T\Psi_0'^{-1}\Phi_2)} d\Phi_1 d\Phi_2 \mathcal{D}\Phi. \quad (8)$$

Индекс 0 у матриц Ψ в последнем выражении означает, что они берутся при нулевом значении аргумента, Ψ' - матрица производных от элементов Ψ .

2.3 Соотношения масштабной инвариантности для дефазировки

Из размерностей величин Γ , t и ω_{ir} следует, что

$$F\left(\frac{\Gamma}{C}, Ct, \frac{\omega_{ir}}{C}\right) = F(\Gamma, t, \omega_{ir}) \quad (9)$$

для произвольного числа C . Это соотношение следует также из инвариантности интеграла (8) относительно растяжения Γ и t и сжатия ω_{ir} в определенное число раз. Третий аргумент в функции F здесь- частота инфракрасного обрезания.

В экспериментах с электрическими наноцепями на характерных временах потери когерентности всегда выполняется условие $\omega_{ir}t \ll 1$. Поэтому можно пренебречь изменением корреляционной функции $K(\tau) = \frac{X_f^2}{\pi} \ln \frac{1}{\omega_{ir}\tau}$ при изменении t в несколько раз, и написать для $1/f$ шума

$$F\left(\frac{\Gamma}{C}, Ct\right) \equiv F(\Gamma, t). \quad (10)$$

Такому соотношению удовлетворяет произвольная функция аргумента Γt . В этом смысле дефазировка в оптимальной точке, создаваемая шумом $1/f$, является универсальной функцией аргумента Γt , если пренебречь зависимостью F от частоты ω_{ir} , стоящей под логарифмом в корреляционной функции. Для нахождения дефазировки в окрестности оптимальной точки этой точности будет недостаточно,- понадобится зависимость дефазировки в оптимальной точке от частоты инфракрасного обрезания, которая будет найдена в разделе 2.4.

2.4 Решение задачи о дефазировке вблизи оптимальной точки

Чтобы найти дефазировку, создаваемую возмущением $\Delta \varepsilon = \lambda(X + \frac{D}{2})^2$, где X - гауссовая случайная величина со спектром $1/f$, нужно вычислить интеграл (8) для

$$\Delta \varepsilon(\Phi) = \lambda(\Phi + \frac{D}{2}h)^T(\Phi + \frac{D}{2}h),$$

где h - единичный столбец, $\frac{D}{2}$ - отклонение среднего значения флуктуирующего параметра от оптимальной точки. Если сделать сдвиг переменных $\Phi' = \Phi + \frac{D}{2}h$ и взять сначала интеграл по траекториям, останется гауссовый интеграл типа

$$\int e^{-Y^T AY + D(\xi^T Y + Y^T \xi) + cD^2} dY,$$

откуда следует зависимость дефазировка от D

$$P(t) = F(\Gamma, t)e^{-\lambda D^2 f(t)}, \quad (11)$$

где $F(\Gamma, t)$ - дефазировка в оптимальной точке, а $f(t)$ - функция, не зависящая от D (множитель λ в экспоненте введен просто для удобства).

Перед изучением дефазировки, добавляемой линейным членом, решим сначала вспомогательную задачу; найдем дефазировку из-за возмущения $(X + \frac{A}{2})^2$, где A - статическая гауссовая случайная величина с дисперсией σ_A^2 . Для этого надо усреднить по Гауссу $e^{-\lambda A^2 f(t)}$. На временах $t \ll \frac{1}{\omega_{ir}}$ кубит не может отличить статическую случайную величину от низкочастотных составляющих шума, которые тоже почти статические, поэтому дефазировка будет почти такая же, как от шума $1/f$, но с перенормированной частотой инфракрасного обрезания. Новая эффективная частота обрезания- $\omega'_{ir} = \omega_{ir} e^{-\frac{\pi\lambda}{4\Gamma}\sigma_A^2}$ (из условия равенства дисперсий $\lambda\frac{\sigma_A^2}{4} + \frac{\Gamma}{\pi}|\ln(t\omega_{ir})| = \frac{\Gamma}{\pi}|\ln(t\omega'_{ir})|$). Имеем, таким образом,

$$F(\Gamma, t, \omega_{ir} e^{-\frac{\pi\lambda}{4\Gamma}\sigma_A^2}) = \frac{F(\Gamma, t, \omega_{ir})}{(1 + 2\lambda\sigma_A^2 f(t))^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

(Третий аргумент F , указанный здесь,- частота инфракрасного обрезания. Далее указывать его не будем, если эта частота подразумевается равной исходной ω_{ir} .)

Изменение инфракрасной частоты спектра $1/f$ эквивалентно растяжению спектра в определенное число раз. По ранее найденному соотношению масштабной инвариантности (9), левая часть в последней формуле есть $F(\Gamma \exp(\frac{\pi\lambda}{4\Gamma}\sigma_A^2), t \exp(-\frac{\pi\lambda}{4\Gamma}\sigma_A^2))$. Подставляя это в последнее равенство, дифференцируя его по σ_A^2 при $\sigma_A = 0$, найдем

$$f(t) = \frac{\pi}{4\Gamma} \frac{\partial \ln F}{\partial \ln \omega_{ir}} = \frac{\pi}{4\Gamma} \left(\frac{\partial \ln F}{\partial \ln t} - \frac{\partial \ln F}{\partial \ln \Gamma} \right). \quad (13)$$

Если считать $F(\Gamma, t)$ известной функцией, то задача о дефазировке вблизи оптимальной точки, таким образом, решена ². Ответ для дефазировки-

$$P(t) = F(\Gamma, t) \exp \left(-\frac{\pi \lambda D^2}{4 \Gamma} \left(\frac{\partial \ln F}{\partial \ln t} - \frac{\partial \ln F}{\partial \ln \Gamma} \right) \right). \quad (14)$$

²Заметим, что, хотя в (13) функция $f(t)$ выражена через производные от F , для нахождения $f(t)$ из (12) достаточно знать $F(\Gamma, t)$ всего при двух значениях Γ .

Показатель экспоненты в последней формуле можно найти явно в коротковременном и длинновременном приближениях. Используя (4), получим для $\Gamma t \ll 1$

$$f(t) = \frac{it}{4} \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} it \Gamma \ln \frac{1}{t\omega_{ir}}}, \quad (15)$$

$$|P(t)| = \left(1 + \left(\frac{2}{\pi} \Gamma t \ln \frac{1}{\omega_{ir} t} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-D^2 \frac{\frac{\Gamma \lambda}{2\pi} t^2 |\ln(t\omega_{ir})|}{1 + \left(\frac{2}{\pi} \Gamma t \ln(t\omega_{ir}) \right)^2}} = \quad (16)$$

$$= |F(\Gamma, t)| e^{-D^2 |F(\Gamma, t)|^2 \frac{\Gamma}{2\pi} t^2 \ln \frac{1}{t\omega_{ir}}}. \quad (17)$$

Точности (5) не достаточно для того, чтобы на больших временах описать разницу между дефазировкой вблизи оптимальной точки и дефазировкой в оптимальной точке; согласно (13), $f(t)=0$, если F считать функцией только аргумента Γt . Как показано в [17], при достаточно большой частоте ультрафиолетового обрезания $\omega_{uv} \gg \frac{1}{t}$, $|P(t)|$ не зависит от этой частоты. Тогда единственная остающаяся величина, имеющая размерность обратного времени, - это частота инфракрасного обрезания. Значит, для нахождения явного вида дефазировки на больших временах нужно учесть зависимость $f(t)$ от частоты инфракрасного обрезания.

Разделим спектр флуктуирующей величины X на две части: на частоты меньше некоторой $\omega_n \sim \frac{\alpha}{t}$, где $\alpha \ll 1$, $\ln \frac{\alpha}{\omega_{ir} t} \gg 1$, и больше нее. Первую часть объявим статической, и по формуле (12) получим

$$F(\Gamma, t, \omega_{ir}) = \frac{F(\Gamma, t, \sim \frac{\alpha}{t})}{\left(1 + \frac{8}{\pi} \Gamma \tilde{f}(t) \ln \frac{1}{\omega_{ir} t} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (18)$$

Здесь $\tilde{f}(t)$ - функция, определенная как и в (11), но для шума $1/f$ с частотой инфракрасного обрезания $\sim \frac{\alpha}{t}$. Так как нас теперь интересуют времена $\Gamma t \gtrsim 1$, используя (15), можно сделать по порядку величины оценку $\tilde{f}(t) \gtrsim \frac{1}{\Gamma |\ln \alpha|}$, и заключить отсюда, что при $\ln(\frac{1}{\omega_{ir} t}) \gg 1$ в знаменателе (18) можно пренебречь 1 по сравнению с другим слагаемым. Если после этого применить (13) к выражению (15), учитывая, что входящие в него функции F и \tilde{f} зависят не зависят от аргумента ω_{ir} , получится

$$f(t) = \frac{\pi}{8\Gamma |\ln(t\omega_{ir})|}. \quad (19)$$

Это выражение совпадает со стоящим в показателе экспоненты (16) в рамках сделанных предположений. Поэтому можно обобщить найденные коротковременной и длинновременной результаты и написать

$$|P(t)| = |F(\Gamma, t)| e^{-D^2 \frac{\frac{\Gamma \lambda}{2\pi} t^2 |\ln(t\omega_{ir})|}{1 + \left(\frac{2}{\pi} \Gamma t \ln(t\omega_{ir}) \right)^2}}, \quad |\ln(t\omega_{ir})| \gg 1. \quad (20)$$

3 Потеря когерентности, связанная с несколькими флуктуирующими параметрами вблизи оптимальных точек

3.1 Перекрестные члены в гамильтониане возмущения

Рассмотрим дефазировку кубита, создаваемую несколькими независимыми флуктуирующими параметрами вблизи оптимальных точек. Если флуктуирующие параметры находятся в оптимальных точках, то производные $\Delta \varepsilon$ по этим параметрам равны нулю, и, значит, при малых значениях флуктуаций, $\Delta \varepsilon$ есть квадратичная форма по флуктуациям. Понятно, что если квадратичная форма диагональна, то дефазировка является просто произведением дефазировок, создаваемых отдельными источниками шума.

Не представляет интереса также случай, когда возмущение есть полный квадрат суммы нескольких случайных величин с одинаковыми спектрами. Одинаковыми можно считать спектры источников шума $1/f$ с одинаковыми частотами инфракрасного обрезания. Дефазировка суммы источников с разными ω_{ir} эквивалентна дефазировке суммы одинаковых источников шума $1/f$ (см. раздел 3.3).

Поэтому сейчас нас будут интересовать только такие возмущения, которые вблизи оптимальных точек не сводятся к двум выше упомянутым. Подобные оптимальные точки (типа $X^2 + 2cXY + Y^2$, где $c \neq 0, \pm 1$) будем называть оптимальными точками общего вида.

Существуют ли кубиты с оптимальными точками общего вида?

Можно доказать, что квантовая цепь, состоящая из конденсаторов, индуктивностей, джозефсоновских контактов и источников постоянного напряжения, задающих потенциалы некоторых точек цепи, имеет возмущение гамильтониана вида $\hat{V} = \sum_i f_i(X_i)\hat{D}_i$, если она не содержит петель из трех или более джозефсоновских контактов. Здесь X_i - флуктуирующие параметры, $f_i(X_i)$ - некоторые функции, \hat{D}_i - операторы, действующие на переменные цепи и не зависящие от X_i . Если такая цепь не содержит источников постоянного напряжения, либо содержит, но напряжения этих источников находятся в оптимальных точках, то из сделанного утверждения следует, что волновые функции системы могут быть выбраны вещественными, и оптимальной точки общего вида у нее быть не может.

Примером кубита с оптимальной точкой общего вида является потоковый кубит, описанный в [22]. Он представляет собой систему из двух одинаковых контактов, соединенных последовательно со СКВИДом. Обе получившиеся петли пронизываются магнитными потоками, которые могут флуктуировать. От обычного потокового кубита, представляющего собой петлю из трех переходов, он отличается лишь тем, что один из переходов потокового кубита заменен на СКВИД. Состояния в нем, как и в обычном потоковом кубите, представляют собой симметричную и антисимметричную комбинации двух состояний циркулирующих в петле в определенном направлении токов.

Суммарная энергия джозефсоновских контактов в описанной конструкции есть

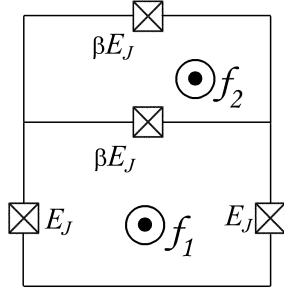


Рис. 1. Поточковый кубит, имеющий оптимальную точку общего вида.

[23]:

$$U = -E_J \left(\cos \phi_1 + \cos \phi_2 - 2\beta \cos(\pi f_2) \cos(\phi_1 - \phi_2 + 2\pi(f_1 + \frac{f_2}{2})) \right), \quad (21)$$

где f_1 и f_2 - приведенные потоки в петлях, β - отношение крит. токов переходов в СКВИДе и не в СКВИДе.

Такой кубит имеет оптимальную точку ³ общего вида при ⁴ $f_1 = \frac{1}{2}$, $f_2 = 0$. Приращение энергии из-за флуктуаций потоков δf_1 и δf_2 имеет вид

$$\Delta \varepsilon = a(\delta f_2)^2 + b(\delta f_1 + \frac{1}{2}\delta f_2)^2. \quad (22)$$

3.2 Случай одинаковых спектров

Рассмотрим оптимальную точку общего вида у кубита с двумя флуктуирующими параметрами, обладающими одинаковыми спектрами флуктуаций (не обязательно $1/f$). Предположим, обе случайные величины отнормированы так, что их вклад в расщепление уровней можно написать как $\Delta \varepsilon = X^2 + 2cXY + Y^2$. Т.к. спектры имеют одинаковый вид $\alpha S_X(\omega) = S_Y(\omega)$.

Попробуем при помощи линейной замены вида

$$\begin{cases} \tilde{X} = X + kY \\ \tilde{Y} = k'X + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\tilde{X} - k\tilde{Y}}{1 - kk'} \\ Y = \frac{-k'\tilde{X} + \tilde{Y}}{1 - kk'} \end{cases} \quad (23)$$

перейти к новым двум независимым флуктуирующим величинам \tilde{X} и \tilde{Y} , которые будут диагонализировать матрицу возмущения.

Независимость новых переменных означает, что

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}(t)\tilde{Y}(t + \tau) \rangle &= \langle (kX(t) + Y(t))(X(t + \tau) + k'Y(t + \tau)) \rangle = \\ &= \int (kS_X(\omega) + k'S_Y(\omega))e^{i\omega\tau} d\omega \equiv 0, \end{aligned} \quad (24)$$

³Этим множество оптимальных точек описанного кубита не исчерпывается. Еще одну точку, тоже общего вида, не с полуцелым f_1 и $f_1 + \frac{f_2}{2} = \frac{1}{2}$, можно найти, если учесть в гамильтониане кубита кулоновскую энергию зарядов на джозефсоновских контактах.

⁴В работе [22] использовались неоптимальные значения $f_1 = f_2 = \frac{1}{3}$. При этом, как и в рассматриваемом случае, $f_1 + \frac{f_2}{2} = \frac{1}{2}$, но лучше контролируется расщепление уровней [23].

и приводит к требованию $k' = -\alpha k$.

Подставив (23) в квадратичную форму возмущения, придем к условию ее диагонализации

$$-k - k' + c(1 + kk') = 0 \quad (25)$$

Таким образом, введенные величины удовлетворяют всем нужным требованиям при

$$k = \frac{1}{2c\alpha}(\alpha - 1 \pm ((1 - \alpha)^2 + 4\alpha c^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (26)$$

Как и следовало ожидать, решений два- они отличаются друг от друга перестановкой \tilde{X} и \tilde{Y} . Дефазировка кубита будет описываться выражением

$$P(t) = F(K_1 S_Y(\omega), t) F(K_2 S_X(\omega), t), \quad (27)$$

где K_1 и K_2 - константы

$$K_1 = \frac{1 + \alpha^2 k^2 + 2\alpha ck}{\alpha(1 + \alpha k^2)} \quad (28)$$

$$K_2 = \frac{1 + k^2 - 2ck}{\alpha(1 + \alpha k^2)} \quad (29)$$

Если флуктуирующих параметров больше двух, то, диагонализуя аналогичным образом квадратичные формы возмущения и корреляционную матрицы параметров, можно таким же образом представить дефазировку в виде произведения дефазировок отдельных случайных величин с такого же вида спектром.

Аналогичным образом следует поступить и если параметры системы находятся не в оптимальных точках, а в близи оптимальных точек; диагонализировать квадратичную форму, а линейную часть выразить через новые переменные.

3.3 Случай разных частот инфракрасного обрезания

Дефазировка может создаваться и набором источников шума $1/f$ с разными частотами инфракрасного обрезания. В этом случае следует разделить спектр каждой случайной величины на низкочастотную часть, от самой большой частоты инфракрасного обрезания до частоты инфракрасного обрезания данной величины, и остальную часть спектра. Тогда можно объявить статическими все низкочастотные части и сначала найти как в предыдущем разделе дефазировку, создаваемую одинаковыми высокочастотными отрезками спектров, а потом усреднить получившийся результат по статическим величинам, как это делалось в разделе 2.4. После первой операции останется произведение дефазировки в оптимальной точке на серию множителей типа $e^{-(D+\tilde{D})^2 f(t) - \alpha \tilde{D}^2}$, где D и α - постоянные коэффициенты, \tilde{D} - статическая случайная величина. Усредняя их по \tilde{D} , получим множители $e^{-D^2 \frac{2\sigma^2 \alpha + 1}{2\sigma^2(\alpha + f(t)) + 1} \frac{1}{(1 + 2\sigma^2(\alpha + f(t)))^{\frac{1}{2}}}}$, где σ^2 - дисперсия \tilde{D} , $f(t)$ - введенная в (11) функция.

Покажем также, что в случае, когда возмущение гамильтониана выражено через линейную комбинацию случайных величин со спектром $1/f$ и разными частотами инфракрасного обрезания, эта линейная комбинация может быть заменена на одну величину со спектром $1/f$. Будем рассматривать случай двух величин и возмущения $\Delta \varepsilon$, отнормированных так, что $\Delta \varepsilon = (X + Y)^2$. Пусть $\omega_X > \omega_Y$ - их частоты инфракрасного обрезания.

Разделим спектр величины Y на участок от ω_Y до ω_X и от ω_X и дальше. Первый будем считать статическим, как в разделе 2.4, а второй сложим с обладающей таким же спектром величиной X . Получим сумму источника $1/f$ и статической случайной величины, добавление которой, как было показано, приводит к перенормировке частоты инфракрасного обрезания спектра $1/f$. Если ω_0 есть новая частота, то, из условия равенства дисперсий,

$$\frac{X_f^2 + Y_f^2}{\pi} \ln \frac{1}{\omega_X t} + \frac{X_f^2}{\pi} \ln \frac{\omega_X}{\omega_Y} = \frac{X_f^2 + Y_f^2}{\pi} \ln \frac{1}{\omega_0 t}, \quad (30)$$

откуда

$$\omega_0 = \omega_X^{\frac{Y_f^2}{X_f^2 + Y_f^2}} \omega_Y^{\frac{X_f^2}{X_f^2 + Y_f^2}}. \quad (31)$$

Таким образом, при сложении двух источников шума $1/f$ получается новый источник со спектром $S(\omega) = \frac{X_f^2 + Y_f^2}{|\omega|}$ и новой частотой инфракрасного обрезания, даваемой формулой (31).

4 Заключение

В настоящей работе рассмотрена дефазировка двухуровневой системы, создаваемая несколькими классическими гауссовыми источниками шума $1/f$, линейно-квадратично возмущающими разницу энергий уровней системы.

Дефазировка, создаваемая одним источником, выражена через дефазировку в оптимальной точке, т.е. которую создавало бы только квадратичное возмущение, (11), (13). В коротковременном и длинновременном приближениях дефазировка вычислена явно (20).

Приведен пример кубита, в котором возмущение гамильтониана содержит перекрестный по флуктуирующим параметрам член.

В случае нескольких источников шума дефазировка путем одновременной диагонализации корреляционной матрицы и квадратичной матрицы возмущения сводится к дефазировкам, которые создавали бы линейные комбинации амплитуд источников шума. Показано, что линейная комбинация источников шума $1/f$ с разными частотами инфракрасного обрезания эквивалентна одному источнику шума $1/f$.

Список литературы

- [1] M. Devoret and J. M. Martinis, “Implementing qubits with superconducting integrated circuits,” *Quant. Inf. Proc.*, vol. 3, p. 163, 2004.
- [2] D. Esteve and D. Vion, “Solid state quantum bit circuits.” arXiv: cond-mat/0505676.
- [3] Y. Makhlin, G. Schon, and A. Shnirman, “Quantum-state engineering with Josephson-junction devices,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 73, p. 357, 2001.
- [4] Y. Nakamura, Y. Pashkin, and J. Tsai, “Coherent control of macroscopic quantum states in a single Cooper-pair box,” *Nature*, vol. 398, p. 786, 1999.
- [5] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. Harmans, and J. Mooij, “Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit,” *Science*, vol. 299, p. 5614, 2003.
- [6] J. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, “Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 117901, 2002.
- [7] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M. Devoret, “Manipulating the quantum state of an electrical circuits,” *Science*, vol. 296, p. 886, 2002.
- [8] M. Feigel’man, L. Ioffe, V. Geshkenbein, P. Dayal, and G. Blatter, “Superconducting tetrahedral quantum bits: Emulation of a noise-resistant spin-1/2 system,” *Phys. Rev. B*, vol. 70, p. 224524, 2004.
- [9] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, T. Yamamoto, and J. Tsai, “Charge echo in a Cooper-pair box,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, pp. 047901–1, 2002.
- [10] D. V. Harlingen, T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt, T. Crane, and J. Clarke, “Decoherence in Josephson qubits due to critical-current fluctuations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 064517–1, 2004.
- [11] P. Bertet, I. Chiorescu, G. Burkard, K. Semba, C. Harmans, and J. M. D.P. DiVincenzo, “Relaxation and dephasing in a flux qubit.” arXiv:cond-mat/0412485.
- [12] J. Preskill, *Introduction to quantum computation and information*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [13] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M. Devoret, “Rabi oscillations, Ramsey fringes, and spin echos in an electrical circuit,” *Fortschritte der Physik*, vol. 51, p. 462, 2003. arXiv: cond-mat/0209315.
- [14] O. Astafiev, Y. Pashkin, Y. Nakamura, T. Yamamoto, and J. Tsai, “Quantum noise in Josephson charge qubit.” arXiv:cond-mat/0411216.

- [15] Y. Makhlin, G. Schon, and A. Shnirman, “Dissipation in Josephson qubits,” in *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards Nanoscience)*, pp. 197–224, Springer, 2003.
- [16] K. Rabenstein, V. Sverdlov, and D. Averin, “Qubit decoherence by Gaussian low-frequency noise,” *JETP Lett.*, vol. 79, pp. 783–786, 2004.
- [17] Y. Makhlin and A. Shnirman, “Dephasing of solid state qubits at optimal points,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 178301, 2004.
- [18] E. Paladino, A. Mastellone, A. D’Arrigo, and G. Falci, “Decoherence due to telegraph and 1/f noise in Josephson qubits.” arXiv:cond-mat/0407484.
- [19] G. Falci, A. D’Arrigo, A. Mastellone, and E. Paladino, “Initial decoherence in solid state qubits.” arXiv:cond-mat/0409522.
- [20] P. Dutta and P. Horn, “Low-frequency fluctuations in solids,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 53, pp. 497–516, 1981.
- [21] M. Weissman, “1/f noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 60, no. 2, p. 537, 1988.
- [22] J. Mooij, T. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. van der Wal, and S. Lloyd, “Josephson persistent-current qubit,” *Science*, vol. 285, p. 1036, 1999.
- [23] T. Orlando, J. Mooij, L. Tian, C. H., van der Wal, L. Levitov, S. Lloyd, and J. Mazo, “Superconducting persistent-current qubit,” *Phys. Rev. B*, vol. 60, p. 15398, 1999.