Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный Университет)

Диссертационная работа на степень бакалавра

Эффект Джозефсона в SNS-структурах при низких температурах

Студент 328 гр. Тихонов К.С.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Фейгельман М.В.

Москва, 2007г.

Содержание

1 Введение

В 1962 году Джозефсон предсказал, что туннельный переход, помимо туннельного квазичастичного тока должен пропускать еще и сверхток при нулевом напряжении из-за тунелирования сконденсированных пар. Он показал, что величина такого тока определяется разностью фаз волновых функций куперовской пары по разные стороны барьера, причем максимальное значение сверхтока для случая одинаковых сверхпроводников составляет $j_c = \frac{\pi}{2eR}\Delta th(\frac{\Delta}{2T})$ Кроме того, он показал, что, при поддержании на переходе постоянной разности потенциалов V, ток будет переменным с частотой $\nu = 2eV/\hbar$. Позднее выяснилось, что аналогичный эффект наблюдается также в разнообразных типах "слабых связей"в сверхпроводящей цепи, а не только при наличии туннельного барьера. Слабой связью может служить, например, короткое сужение в поперечном сечении сверхпроводника, точечный контакт между сверхпроводниками или слой нормального металла, а не диэлектрика, как в туннельном переходе. В дельнейшем мы будем рассматривать эффект Джозефсона в SNS-структурах. Существование эффекта Джозефсона в таких структурах связано с эффектом близости - проникновением сверхпроводящих кореляций из области сверхпроводящего металла в область нормального на длины, которые могут стать довольно большими при низких температурах. Одно из важных следствий этого - способность нормального металла ($\Delta = 0$) в таком состоянии переносить сверхток. Микроскопический механизм переноса тока зависит от ряда деталей. Существенным является режим распространения электронов в нормальной прослойке - диффузный или баллистический (определяется соотношением длины свободного пробега l и длины нормальной области L). В баллистическом случае образуются Андреевские состояния. Однако чаще всего транспорт бывает диффузным и траектории электронов определены плохо. В этом случае, в зависимости от длины L максимальный сверхток I_c может определяться либо сверхпроводящей щелью в сверхпроводнике Δ, либо характерной для нормального металла энергией - энергией Таулеса, которая, для прослойки металла с коэффициентом диффузии D дается выражением $E_{Th} = \hbar D/L^2$. В случае коротких переходов ($L < \xi_S$, или $E_{Th} > \Delta$) критический ток, как было показано в [1], дается формулой $eR_N I_c(T \to 0) = 2.07\Delta$, а в противоположном случае длинного SNS-перехода - $eR_N I_c(T \to 0) = 10.82 E_{Th}$.

2 Эксперимент

В качестве примера рассмотрим один из экспериментов, описанных в статье [2]. В качестве нормального металла использовалось чистое (доля примесей $< 10^{-4}$) Au с концентрацией магнитных примесей меньше 1 части на 10^7. Длина фазовой когерентности была оценена из экспериментов по слабой локализации в 10м (при температуре ниже 50 mK). В качестве сверхпроводников использовались Al и Nb. Длина нормальной части варьировалась в пределах от 0.75 до 2.2 μm, что много больше тепловой длины когерентности $\sqrt{\hbar D/\Delta}$ (длинные контакты). Геометрически образцы представляли собой сквиды (см. рис.1)

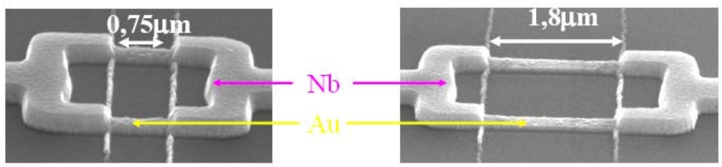

Рис. 1: Изображения сквидов

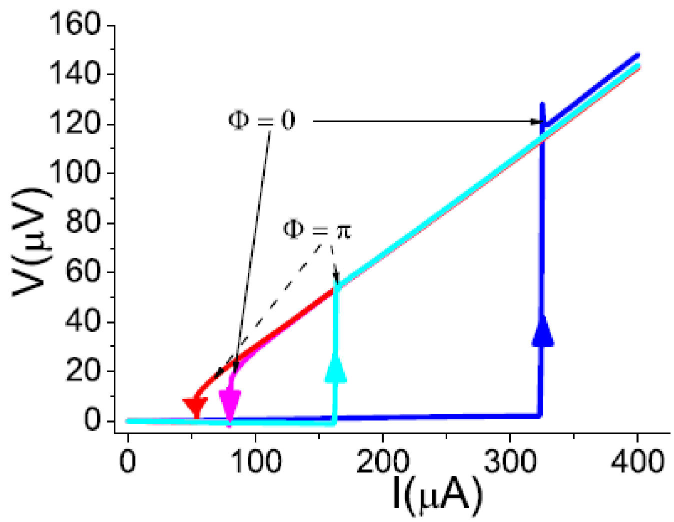

Рис. 2: Типичная V/I характеристика при двух значениях магнитного поля

Типичная вольт-амперная характеристика SNS-сквида показана на рис. 2. Одиночные SNS-переходы имеют похожую вольт-амперную характеристику. Обратим внимание на гистерезисный характер кривых: сначала ток растет, но напряжение на переходе отсутствует. При достижении некоторого значения тока I_s появляется скачок напряжения. При обратном уменьшении тока, переход от диссипативного режима к сверхпроводящему обнаруживается уже при другом значении тока, I_r, причем $I_r \ll I_s$. Что важно, значение тока возврата I_r не зависит от температуры, в отличие от тока I_s. Значение тока I_s неплохо согласуется с теоретическими предсказаниями (отклонение не превышает 50%). Причем основной источник погрешности - неопределенность в определении сопротивления N-области в нормальном состоянии. (E_{Th} извлекается из отлично ложащейся на теоретическую кривую температурной зависимости критического тока). Значение тока I_r понято гораздо хуже. Гистерезисное поведение SIS-перехода может быть описано, например, в резистивной модели (емкость, включенная параллельно сопротивлению). Поведение такого перехода сходно с поведением массивной частицы в потенциале типа "стиральной доски"[3]. Количественно ток возврата определяется величиной параметра Маккамбера $\beta_C = \frac{2e}{\hbar} I_c C R^2$. Связь между значением β_C и степенью гистерезиса зависит от модели, которой описывается контакт (нелинейная резистивная модель или же микроскопическая модель туннельного перехода), но, грубо говоря, гистерезисная вольт-амперная характеристика соответствует $\beta_C > 1$ [20]. В случае же рассматриваемой SNS-структуры физическое происхождение такой "емкости"неясно.

3 Уравнения Келдыша в теории сверхпроводимости

Уравнения, применимые для рассмотрения явлений, связанных со сверхпроводимостью, выводятся в технике Келдыша, основанной на Гриновских функциях в действительном времени [4]. Результатом является кинетическое уравнение для сверхпроводящих металлов. Компактная запись этих уравнений получается, если ввести

Гриновские функции в пространстве Намбу-Келдыша:

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}^R & \hat{g}^K \\ 0 & \hat{g}^A \end{pmatrix} \tag{1}$$

Здесь

$$\hat{g}^R(1,1') = \theta(t_1 - t_{1'}) \left[\hat{g}^>(1,1') - \hat{g}^<(1,1')\right], \; \hat{g}^A(1,1') = -\theta(t_{1'} - t_1) \left[\hat{g}^>(1,1') - \hat{g}^<(1,1')\right]$$

Кроме того, в технике Келдыша появляется еще одна линейно-независимая функция, $\hat{g}^K(1,1') = \hat{g}^>(1,1') + \hat{g}^<(1,1')$. $g^>(1,1')$ и $g^<(1,1')$ определены следующим образом:

$$g^>(1,1') = -i\tau^3 \begin{pmatrix} <\psi_\uparrow(1)\psi_\uparrow^+(1')> & <\psi_\uparrow(1)\psi_\downarrow(1')> \\ <\psi_\downarrow^+(1)\psi_\uparrow^+(1')> & <\psi_\downarrow^+(1)\psi_\downarrow(1')> \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$g^<(1,1') = i\tau^3 \begin{pmatrix} <\psi_\uparrow^+(1')\psi_\uparrow(1)> & <\psi_\uparrow(1')\psi_\downarrow(1)> \\ <\psi_\downarrow^+(1')\psi_\uparrow^+(1)> & <\psi_\downarrow(1')\psi_\downarrow^+(1)> \end{pmatrix} \tag{3}$$

Если в стационарном случае функции Грина зависят только от разности времен, то в нестационарном они приобретают зависимость еще и от суммарного времени. В этом случае в уравнения Узаделя входят не произведения функций, а их свертки по промежуточному времени:

$$(f \circ g)(t_1, t_2) = \int f(t_1, t')g(t', t_2)dt \tag{4}$$

Для дальнейшего удобно от двухвременного представления $f(t_1, t_2)$ перейти к смешанному представлению. Определим $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, $t = t_2 - t_1$. Сделав преобразование Фурье по t, получим $F(T, \epsilon) = \int exp(-i\epsilon t) f(T - t/2, T + t/2)dt$. В этом представлении свертка $f \circ g$ дается выражением

$$(f \circ g)(T, \epsilon) = e^{i\left(\partial_T^f \partial_\epsilon^g - \partial_\epsilon^f \partial_T^g\right)/2} f(T, \epsilon) g(T, \epsilon) \tag{5}$$

Самое общее уравнение на введенные таким образом величины запишется в виде

$$\left[\check{g}_0^{-1} - \check{\Sigma}\right] \otimes \check{g} = \delta(1 - 1') \tag{6}$$

причем

$$\check{g}_0^{-1} = i\tau^3 \left(\partial_{t_1} + \frac{1}{2m} \left(\bigtriangledown_{R_1} - ie\tau^3 A(1) \right)^2 - e\phi(1) + \mu \right) \delta(1-1') \quad (7)$$

Обычно используют малый параметр $\frac{T_c}{E_F}$, или $\frac{a}{\xi_0}$, где a - межатомное расстояние и ξ_0 - длина когерентности. Этому соответствует т.н. квазиклассическое приближение. Квазиклассическая функция Грина зависит от пространственных координат, времени и направления импульса на ферми-повехности. Дальнейшее упрощение связано с учетом влияния примесей и рассмотрением грязного предела (малый параметр $\frac{l}{\xi_0}$). В этом пределе функция Грина почти изотропна, причем удается получить замкнутое уравнение на ее изотропную часть. Так получается уравнение Узаделя, которое в общем случае запишется так:

$$\left[\hat{g}_{0s}^{-1} + i\hat{\sigma}'_s - D \circ \hat{\partial} \circ \hat{g}_s \circ \hat{\partial} \circ, \check{g}_s \right]_- = 0 \quad (8)$$

с условием нормировки $\check{g}_s \circ \check{g}_s = \delta(t_1 - t_{1'})$.
Здесь

$$\check{g}_{0s}^{-1} = \left(\check{\tau}^3 \check{\partial}_{t_1} + ie\phi \right) \delta(t_1 - t_{1'}), ; \ \check{\partial} = \left(\bigtriangledown_R - ie\check{\tau}^3 A \right) \delta(t_1 - t_{1'}) \quad (9)$$

в этих формулах $\check{\tau}^3 = \begin{pmatrix} \hat{\tau}^3 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}^3 \end{pmatrix}$. Собственно-энергетическая часть дается выражением

$$\check{\sigma}'_s = -\frac{i}{2\tau_s} \check{\tau}^3 \check{g}_s \check{\tau}^3 + \check{\sigma}_s^{e-ph} \quad (10)$$

В рамках модели БКШ электрон-фононное взаимодействие моделируется членом $\hat{\sigma}^{e-ph,A(R)} = \left(-\lambda E \pm \frac{i}{2\tau_{in}} \right) \hat{\tau}^3 - i\hat{\Delta}$, причем $\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}$. Условие самосогласования принимает вид $\Delta = -\frac{i\lambda}{8} \int_{-w_D}^{w_D} dETr[(\hat{\tau}^1 - i\hat{\tau}^2)\hat{g}^K]$.

В принципе это уравнение позволяет учесть неупругое рассеяние, но, в дальнейшем мы будем считать что оно отсутствует (например, в описаном выше эксперименте $Ł_{in} \gg L$).

Уравнение содержит в себе спектральные свойства системы и уравнение на функцию распределения. Функция распределения 4вводится таким образом. Можно показать, что $\hat{g}^K$ представима в виде $\hat{g}^K = \hat{g}^R \circ \hat{h} - \hat{h} \circ \hat{g}^A$, причем матричную функцию распределения h можно выбрать в виде

$$\hat{h} = h_L \hat{\tau}^0 + h_T \hat{\tau}^3. \tag{11}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться разложением:

$$\hat{g}^{R(A)} = (g\tau^3 + f_1\tau^1 + f_2\tau^2)^{R(A)} \tag{12}$$

Причем, из общего равенства $g^R(1,1') = -\hat{\tau}^3(g^A(1',1))^+\hat{\tau}^3$ для коэффициентов в разложении получаем

$$g^A(\epsilon) = -(g^R(-\epsilon))^*, f_1^A(\epsilon) = (f_1^R(-\epsilon))^*, f_2^A(\epsilon) = (f_2^R(-\epsilon))^* \tag{13}$$

Из дальнейшего будет ясно, что функции h_L и h_T (нечетная и четная по энергии, соответственно), определяют сверхпроводящий и квазичастичный токи. В равновесии

$$h_L = th(\frac{\epsilon}{2T}), \quad h_T = 0 \tag{14}$$

.

4 Граничные условия

На SN-границе нужно выписать граничные условия. Квазиклассическая функция Грина, вообще говоря, будет разрывна, т.к. она уже усреднена и зависит только от суммарной координаты $\frac{r_1+r_2}{2}$ на масштабах порядка длины когерентности. Поэтому граничные условия для квазиклассических функций требуют особого рассмотрения. Как было показано в [5], такое граничное условие имеет вид

$$(\sigma_N \check{J})_{\pm 0} = (2R_{SN})^{-1} \left[\check{g}_{-0} \circ, \check{g}_{+0}\right]_{-} \tag{15}$$

Индексы ± 0 соответствуют разным сторонам поверхности, спектральный ток $\check{J}$ есть $\check{J} = \check{g} \circ \partial_x \check{g}$. Электрический ток, приходящийся на единицу площади контакта, выражается через келдышевскую компоненту спектрального тока таким образом:

$$I(t) = \frac{\pi \hbar \sigma_N}{4e} Tr\ \hat{\tau}^3 \hat{J}^K(t,t,x) \tag{16}$$

. Формулу (16) также можно переписать через граничные значения:

$$I(t) = \frac{Pi}{8eR} Tr\ \tau^3 \left[\check{g}_{-0} \circ, \check{g}_{+0}\right]_{-}^{K} (t,t) \tag{17}$$

Здесь σ_N - проводимость нормального металла, R_{SN} - поверхностное сопротивление границы на единицу площади (в нормальном состоянии). Оно может быть связано, например, с наличием барьера Шоттки или различием скоростей Ферми в граничащих металлах. В модели поверхностного барьера вида $U(x) = H\delta(x)$, поверхностное сопротивление связано с силой барьера $Z = H(\hbar v_F)^{-1}$: $R_{SN} = \frac{2lZ^2}{3\sigma_N}$ [6]. В [7] было показано, что такое граничное условие справедливо в двух противоположных случаях - для полностью прозрачной границы ($R_{SN} \rightarrow 0, \check{g}_{+0} = \check{g}_{-0}$), либо для барьера, сопротивление которого много больше сопротивление куска нормального металла длиной l, $R = \frac{l}{\sigma_N}$. Граничные условия, записанные в таком виде, включают в себя уравнения как на аномальные функции, так и на функцию распределения на границе.

Таким образом, исследование свойств SNS-перехода сводится к вычислению его спектральных характеристик (нахождению аномальных функций) и определению функций распределения электронов по этим состояниям. В электронном спектре диффузного нормального металла в контакте со сверхпроводниками возникает минищель Δ_g. Наличие минищели было проверено экспериментально

- в нескольких туннельных экспериментах. Существование минищели впервые обсуждалось McMillan'ом в работе [11] в туннельной модели. В работе [8] получены аналитические выражения для минищели в некоторых случаях. В работе [10] с помощью численного решения уравнений Узаделя изучено влияние магнитных примесей и неидеальности границы на минищель и плотность состояний. Показано, что в пределе длинного перехода для случая идеальной границы $\Delta_g \approx 3.1 E_{Th}$. С уменьшением прозрачности границы минищель уменьшается, $\frac{\Delta_g}{\Delta} \sim \frac{1}{r}$, r - параметр поверхности - $r = \frac{g_N}{2e^2/hN\tau}$ (N-количество каналов одинаковой прозрачности τ). В равновесии знания локальной плотности состояний (DOS), определяемой как $DOS(x,\epsilon) = \Re g^R(x,\epsilon)$ достаточно для вычисления критического тока такой структуры в зависимости от температуры и длины перехода, а также соотношения ток-фаза.

5 Решение линеаризованного уравнения Узаделя

В пределе малой прозрачности SN границы аномальные функции в нормальной области малы и уравнения Узаделя (8) линеаризуются. Параметризуем функцию Грина таким образом:

$$\check{g}^R = \begin{pmatrix} 1 & 2\gamma^R \\ 2\tilde{\gamma}^R & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

В линейном приближении уравнения на γ^R и $\tilde{\gamma}^R$ расцепляются и имеют одинаковый вид:

$$\partial_x^2 \gamma^R + 2\left(\frac{i\epsilon}{\epsilon_T}\right)\gamma^R = 0, \quad \partial_x^2 \tilde{\gamma}^R + 2\left(\frac{i\epsilon}{\epsilon_T}\right)\tilde{\gamma}^R = 0 \tag{19}$$

Граничные условия к этим уравнениям получаются линеаризацией общих граничных условий и имеют вид

$$\pm 2r\partial_x \gamma^R = F^R_{l,r}, \quad \pm 2r\partial_x \tilde{\gamma}^R = \tilde{F}^R_{l,r} \tag{20}$$

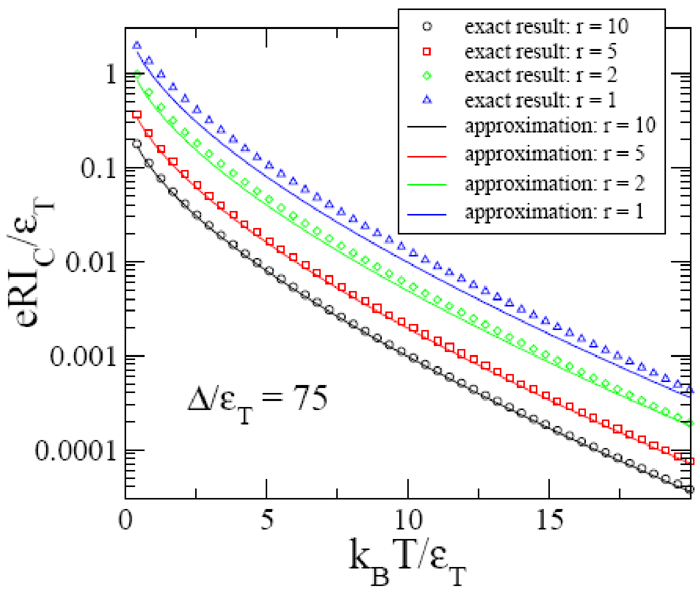

Рис. 3:

Пусть массивные сверхпроводники расположены в точках [-1/2, 1/2], а их фазы - $\phi_1 = -\phi/2$, $\phi_2 = \phi/2$, тогда получим ($F(\epsilon)$ - аномальная функция массивного сверхпроводника, $\phi = 0$):

$$\gamma^R(x,\epsilon) = \frac{F(\epsilon)}{\lambda \sin(\lambda)} \left(e^{i\lambda x} \cos(\frac{\phi+\lambda}{2}) + e^{-i\lambda x} \cos(\frac{\phi-\lambda}{2}) \right) \tag{21}$$

$\lambda = \sqrt{2i\epsilon/E_{Th}}$

$\tilde{\gamma}^R$ получается заменой $\phi \to -\phi$ и $F \to F^*$. Теперь, предполагая равновесие, можно выписать выражение для спектрального сверхтока

$$S(\epsilon) = 1/4 \Re Tr[\hat{\tau}^3 \hat{g}^R \partial_x \hat{g}^R] \tag{22}$$

и подставить его в выражение для равновесного сверхтока

$$I = \frac{g_N}{e} \int_{-\infty}^{\infty} S(\epsilon) \operatorname{th}(\epsilon/2T) d\epsilon \tag{23}$$

Ток-фазовое соотношение: $I = I_c \sin(\phi)$. В пределе длинной проволоки получим [10]

$$eRI_c = \frac{4\pi T}{r}\frac{L_T}{L} exp(-L/L_T), \tag{24}$$

$$L_T = \sqrt{\hbar D/2\pi T}$$

Получившееся в результате выражение, как показывает численное решение нелинеаризованного уравнения Узаделя, отлично интерполирует значения критического тока вплоть до значений r, близких к 1 (рис. 3) [10].

6 Неравновесные эффекты

Величина и направление полного сверхтока в SNS-контакте зависит от функции распределения электронов по состояниям в N-области. В эксперименте, описанном в [14], эта функция распределения была модифицирована путем повышения эффективной температуры электронов за счет пропускания нормального тока из нормального резервуара через N-часть системы. В мезоскопической проволочке функция распределения не обязательно является тепловой - длина неупрогого рассеяния (обеспечивающего энергетическую релаксацию) может существенно превосходить размеры образца. В такой ситуации, как было показано в работах [13], [15], распределение электронов в нормальной проволоке, соединяющей два нормальных резервуара под контрольным напряжением V может иметь двухступенчатую форму (суперпозиция ступенек ферми из разных образцов при $T \ll V$, расстояние между ступеньками V). Такое распределение может привести даже к изменению направления сверхтока, приводя к ток-фазовому соотношению вида $I = I_c \sin(\phi + \pi)$. Так получается т.н. π-переход, экспериментально эта ситуация исследована в работе [12]. Еще один эффект, связанный с неравновесностью - модификация функции распределения под влиянием сверхтока. В результате проникновения сверхпроводящих корреляций в область нормального металла, коэффициенты диффузии заряда и энергии в ней меняются и становятся зависящими от пространственной координаты и энергии. В стационарном случае, в предположении об отсутствии энергетической релаксации соответствующие кинетические уравнения могут быть записаны в виде законов сохранения потоков:

$$\frac{\partial j_T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial j_L}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

$$j_T = D_T(x)\partial_x f_T + j_E f_L + T(x)\partial_x f_L, \quad j_L = D_L(x)\partial_x f_L + j_E f_T - T(x)\partial_x f_T \tag{26}$$

Коэффициенты в этом уравнении выражаются через запаздывающие функции Грина. Они зависят от разности фаз ϕ в берегах, причем, при $\phi = 0$, j_E и T обращаются в 0. Сверхток (определяемый $j_E(\epsilon, \phi)$) дает вклад $j_E f_L$ в ток заряда и, в неравновесной ситуации, вклад в поток энергии $\epsilon j_E f_T(x)$.

7 Адиабатическое приближение

В нестационарном случае (когда нарушена инвариантность по отношению к сдвигу по времени), вместо произведений во все уравнения входят свертки функций по времени. Раскладывая экспоненту в выражении для такой свертки в смешанном представлении и оставляя только два первых члена, получим

$$(f \circ g)(T, \epsilon) \approx fg + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial g}{\partial \epsilon} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon}\frac{\partial g}{\partial T}\right) \tag{27}$$

Видно, что отличие сверток от произведений определяется масштабом времен и энергий, на которых меняются сворачиваемые функции. Адиабатическое приближение состоит в том, чтобы пренебречь этим отличием. Тогда зависимость от суммарного времени войдет в результаты только в виде зависимости фазы от времени.

8 Нестационарные эффекты

Ступеньки Шапиро

Появление на вольт-амперной характеристике SNS-контактов особенностей в виде ступенек при приложении переменного напряжения может быть понято на основе простой модели. Рассмотрим сначала общее ток-фазовое соотношение в таких связях. В случае туннельной связи между сверхпроводниками зависимость ток-фаза имеет вид $I = I_c \sin(\phi)$. Однако в структурах с не слишком малой прозрачностью границы может реализоваться другой тип зависимости тока от фазы. Общее соотношение имеет вид:

$$I(\phi) = \Sigma_{n=1}^{\infty} I^{(n)} \sin(n\phi) \tag{28}$$

В диффузных слабых связях прозрачности границы широко распределены между 0 и 1 ([18]). Поэтому могут оказаться существенными вклады от разных гармоник. Для короткого контакта вклады разных гармоник могут быть вычислены аналитически

$$I^{(n)} = -\frac{(-1)^n e\Delta}{R_N(2n+1)(2n-1)} \tag{29}$$

Для случая длинного перехода эта зависимость аппроксимируется модификацией этой формулы ($\Delta \to E_{Th}$, численный множитель $\approx$ 33), однако строгое доказательство этого факта неизвестно. [9]

Рассмотрим теперь идеальный случай Джозефсоновской слабой связи, к которой приложено переменное напряжение

$$U(t) = V(1 + \alpha \cos(\omega t)) \tag{30}$$

. Эволюция разности фаз со временем ($\frac{d}{dt}\phi = 2eU(t)$) описывается выражением $\phi(t) = \frac{2e}{\hbar} \int U(t)dt = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V(1 + \alpha/\omega \sin(\omega t))$. В адиабатическом приближении получим

$$I(t) = \Sigma_{n=1}^{\infty} I^{(n)} \sin\left(m\left[\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V(1+\alpha/\omega\sin(\omega t))\right]\right) =$$
$$= \Sigma_{n=1}^{\infty} I^{(n)} [\sin(n\theta(t)) J_0(\frac{2neV\alpha}{\hbar\omega}) + \Sigma_{m=1}^{\infty} \sin(n\theta(t)+m\omega t) J_m(\frac{2neV\alpha}{\hbar\omega}) +$$
$$+ \Sigma_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin(n\theta(t)-m\omega t) J_m(\frac{2neV\alpha}{\hbar\omega}))]$$

здесь $\theta(t) = \phi_0 + 2eV/\hbar t$. Можно заметить, что среднее по времени значение тока отлично от нуля только при определенных значениях приложенного постоянного напряжения V, а именно $V = \frac{m}{n} V_0$, $V_0 = \frac{\hbar\omega}{2e}$. Значения $< I(t) >$ выражаются через функции Бесселя следующим образом:

$$\begin{aligned} &< I >_{V=0} = \Sigma_{n\geq 1} I^{(n)} J_0(2n\alpha)\sin(n\delta_0) \\ &< I >_{V=\frac{m}{n}V_0} = \Sigma_{k\geq 1} I^{(kn)} J_{km}(2kn\alpha)(-1)^{km}\sin(nk\delta_0) \\ &< I >_{V=-\frac{m}{n}V_0} = \Sigma_{k\geq 1} I^{(kn)} J_{km}(2kn\alpha)\sin(nk\delta_0) \end{aligned} \quad (31)$$

Неравновесный сверхток при конечном напряжении

В большинстве туннельных переходов и слабых связей, временная зависимость спектрального сверхтока гармоническая, поэтому усредненный по времени спектральный сверхток при конечном напряжении равен нулю. Однако, в связи с дополнительной временной зависимостью функции распределения, произведение $h_L j_E$, определяющее сверхток, не обязательно будет гармоническим, и может существовать ненулевой средний сверхток. Физически зависимость h_L от времени происходит из-за эффекта близости - коэффициент тепловой диффузии имеет зависимость от фазы. В работе [19] вычислен такой средний сверхток для короткого SINIS-перехода ($V \ll \Delta$). Он оказывается порядка квазичастичного тока, хотя и примерно на два порядка меньше, чем критический ток того же перехода при нулевом напряжении. Однако, тот факт, что $I_S \sim \sin^2\phi$, обычно приводит к появлению полуцелых ступенек Шапиро на IV-характеристике.

9 SINIS-переход в переменном электрическом поле

Рассмотрим граничные условия на матричную функцию распределения при наличии SIN-перехода. Граничные условия на функцию распределения получаются из граничного условия на функцию $\check{g}$ (15). Распишем отдельно граничные условия на R(A) и K компоненты суперматрицы $\check{g}$ (знак свертки опускаем):

$$\begin{array}{l} r(\hat{g}\partial_x g)^{R(A)} = (\hat{g}\hat{g}_b - \hat{g}_b\hat{g})^{R(A)} \\ r\left(\hat{g}^R\partial_x\hat{g}^K + \hat{g}^K\partial_x\hat{g}^A\right) = \hat{g}^R\hat{g}_b^K - \hat{g}_b^R\hat{g}^K + \hat{g}^K\hat{g}_b^A - \hat{g}_b^K\hat{g}^A \end{array} \tag{32}$$

Дальше будем рассматривать эти условия в адиабатическом приближении. Используя (11), перепишем граничное условие в виде:

$$\begin{array}{l} r\left[\left(1-\hat{g}^R\hat{g}^A\right)\partial_x h_L + \left(\tau^3 - \hat{g}^R\tau^3\hat{g}^A\right)\partial_x h_T\right] + \hat{u}^R\hat{h} - \hat{h}\hat{u}^A = \\ = \left(\hat{g}^R\hat{v}_B - \hat{v}_B\hat{g}^A\right)h_{L_B} + \left(\hat{g}^R\hat{v}'_B - \hat{v}'_B\hat{g}^A\right)h_{T_B} + \\ + \left(\hat{v}\hat{g}_B^A - \hat{g}_B^R\hat{v}\right)h_L + \left(\hat{v}'\hat{g}_B^A - \hat{g}_B^R\hat{v}'\right)h_T \end{array} \tag{33}$$

Здесь $\hat{u}^{R(A)} = (\hat{g}\hat{g}_B - \hat{g}_B\hat{g})^{R(A)}$, $\hat{v}_{(B)} = \hat{g}_{(B)}^R - \hat{g}_{(B)}^A$, $\hat{v}'_{(B)} = \hat{g}_{(B)}^R\tau^3 - \tau^3\hat{g}_{(B)}^A$. Функции с нижним индексом b относятся к массивному сверхпроводнику.

Так как запаздывающие и опережающие Гриновские функции связаны общими соотношениями, будем искать $\hat{g}^R$, опуская в дальнейшем верхний индекс. Пользуемся разложением (12). Пусть к SNS-переходу приложено переменное напряжение вида (30), $V \ll \Delta$. В калибровке $A = 0$ запишем линеаризованное ($r \gg 1$) уравнение (8):

$$\begin{array}{c} 2\partial_\tau f_1 - \phi_- f_2 - D\bigtriangledown^2 f_1 = 0 \\ 2\partial_\tau f_2 - \phi_- f_1 - D\bigtriangledown^2 f_2 = 0 \end{array} \tag{34}$$

Здесь $\phi_- = \phi_1 - \phi_{1'}$. В рассматриваемом случае $\phi = -eEx(1 + \alpha\cos\omega t)$ и $\phi_- = 2eEx\alpha\sin(\omega T)\sin(\omega\tau/2)$.
Граничные условия к этим уравнениям ($\epsilon \ll \Delta$) имеют вид

$$\begin{array}{c} r\partial_x f_1 = \cos(\chi(T)) \\ r\partial_x f_2 = \sin(\chi(T)) \end{array} \tag{35}$$

.

Удобнее переписать уравнения (34), (35) на функции $f_\pm = f_1 \pm f_2$, при этом они расцепляются:

$$\begin{array}{ll} 2\partial_\tau f_+ - \phi_- f_+ - D\bigtriangledown^2 f_+ = 0, & r\partial_x f_+ \mid_{RL} = \pm\left[\cos(\chi_{RL}(T)) + \sin(\chi_{RL}(T))\right] \\ 2\partial_\tau f_- + \phi_- f_- - D\bigtriangledown^2 f_- = 0, & r\partial_x f_- \mid_{RL} = \pm\left[\cos(\chi_{RL}(T)) - \sin(\chi_{RL}(T))\right] \end{array} \tag{36}$$

Заметим, что время T в эти уравнения входит как параметр.

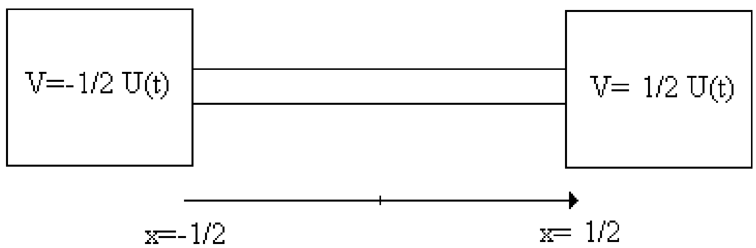

Рис. 4:

Рассмотрим конфигурацию на рис.4 (длину в дальнейшем измеряем единицах L). Тогда уравнения запишутся в виде:

$$\begin{array}{l} \partial_\tau f_+ - \lambda(T) x \sin\frac{\omega\tau}{2} f_+ - \frac{E_{Th}}{2}\bigtriangledown^2 f_+ = 0 \\ \partial_\tau f_- + \lambda(T) x \sin\frac{\omega\tau}{2} f_- - \frac{E_{Th}}{2}\bigtriangledown^2 f_- = 0 \end{array} \tag{37}$$

и граничные условия к ним:

$$\begin{array}{l} r\partial_\tau f_+ \mid_{1/2} = \sigma_+(T) \\ r\partial_\tau f_+ \mid_{-1/2} = -\sigma_-(T) \\ r\partial_\tau f_- \mid_{1/2} = \sigma_-(T) \\ r\partial_\tau f_- \mid_{-1/2} = -\sigma_+(T) \end{array} \tag{38}$$

Здесь $\sigma_+(T) = \cos(\chi(T)) + \sin(\chi(T))$, $\sigma_-(T) = \cos(\chi(T)) - \sin(\chi(T))$, $\chi(T) = \frac{eV}{\omega}(\omega T + \alpha \sin\omega T)$, $\lambda(T) = eV\alpha\sin\omega T$.

В случае $\omega \gg E_{Th}$ решение такого уравнения можно получить следующим образом. При $\lambda = 0$ его решение несложно выписать (обозначим его $f^0_\pm(\tau)$), причем ясно, что оно существенно меняется на временах $\sim \frac{1}{E_{Th}}$. Рассмотрим член с λ как возмущение. Ищем решение (37) в виде $f_\pm(\tau) = f^0_\pm(\tau) + f^1_\pm(\tau)\cos\frac{\omega\tau}{2}$. Подставляя это выражение в рассматриваемое уравнение, получим, что оно удовлетворяется в нулевом порядке по $\frac{E_{Th}}{\omega}$, если

$$f^1_\pm = \mp\frac{2\lambda}{\omega}xf^0_\pm \tag{39}$$

Функции $f^0_\pm$ ищем в виде $f^0_\pm = \frac{1}{r}\frac{L_\pm\cos(\gamma(x+1/2))+R_\pm\cos(\gamma(x-1/2))}{\gamma\sin(\gamma)}$, ($\gamma = \sqrt{i\epsilon/(2E_{Th})}$) так, чтобы функции $f_\pm(\tau) = \left(1\mp\frac{2\lambda}{\omega}x\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)f^0_\pm$ удовлетворяли граничным условиям (38). Выпишем решение с нужной точностью:

$$\begin{gathered} f_\pm = f^0_\pm \pm \tfrac{\lambda}{\omega}\delta f_\pm \\ f^0_\pm = \tfrac{1}{r\gamma\sin\gamma}\left[\sigma_\pm\cos(\gamma(x+1/2)) - \sigma_\mp\cos(\gamma(x-1/2))\right] \\ \delta f^0_\pm = \tfrac{1}{r\gamma\sin\gamma}\left[\sigma_\pm\cos(\gamma(x+1/2)) + \sigma_\mp\cos(\gamma(x-1/2))\right] \end{gathered} \tag{40}$$

В рассматриваемом случае малой прозрачности барьеров на границах и при малых напряжениях функция h_L на интересующих нас энергиях - тепловая (14). Рассмотрим случай малых напряжений ($eV \to 0$). Тогда свертки превращаются в произведения и несложно посчитать вклад найденной добавки к аномальным функциям в сверхток, получим, что, кроме вклада, рассчитанного выше (с зависящей от времени фазой: $I = I_c\sin 2\chi(t)$), появляется вклад $I = I_c\frac{eV\alpha}{\omega}\sin\omega t$. В случае напряжений eV, сравнимых с E_{Th} и больше, играет роль отличие сверток от произведений. Рассмотрим сверхток при постоянном напряжении, в этом случае из выписанных выше выражений получаем

$$\begin{gathered} f^0_1 = -\tfrac{2\cos(\chi(T))}{r\gamma\sin(\gamma)}\sin(\gamma x)\sin(\gamma/2) \\ f^0_2 = \tfrac{2\sin(\chi(T))}{r\gamma\sin(\gamma)}\cos(\gamma x)\cos(\gamma/2) \end{gathered} \tag{41}$$

Из общего выражения (22), для спектрального тока получим:

$$S(\epsilon, T) = -\frac{1}{2}\Im[f_1\circ\partial_x f_1 - f_2\circ\partial_x f_1]$$

Вычисление в точке (x=0) дает:

$$S(\epsilon, T) = \frac{1}{2r^2}\Re\left(\frac{\sin(\chi(T))}{\gamma\sin(\gamma/2)} \circ \frac{\cos(\chi(T))}{\cos(\gamma/2)}\right)_{\epsilon,T} \tag{42}$$

Видно, что при $eV \ll E_{Th}$ свертка мало отличается от произведения. В противном случае следует произвести точное интегрирование. Выпишем первую поправку к спектральному току, исходя из (27): $\delta S(\epsilon) = -\frac{1}{2r^2}\frac{V}{\epsilon}\Re\left[\frac{\cos^2(\chi(T))\frac{\gamma\sin(\gamma/2)}{2\cos(\gamma/2)}+\sin^2(\chi(T))\left(1+\frac{\gamma\cos(\gamma(2))}{2\sin(\gamma/2)}\right)}{\gamma\sin(\gamma)}\right]$.

10 Литература

[1] I. O. Kulik и A.N. Omel'yanchuk, Fiz. Nisk. Temp. 4, 296 (1978).
[2] L. Angers и др., Proximity DC squids in the long junction limit (неопубликовано) (2006).
[3] В. В. Шмидт, Введение в физику сверхпроводников (2000).
[4] J. Rammer и H. Smith: Field-theoretical methods in transport theory, Rev. Mod. Phys. 58, 2 (1986).
[5] M. Yu. Kupriyanov и V. F. Lukichev, Zh. Eksp. Teor. Phys. 68, 1915 (1975).
[6] G. E. Blonder, M. Tinkham и T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B 25, 4515 (1982).
[7] C. J. Lambert, R. Raimondi, V. Sweeney и A. F. Volkov, Phys. Rev. B 55, 6015 (1997).
[8] D. A. Ivanov, R. von Roten, G. Blatter, Phys. Rev. B 66, 052507 (2002).
[9] Tero T. Heikkila и др., Phys. Rev. B 66, 184513 (2002).
[10] J. C. Hammes и др., arXiv:0704.2358v1 (2007).
[11] W. L. McMillan, Phys. Rev 175, 537 (1968).
[12] J. J. A. Basselmans и др., Nature (London) 397, 43 (1999).
[13] H. Pothier и др., Phys. Rev. Lett 79, 3490 (1997).
[14] Morpurgo A.F. и др., Appl. Phys. Lett 72, 966-968 (1998).
[15] Pothier H. и др., Z. Phys. B 104, 178-182 (1997).
[16] K. K. Likharev, Dynamics of Josephson Junctions and Circuits, Taylor & Francis (1992).
[17] Tero T. Heikkila и др., Phys. Rev. B 67, 100502 (2003).
[18] Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. 73, 134 (1995).
[19] A. Brinkman и др., Phys. Rev. B 68, 224513 (2003).