Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный Университет)

Бакалаврская диссертация

# Андреевское рассеяние на круглом сверхпроводнике в графене

Студент 428 гр. Иоселевич П.А.

Научный руководитель:
профессор Фейгельман М.В.

Москва, 2008г.

# Содержание

# 1 Введение

В данной работе изучается рассеяние электрона в графене на сверхпроводящей области в форме диска. При таком процессе осуществляются два механизма рассеяния - обычное и андреевское ([5]). При решении используется представление волновых функций с определенным значением полного момента. При размерах щели $\Delta$ и энергии рассеиваемого электрона $\epsilon$ много меньших энергии Ферми $E_F$ и дополнительном условии малости диска $R \ll \frac{v}{\Delta}, \frac{v}{\epsilon}$ находятся амплитуды рассеяния, выраженные через цилиндрические функции. При более сильном условии $R \ll \frac{v}{E_F}$ находятся асимптотики сечений и амплитуд рассеяния во всех каналах $m$. Все то же самое проделывается в обычном материале и сравниваются результаты.

Исследованнный режим андреевского рассеяния довольно необычен; условий, при которых он происходит, трудно добиться в другом материале. А именно, длина свободного пробега и длина когерентности в сверхпроводнике велики по сравнению с размерами островка ($l \sim 100nm$ в графене, $\xi \simeq 300nm$ при $\Delta \simeq 10K$), $k_F$ может быть выбрано как много больше, так и много меньше $R$. Кроме того, на границе со сверхпроводником нет изменений обычного скалярного потенциала. Известно, что в обычном случае при $k_F R \gg 1, R \gg l$ андреевская проводимость (проводимость при подаче напряжения на островок) обычная баллистическая и пропорциональна $\sigma^{-1}$, где $\sigma$ - проводимость нормального металла. Интересно понять, как проводимость ведет себя в рассмотренном в работе предельном случае чистого металла с хорошей (без потенциального скачка) границей, для чего изначально и затеяно вычисление. В конце текста предлагается дальнейшее развитие задачи.

# 2 Общие сведения о графене

Графеном называется двумерный углерод, атомы которого расположены в узлах сотовой решетки - решетки, составленной из правильных шестиугольников со стороной $a \simeq 0.2nm$. Такая решетка не является решеткой Браве, но представляется ввиде двух треугольных решеток Браве $A, B$ сдвинутых друг относительно друга. Именно вследствие существования двух подрешеток волновая функция электрона в графене имеет две компоненты. Эффективный гамильтониан свободного электрона в графене совпадает с гамильтонианом безмассовой релятивистской частицы со скоростью света $v \simeq c/300 \simeq 10^8 cm\ s^{-1}$, где $c$ - обычная скорость света.

$$H_+ = v(\mathbf{p}\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & p_- \\ p_+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

вблизи $K$-точки (то есть при импульсе $\mathbf{k} = \mathbf{K} + \mathbf{p}, p \ll K$) и

$$H_- = \begin{pmatrix} 0 & -p_+ \\ -p_- & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_x - ip_y \\ -p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

вблизи $K'$-точки. Спектр электрона линеен и для каждого заданного импульса $\mathbf{p}$ существует два состояния. Одно с энергией $E = pv$ и со спином (изоспином), направленным вдоль импульса $\mathbf{p}\sigma = p$ и другое с $E = -pv$ и $\mathbf{p}\sigma = -p$. В дальнейшем будет использоваться только $H_+$ и мы будем обозначать его просто $H$. Плотность электронов связана с энергией Ферми так:

$$n = 2_{spin} 2_{valley} \frac{\pi p_F^2}{(2\pi)^2} = \frac{E_F}{\pi v^2} \tag{3}$$

Первая двойка возникает из-за обычного спина, вторая - из-за двух долин $K$ и $K'$. Так, при $n \simeq 10^{12} cm^{-2}$ фермиевский импульс $p_F \simeq 1.8 * 10^{-6} cm^{-1}$.

# 3 Задача о рассеянии электрона на круглом сверхпроводнике в графене

Рассмотрим электрон, налетающий на круглую сверхпроводящую область. Пусть $E_F$ уровень Ферми в графене, $\epsilon$ - энергия рассеиваемого электрона, $R$ - радиус сверхпроводящей области. Мы будем рассматривать предельный случай $E_F \gg \epsilon, \Delta$. В сверхпроводящей области мы будем пользоваться уравнением Боголюбова-де Жена (BdG). Оно спаривает электроны и дырки, причем электроны с импульсом из долины $K$ с дырками из $K'$ - таким образом дырки и электроны имеют близкие импульсы. Все характерные размеры задачи мы считаем заведомо много больше размеров решетки $a$. это означает, что передача большого импульса $\sim K \sim a^{-1}$, необходимая для переброса частицы из одной долины в другую, исключена. Итак, уравнение, которое мы будем решать:

$$\begin{pmatrix} H - E_F & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & E_F - \hat{T}H\hat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\hat{T} = \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} C; \tag{5}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} \tag{6}$$

- электронная и дырочная волновые функции. $C$ - оператор комплексного сопряжения. В отсутствие магнитного поля $\hat{T}H\hat{T} = H$. Дырочный спинор получается из электронного действием оператора обращения времени $\hat{T}$: $v = \hat{T}u$, так что $(u_A, u_B) = (\psi_{AK}, \psi_{BK})$ и $(v_A, v_B) = (\psi^*_{AK'}, -\psi^*_{BK'})$. $\hat{T}$ превращает электроны из $K$-долины в дырки из $K'$-долины.

$$\Delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Delta, & \text{if } r > R; \\ 0, & \text{if } r \leq R; \end{cases} \tag{7}$$

Найдем решения уравнения BdG при постоянном $\Delta = const$.

$$\begin{pmatrix} H - E_F & \Delta \\ \Delta^* & E_F - H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Разложим волновую функцию по системе состояний $\{u_E\}$ обычного графена ($\Delta = 0$), и будем искать ее в следующем виде:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_E \begin{pmatrix} f_E u_E(\mathbf{r}) \\ g_E u_E(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где (10)

$$(H - E_F)u_E(\mathbf{r}) = E u_E(\mathbf{r}) \tag{11}$$

Подставляя $\psi$ в (8) и используя (11) получаем

$$\begin{cases} Ef_E + \Delta g_E = \epsilon f_E \\ -Eg_E + \Delta^* f_E = \epsilon g_E \end{cases} \tag{12}$$

$$\epsilon^2 - E^2 = |\Delta|^2 \tag{13}$$

$$E = \pm\tilde{\epsilon} = \pm\sqrt{\epsilon^2 - |\Delta|^2} \tag{14}$$

$$\psi = C_+ \begin{pmatrix} \Delta \\ \epsilon - \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} u_{\tilde{\epsilon}} + C_- \begin{pmatrix} \Delta \\ \epsilon + \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} u_{-\tilde{\epsilon}} \tag{15}$$

## 3.1 Цилиндрические волны в графене, симметрия моментов $\pm J$. Свойства бесселевых функций

Для изучения амплитуды рассеяния мы воспользуемся базисом состояний с определенными энергиями и значением полного момента спин плюс угловой момент $J$. Дальнейшие соображения в основном повторяют [4].

$$\hat{J} \equiv \left(\hat{l}_x + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right) \tag{16}$$

Легко показать, что $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$, что позволяет строить собственные функции с заданными энергией и моментом.

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{17}$$

$$\hat{J}\psi \equiv \left(\hat{l}_x + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\right)\psi = J\psi \tag{18}$$

Полный момент принимает полуцелые значения: $J = m + \frac{1}{2}$, $m \in Z$. Величиной $m$ мы в основном и будем пользоваться в дальнейшем. Решения (18) следующие (см. [4]), ($p = E/v$):

$$\psi_{EJ} = \begin{pmatrix} R_{pm}(r)\Phi_m(\theta) \\ i\mathrm{sgn}(E)R_{pm+1}(r)\Phi_{m+1}(\theta) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

(в дальнейшем мы sgn писать не будем, все состояния будут расположены много выше нулевой точки, то есть все энергии - заведомо положительны) с

$$\Phi_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\theta}, \tag{21}$$

$$R_{pm} = AJ_m(pr) + BY_m(pr), \tag{22}$$

Выпишем здесь же свойства Бесселевых функций - они не раз понадобятся в последующих вычислениях.

$$e^{ipx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(pr) e^{im\theta} \tag{23}$$

$$J_m(x \gg m) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{24}$$

$$Y_m(x \gg m) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{25}$$

$$J_m(x \ll 1) \sim \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m \tag{26}$$

$$Y_m(x \ll 1) \sim \begin{cases} -\frac{m!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^m, m > 0; \\ \frac{2}{\pi}\ln(\gamma_E x/2), m = 0. \end{cases} \tag{27}$$

$$R'_m(x) = R_{m-1}(x) - \frac{m}{x} R_m(x) \tag{28}$$

$$R'_m(x) = -R_{m+1}(x) + \frac{m}{x} R_m(x) \tag{29}$$

Бесселевы функции можно так определить для отрицательных моментов:

$$R_{-m} = (-1)^m R_m \tag{30}$$

При таком определении формула (22) справделива для любых моментов - знаки автоматически выбираются так, что на больших расстояниях $\psi$ ведет себя как плоская волна со спином, направленным вдоль импульса. Обратимся теперь к системе (48). Подставим вместо $m$ $-m-1$ и воспользуемся (30). Мы получим почти ту же систему - единственное изменение - вместо $i^m$ перед $J$ в правой части стоит теперь $i^{-m-1}$. Поскольку все величины $C_\pm, B, G$ пропорциональны этому коэффициенту, это означает, что при переходе от $m$ к $-m-1$ все они домножаются на $i^{-2m-1} = i^{-2J}$. Выпишем теперь, используя (46), уравнение, связывающее $f_{eJ}$ с $B_J$ и $f_{hJ}$ с $G_J$ ($m \equiv J - \frac{1}{2}$ и можно использовать любую из двух величин, симметрия нагляднее при использовании $J$, в остальных главах удобнее пользоваться целым $m$):

$$\frac{f_{em}}{\sqrt{2ir}}e^{ipr} = \frac{B_m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi pr}}e^{im\theta}e^{i\left[pr-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]} \tag{31}$$

$$f_{eJ} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{-J+\frac{1}{2}}B_J e^{-i\theta/2+iJ\theta} \tag{32}$$

$$f_{hJ} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{J-\frac{1}{2}}G_J e^{-i\theta/2+iJ\theta} \tag{33}$$

Заменив теперь $J \to -J$ и домножив на $e^{-2J}$, получим амплитуды с противоположными $J$:

$$f_{e-J} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{-J+\frac{1}{2}}B_J e^{-i\theta/2-iJ\theta} \tag{34}$$

$$f_{h-J} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{-3J-\frac{1}{2}}G_J e^{-i\theta/2-iJ\theta} \tag{35}$$

$$f_{eJ} + f_{e-J} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{-J+\frac{1}{2}}B_J e^{-i\theta/2}\cos(J\theta) \tag{36}$$

$$f_{hJ} + f_{h-J} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}i^{J+\frac{1}{2}}G_J e^{-i\theta/2}\sin(J\theta) \tag{37}$$

Из этих формул видно, что достаточно сосчитать $B, G$ для положительных моментов $J$. Кроме того, из полуцелости $J$ следует, что

$$f_e(\theta = \pi) \equiv 0 \tag{38}$$

$$f_h(\theta = 0) \equiv 0 \tag{39}$$

Нету электронного рассеяния точно назад и дырочного точно вперед - это следствие сохранения киральности (см., например [3]).

## 3.2 Уравнения в графене

Используя (19), перепишем (15), полагая $B = 0$ (требование регулярности $\psi$ в нуле):

$$\psi = \begin{pmatrix} \Delta\left[C_+ J_m(\tilde{p}_+ r) + C_- J_m(\tilde{p}_- r)\right]\Phi_m \\ i\Delta\left[C_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+ r) + C_- J_{m+1}(\tilde{p}_- r)\right]\Phi_{m+1} \\ \left[C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_+ r) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_- r)\right]\Phi_m \\ i\left[C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_+ r) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_- r)\right]\Phi_{m+1} \end{pmatrix} \tag{40}$$

Здесь $\tilde{p}_\pm = \frac{E_F \pm \tilde{\epsilon}}{v}$. Это общий вид решения уравнения BdG с фиксированными энергией и моментом, регулярного в начале координат. Напишем теперь $\psi$ в нормальной области $r > R$. Уравнение выглядит крайне просто ($\Delta = 0$) и его решения - отдельные электронные и дырочные волны.

$$u_m = \begin{pmatrix} \left[AJ_m(p_+r) + BH_m^{(1)}(p_+r)\right]\Phi_m \\ i\left[AJ_{m+1}(p_+r) + BH_{m+1}^{(1)}(p_+r)\right]\Phi_{m+1}, \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$v_m = \begin{pmatrix} \left[FJ_m(p_-r) + GH_m^{(2)}(p_-r)\right]\Phi_m \\ i\left[FJ_{m+1}(p_-r) + GH_{m+1}^{(2)}(p_-r)\right]\Phi_{m+1}, \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$p_\pm = \frac{E_F \pm \epsilon}{v} \tag{43}$$

Потребуем теперь непрерывности $\psi$ на кольце $r = R$. Это требование выражается в четырех очевидных уравнениях:

$$\begin{cases} \Delta[C_+J_m(\tilde{p}_+r) + C_-J_m(\tilde{p}_-r)] = AJ_m(p_+r) + BH_m^{(1)}(p_+r) \\ \Delta[C_+J_{m+1}(\tilde{p}_+r) + C_-J_{m+1}(\tilde{p}_-r)] = AJ_{m+1}(p_+r) + BH_{m+1}^{(1)}(p_+r) \\ [C_+(\epsilon-\tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_+r) + C_-(\epsilon+\tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_-r)] = FJ_m(p_-r) + GH_m^{(2)}(p_-r) \\ [C_+(\epsilon-\tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_+r) + C_-(\epsilon+\tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_-r)] = FJ_{m+1}(p_-r) + GH_{m+1}^{(2)}(p_-r), \end{cases} \quad r = R. \tag{44}$$

Дополнительные уравнения возникают из условия, что $\psi$ описывает рассеяние электрона - на больших расстояниях $r$ функция $\psi$ должна складываться из налетающей волны $\psi_{inc}$ и расходящихся волн.

$$\psi = \psi_{inc} + \psi_e + \psi_h \tag{45}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} e^{ip_+x} + \frac{f_e(\theta)}{\sqrt{ir}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\e^{i\theta}\\0\\0\end{pmatrix} e^{ip_+r} + \frac{f_h(\theta)}{\sqrt{-ir}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\e^{i\theta}\end{pmatrix} e^{-ip_-r} \tag{46}$$

$f_e$ и $f_h$ - амплитуды обычного и андреевского рассеяния. Корни из мнимых единиц введены для удобства вычислений. Первая амплитуда описывает рассеяние в электроны, вторая - в дырки. Имея ввиду (23), легко сообразить, что

$$\psi_{inc} = \sqrt{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \begin{pmatrix} J_m(p_+ r)\Phi_m \\ iJ_{m+1}(p_+ r)\Phi_{m+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Разность $\psi - \psi_{inc}$ в каждом канале $m$ должна содержать лишь расходящиеся из центра волны. Достаточно убедиться в том, что первая компонента волновой функции содержит лишь часть с $e^{ip_+ r}$, а третья - с $e^{-ip_- r}$. Это немедленно дает $A = \sqrt{\pi} i^m$ и $F = 0$. Подставляя $\psi$ в (44), мы получаем

$$\begin{cases} \Delta[C_+ J_m(\tilde{p}_+ R) + C_- J_m(\tilde{p}_- R)] = \sqrt{\pi} i^m J_m(p_+ R) + BH_m^{(1)}(p_+ R) \\ \Delta[C_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+ R) + C_- J_{m+1}(\tilde{p}_- R)] = \sqrt{\pi} i^m J_{m+1}(p_+ R) + BH_{m+1}^{(1)}(p_+ R) \\ C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) J_m(\tilde{p}_+ R) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon}) J_m(\tilde{p}_- R) = GH_m^{(2)}(p_- R) \\ C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) J_{m+1}(\tilde{p}_+ R) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon}) J_{m+1}(\tilde{p}_- R) = GH_{m+1}^{(2)}(p_- R) \end{cases} \tag{48}$$

Для начала посмотрим, что получится, если вовсе пренебречь отличиями аргументов цилиндрических функций от $pR$:

$$\begin{cases} \Delta[C_+ + C_-] = \sqrt{\pi} i^m + B(1 + i\kappa_m) \\ \Delta[C_+ + C_-] = \sqrt{\pi} i^m + B(1 + i\kappa_{m+1}) \\ C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon}) = G(1 - i\kappa_m) \\ C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) + C_-(\epsilon + \tilde{\epsilon}) = G(1 - i\kappa_{m+1}), \end{cases} \tag{49}$$

$$\begin{cases} B = 0 \\ G = 0 \\ \Delta[C_+ + C_-] = \sqrt{\pi} i^m \\ C_+ = C_- \frac{(\tilde{\epsilon} + \epsilon)}{(\tilde{\epsilon} - \epsilon)}, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} C_- = \frac{\tilde{\epsilon} - \epsilon}{2\tilde{\epsilon}} \frac{\sqrt{\pi} i^m}{\Delta} \\ C_+ = \frac{\tilde{\epsilon} + \epsilon}{2\tilde{\epsilon}} \frac{\sqrt{\pi} i^m}{\Delta} \end{cases} \tag{51}$$

В пренебрежении разницой между $p$ и $\tilde{p}_\pm, p_\pm$ рассеяния нет, поскольку такое приближение просто соответствует значению $\Delta = 0$, то есть отсутствию сверхпроводника.

## 3.3 Вычисление электронной амплитуды в графене

Рассчитаем теперь рассеяние в первом приближении по $\epsilon, \tilde{\epsilon}$, выписав точные выражения для амплитуд, а затем разлагая бесселевы функции вблизи $pR$ в ряд по степеням $\frac{\tilde{\epsilon}R}{v}$, $\frac{\epsilon R}{v}$. Преобразуем систему (48), обозначая $\alpha = C_+/C_-$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha J_m(\tilde{p}_+)+J_m(\tilde{p}_-)}{\alpha J_{m+1}(\tilde{p}_+)+J_{m+1}(\tilde{p}_-)} = \frac{\sqrt{\pi} i^m J_m(p_+)+BH_m^{(1)}(p_+)}{\sqrt{\pi} i^m J_{m+1}(p_+)+BH_{m+1}^{(1)}(p_+)} \\ \frac{\alpha(\epsilon-\tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_+)+(\epsilon+\tilde{\epsilon})J_m(\tilde{p}_-)}{\alpha(\epsilon-\tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_+)+(\epsilon+\tilde{\epsilon})J_{m+1}(\tilde{p}_-)} = \frac{H_m^{(2)}(p_-)}{H_{m+1}^{(2)}(p_-)} \end{cases} \tag{52}$$

$$\alpha = \frac{\tilde{\epsilon}+\epsilon}{\tilde{\epsilon}-\epsilon} \frac{J_{m+1}(\tilde{p}_-)H_m^{(2)}(p_-) - J_m(\tilde{p}_-)H_{m+1}^{(2)}(p_-)}{J_{m+1}(\tilde{p}_+)H_m^{(2)}(p_-) - J_m(\tilde{p}_+)H_{m+1}^{(2)}(p_-)} \tag{53}$$

В дальнейшем функция без аргумента означает ее значение в $pR$. $pR$ мы обозначим за $x$. Распишем $\alpha$ в первом порядке по $\epsilon, \tilde{\epsilon}$, используя формулы (28), (29) для преобразования второго множителя в (53). Заметим, что в главном приближении числитель и знаменатель равны, а первые поправки по $\epsilon$ к ним одинаковы. Это означает, что поправка ко всей дроби возникает лишь во втором порядке, тогда как по $\tilde{\epsilon}$ она есть и в первом, причем поправки к числителю и знаменателю противоположны, так что

$$\alpha = \alpha^{(0)}(1 + \gamma \frac{R\tilde{\epsilon}}{v} + O(\epsilon^2 + \tilde{\epsilon}^2)) \tag{54}$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{\tilde{\epsilon}+\epsilon}{\tilde{\epsilon}-\epsilon} \tag{55}$$

$$\gamma = 2\frac{-\left[J_m - \frac{m+1}{x}J_{m+1}\right]H_m^{(2)} + \left[-J_{m+1} + \frac{m}{x}J_m\right]H_{m+1}^{(2)}}{J_{m+1}H_m^{(2)} - J_m H_{m+1}^{(2)}} \tag{56}$$

$$\gamma(x \ll 1) = \frac{-2m}{x}, m > 0 \tag{57}$$

$$\gamma(x \ll 1) = -x\ln(\gamma_E x/2), m = 0. \tag{58}$$

Подставляя найденное $\alpha$ в первое уравнение системы (52), запишем в первом приближении

$$B = -\frac{[\alpha J_m(\tilde{p}_+) + J_m(\tilde{p}_-)]\sqrt{\pi} i^m J_{m+1}(p_+) - [\alpha J_{m+1}(\tilde{p}_+) + J_{m+1}(\tilde{p}_-)]\sqrt{\pi} i^m J_m(p_+)}{[\alpha J_m(\tilde{p}_+) + J_m(\tilde{p}_-)]H_{m+1}^{(1)}(p_+) - [\alpha J_{m+1}(\tilde{p}_+) + J_{m+1}(\tilde{p}_-)]H_m^{(1)}(p_+)} \tag{59}$$

Выпишем числитель, деленный на $\sqrt{\pi} i^m$:

$$X = -(\alpha-1)\frac{\tilde{\epsilon}R}{v}\left\{\left[-J_{m+1}+\frac{m}{x}J_m\right]J_{m+1}-\left[J_m-\frac{m+1}{x}J_{m+1}\right]J_m\right\}+$$

$$+(\alpha+1)\frac{\epsilon R}{v}\left\{\left[-J_{m+1}+\frac{m}{x}J_m\right]J_{m+1}-\left[J_m-\frac{m+1}{x}J_{m+1}\right]J_m\right\}= \quad (60)$$

$$= \frac{[(\alpha+1)\epsilon-(\alpha-1)\tilde{\epsilon}]R}{v}\Lambda \quad (61)$$

$$\Lambda = \left\{\left[-J_{m+1}+\frac{m}{x}J_m\right]J_{m+1}-\left[J_m-\frac{m+1}{x}J_{m+1}\right]J_m\right\} \quad (62)$$

$$B = -\frac{\sqrt{\pi} i^m (X+Y)}{(\alpha+1)[J_m H^{(1)}_{m+1}-J_{m+1}H^{(1)}_m]} \quad (63)$$

Разность $[J_m H^{(1)}_{m+1} - J_{m+1} H^{(1)}_m]$ в знаменателе, она еще много раз встретиться ниже, обозначим за $\eta$. Множитель $(\alpha+1)\epsilon - (\alpha-1)\tilde{\epsilon}$ в выражении для $X$ обращается в нулевом приближении в ноль: $\tilde{\epsilon}\frac{2\epsilon}{\tilde{\epsilon}-\epsilon} - \epsilon\frac{2\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}-\epsilon} = 0$, в следующем приближении, подставляя (54), мы получаем $\gamma\frac{\tilde{\epsilon}(\tilde{\epsilon}-\epsilon)R}{v}$. Слагаемое $X$ - все, что получается, если все входящие в числитель в $\alpha$ величины подставлять с точностью до первого порядка. Но поскольку $X$ получается именно второго, а не первого порядка, то и все величины надо подставить с точностью до второго порядка - недостающие слагамые обозначены за $Y$. Выясним, какие члены добавляются таким образом. Сперва заметим, что при подстановке бесселей в главном порядке, а $\alpha$ - с любой точностью, получается ноль. Члены, даваемые перекрестными членами - первой поправкой к $\alpha$ в произведении с первыми поправками к бесселевым функциям, мы уже посчитали - они составляют $X$. Значит, остаются члены, возникающие из $\alpha_0$ и вторых поправок к бесселям. Заметим далее, что ноль дает сумма перекрестных членов, получающихся, когда мы перемножаем первые поправки к разным бесселям - это легко увидеть, вынеся общий для этих членов множитель $J'_m J'_{m+1}$. Остается только слагаемое

$$Y = \frac{(\alpha+1)R^2}{v^2}\left[J_m J''_{m+1}\epsilon^2 + J''_m J_{m+1}\tilde{\epsilon}^2 - J_m J''_{m+1}\tilde{\epsilon}^2 - J''_m J_{m+1}\epsilon^2\right] = \quad (64)$$

$$= \frac{(\alpha+1)R^2}{v^2}(\epsilon^2-\tilde{\epsilon}^2)(J_m J''_{m+1} - J''_m J_{m+1}) \quad (65)$$

(мы воспользовались тем, что поправки второго порядка для $\tilde{p}_+$ и $\tilde{p}_-$ равны друг другу, поскольку квадратичны по малой величине)

Пользуясь (28), (29), получим выражения для вторых производных:

$$J''_m = (-J_{m+1} + \frac{m}{x}J_m)' = -J_m + \frac{1}{x}J_{m+1} + \frac{m^2-m}{x^2}J_m \quad (66)$$

$$J''_{m+1} = (J_m - \frac{m+1}{x}J_{m+1})' = -J_{m+1} - \frac{1}{x}J_m + \frac{(m+1)^2+(m+1)}{x^2}J_{m+1} \quad (67)$$

$$(68)$$

Обозначаем

$$\lambda = J_m J''_{m+1} - J''_m J_{m+1} = -\frac{J_m^2 + J_{m+1}^2}{x} + \frac{4m+2}{x^2}J_m J_{m+1} \quad (69)$$

$$\lambda_{m>0}(x \ll 1) = -\frac{1}{x(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \frac{4m+2}{x^2(m+1)(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} = \quad (70)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}\frac{1}{(m!)^2}\frac{m}{2(m+1)} \quad (71)$$

$$\lambda_{m=0}(x \ll 1) = \frac{x}{2}. \quad (72)$$

Выпишем еще поведение $\Lambda$ вблизи нуля.

$$\Lambda(pR = x \ll 1) = -J_m^2 + \frac{2m+1}{x}J_m J_{m+1} = J_m\left(\frac{x}{2}\right)^m\left[-1 + \frac{2m+1}{2m+2}\right] = \quad (73)$$

$$= -\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\frac{1}{2(m+1)} \quad (74)$$

Таким образом, числитель в $B$ равен

$$X + Y = \frac{\gamma\tilde{\epsilon}(\epsilon - \tilde{\epsilon})R^2}{v^2}\Lambda + \frac{(\alpha+1)R^2}{v^2}(\epsilon^2 - \tilde{\epsilon}^2)\lambda = \quad (75)$$

$$= \frac{R^2}{v^2}\left[\gamma\tilde{\epsilon}(\epsilon - \tilde{\epsilon})\Lambda + (\alpha+1)|\Delta|^2\lambda\right] \quad (76)$$

Еще зависит от энергии множитель из знаменателя $1/(\alpha+1) \simeq 2(\tilde{\epsilon}-\epsilon)/\tilde{\epsilon}$.

$$B = -\sqrt{\pi}i^m\frac{X+Y}{(\alpha+1)\eta} = -\sqrt{\pi}i^m\frac{R^2}{v^2}\frac{\left[-\frac{\gamma(\epsilon-\tilde{\epsilon})^2}{2}\Lambda + |\Delta|^2\lambda\right]}{\eta} \quad (77)$$

$$\eta = [J_m H_{m+1}^{(1)} - J_{m+1}H_m^{(1)}] \quad (78)$$

$$\eta(x \ll 1) = -i\frac{2}{x}\frac{(m+1)}{\pi} \quad (79)$$

Величина $B$ при малых $x$

$$B_{m>0} = -\sqrt{\pi} i^m \left(\frac{R}{v}\right)^2 \left[(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2 \frac{-i\pi m}{4((m+1)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + |\Delta|^2 \frac{i\pi m}{2((m+1)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right] = \quad (80)$$

$$-\sqrt{\pi} i^m \left(\frac{R}{v}\right)^2 \frac{i\pi m}{2((m+1)!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2}\right] \quad (81)$$

Отметим, что в последней формуле квадратная скобка всегда больше или равна $\frac{|\Delta|^2}{2}$.

$$B_{m=0} = -\sqrt{\pi}\left(\frac{R}{v}\right)^2 i\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2}\ln(\gamma_E x/2)\right] \quad (82)$$

При $\epsilon \sim \Delta$ доминирует второе слагаемое, если же $\Delta \ll \epsilon$, оно становится равно $-|\Delta|^2 \frac{|\Delta|^2}{4\epsilon^2} \ln(\gamma_E x/2)$ и может быть как много больше, так и много меньше или порядка $|\Delta|^2$.

## 3.4 Вычисление дырочной амплитуды в графене

Займемся теперь вычислением коэффициента $G$, с точностью до множителя равного $f_{hm}$.

$$G = C_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) \frac{J_m(\tilde{p}_+)J_{m+1}(\tilde{p}_-) - J_{m+1}(\tilde{p}_+)J_m(\tilde{p}_-)}{H_m^{(2)}(p_-)J_{m+1}(\tilde{p}_-) - H_{m+1}^{(2)}(p_-)J_m(\tilde{p}_-)} \quad (83)$$

В главном приближении, как известно, $G = 0$, поэтому здесь мы должны вычислить дробь в первом порядке, а $C_+$ можно взять из решения системы (49).

$$G = \frac{\tilde{\epsilon}+\epsilon}{2\tilde{\epsilon}}(\epsilon - \tilde{\epsilon}) \frac{\sqrt{\pi} i^m}{\Delta} \frac{\frac{2\tilde{\epsilon}R}{v}\left\{\left[-J_{m+1} + \frac{m}{p}J_m\right] J_{m+1} - \left[J_m - \frac{m+1}{p}J_{m+1}\right] J_m\right\}}{-\eta^*} = \quad (84)$$

$$= \sqrt{\pi} i^m \frac{\Delta^* R \Lambda}{v\eta}; \quad (85)$$

Для малых $x$ получаем

$$G \simeq \frac{\Delta^* R}{v} \frac{\pi}{2i[(m+1)!]^2}\left(\frac{pR}{2}\right)^{2m+1} \quad (86)$$

# 4 Рассеяние на круглом сверхпроводнике в обычном материале

## 4.1 Уравнения в обычном материале

Рассмотрим, как происходит рассеяние на круглой сверхпроводящей области не в графене, а в обычном материале со скалярными волновыми функциями $u, v$. Заметим, что вид волновой функции (15) годится для любого $H$, и в частности для скалярного $H = k^2/2$, где $k$ - полный импульс (массу мы положили равной единице), который мы считаем близким к фермиевскому $p = v$. Изменяется лишь вид функций $u_{\pm\tilde{\epsilon}}$. Собственные состояния с определенным значением момента $m$ легко найти:

$$u_{Em} = [AJ_m(pr) + BY_m(pr)]\Phi_m, \tag{87}$$

$$p = \sqrt{2E_F + 2E} \tag{88}$$

соответственно, формулы для амплитуд

$$\psi = e^{ip_+x} + \frac{f_e(\theta)}{\sqrt{-ir}} e^{ip_+r} + \frac{f_h(\theta)}{\sqrt{-ir}} e^{-ip_-r} \tag{89}$$

и вид функции $\psi$ (чтобы не было путаницы, в обычном материале величины штрихованные)

$$\frac{\psi_m}{\Phi_m} = \begin{cases} C'_+ \begin{pmatrix} \Delta \\ \epsilon - \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} J_m(\tilde{p}_+r) + C'_- \begin{pmatrix} \Delta \\ \epsilon + \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} J_m(\tilde{p}_-r), r < R; \\ \begin{pmatrix} \sqrt{2\pi} i^m \\ 0 \end{pmatrix} J_m(p_+r) + \begin{pmatrix} F' H_m^{(1)}(p_+r) \\ G' H_m^{(2)}(p_-r), \end{pmatrix} \geq R \end{cases}, \tag{90}$$

$$p_\pm = \sqrt{p^2 \pm \epsilon} \simeq p \pm \epsilon/p, \tag{91}$$

$$\tilde{p}_\pm = \sqrt{p^2 \pm \tilde{\epsilon}} \simeq p \pm \tilde{\epsilon}/p. \tag{92}$$

Непрерывность волновой функции теперь дает только два уравнения - оставшиеся два получаются из требования непрерывности производной

$\psi$ в точке $R$. Получаем две пары уравнений, пользуясь формулой (29):

$$\Delta[C'_+ J_m(\tilde{p}_+) + C'_- J_m(\tilde{p}_-)] = \sqrt{2\pi} i^m J_m(p_+) + F' H_m^{(1)}(p_+) \quad (93)$$

$$(\epsilon - \tilde{\epsilon}) C'_+ J_m(\tilde{p}_+) + (\epsilon + \tilde{\epsilon}) C'_- J_m(\tilde{p}_-) = G' H_m^{(2)}(p_-) \quad (94)$$

$$\Delta[C'_+(-\tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + m J_m(\tilde{p}_+)) + C'_-(-\tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) + m J_m(\tilde{p}_-))] =$$
$$= \sqrt{2\pi} i^m (-p_+ J_{m+1}(p_+) + m J_m(p_+)) + F'(-p_+ H_{m+1}^{(1)}(p_+) + m H_m^{(1)}(p_+)) \quad (95)$$

$$(\epsilon - \tilde{\epsilon}) C'_+(-\tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + m J_m(\tilde{p}_+)) + (\epsilon + \tilde{\epsilon}) C'_-(-\tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) + m J_m(\tilde{p}_-)) =$$
$$= G'(-p_- H_{m+1}^{(2)}(p_-) + m H_m^{(2)}(p_-)) \quad (96)$$

Заметим, что при вычитании из третьего первого, а из четвертого второго, в обоих случаях с коэффициентом $m$, получается система, почти совпадающая с уравнениями сшивки в графене:

$$\begin{cases} \Delta[C'_+ J_m(\tilde{p}_+) + C'_- J_m(\tilde{p}_-)] = \sqrt{2\pi} i^m J_m(p_+) + F' H_m^{(1)}(p_+) \\ \Delta[C'_+ \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + C'_- \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-)] = \sqrt{2\pi} i^m p_+ J_{m+1}(p_+) + F' p_+ H_{m+1}^{(1)}(p_+) \\ (\epsilon - \tilde{\epsilon}) C'_+ J_m(\tilde{p}_+) + (\epsilon + \tilde{\epsilon}) C'_- J_m(\tilde{p}_-) = G' H_m^{(2)}(p_-) \\ (\epsilon - \tilde{\epsilon}) C'_+ \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + (\epsilon + \tilde{\epsilon}) C'_- \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) = G' p_- H_{m+1}^{(2)}(p_-) \end{cases} \quad (97)$$

Очевидно, что в главном приближении, когда рассеяния нет, получаются в точности те же ответы для $C'_+, C'_-$ Как и в задаче с графеном, для нахождения рассеяния в условиях $\epsilon, \tilde{\epsilon} \ll E_F = p^2/2$ нужно разложить входящие в уравнения велечины в первом порядке по малым $\epsilon, \tilde{\epsilon}$. Преобразуя так же, как для графена, получим:

$$\frac{\frac{\alpha'}{\alpha^{(0)}} J_m(\tilde{p}_+) - J_m(\tilde{p}_-)}{\frac{\alpha'}{\alpha^{(0)}} \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) - \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-))} = \frac{H_m^{(2)}(p_-)}{p_- H_{m+1}^{(2)}(p_-)} \quad (98)$$

$$\alpha'/\alpha^{(0)} = \frac{p_- H_{m+1}^{(2)}(p_-) J_m(\tilde{p}_-) - H_m^{(2)}(p_-) \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-))}{p_- H_{m+1}^{(2)}(p_-) J_m(\tilde{p}_+) - H_m^{(2)}(p_-) \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+)} \quad (99)$$

Как и в графене, первая поправка по $\epsilon$ равна нулю. Получаем в итоге для $\alpha'$

$$\alpha' = \alpha^{(0)}(1 + \frac{\gamma' \tilde{\epsilon} R}{v} + O(\epsilon^2 + \tilde{\epsilon}^2)), \quad (100)$$

$$\gamma' = -2 \frac{p H_{m+1}^{(2)}(-J_{m+1} + \frac{m}{x} J_m) - H_m^{(2)} p[J_m - \frac{m+1}{x} J_{m+1}] - \frac{1}{R} H_m^{(2)} J_{m+1}}{p H_{m+1}^{(2)} J_m - H_m^{(2)} p J_{m+1}} = \quad (101)$$

$$= 2 \frac{H_{m+1}^{(2)}(-J_{m+1} + \frac{m}{x} J_m) - H_m^{(2)}[J_m - \frac{m}{x} J_{m+1}]}{\eta} \quad (102)$$

Это выражение совпадает с выражением для $\gamma$ в графене с точностью до последнего слагаемого в числителе - здесь у нас $m/p$ вместо $(m+1)/p$. Отличие, конечно, возникает из-за предмножителей типа $\tilde{p}_\pm$ перед бесселевыми функциями.

$$\gamma' = \gamma - \frac{2}{x}\frac{H_m^{(2)} J_{m+1}}{\eta} \tag{103}$$

$$\gamma'(x \ll 1) = \begin{cases} \gamma, m > 0 \\ 2\gamma, m = 0, \end{cases} \tag{104}$$

## 4.2 Вычисление электронной амплитуды в обычном материале

Теперь вычислим $F$. Для получения соответсвующей формулы достаточно взять формулу для $B$ в графене и приставить к цилиндрическим функциям порядка $m+1$ в качестве множителя их аргумент, а $\sqrt{\pi}$ заменить на $\sqrt{2\pi}$ (это различие обусловлено нормировкой, при переходе к выражением для амплитуд рассеяния оно исчезнет):

$$F' = -\frac{[\alpha' J_m(\tilde{p}_+) + J_m(\tilde{p}_-)]\sqrt{2\pi} i^m p_+ J_{m+1}(p_+) - [\alpha' \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-)]\sqrt{2\pi} i^m J_m(p_+)}{[\alpha' J_m(\tilde{p}_+) + J_m(\tilde{p}_-)] p_+ H_{m+1}^{(1)}(p_+) - [\alpha' \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) + \tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-)] H_m^{(1)}(p_+)} \tag{105}$$

Найдем числитель, деленный на $\sqrt{2\pi}i^m$. Он равен

$$pX + pY + pZ_{p^{(2)}} + pZ_{p^{(1)}p^{(1)}} + pZ_{\alpha'^{(1)}p^{(1)}} \tag{106}$$

$$Z_{p^{(2)}} = (\alpha'+1)J_m J_{m+1}(p_+^{(2)} - \tilde{p}_+^{(2)}) = (\alpha'+1)J_m J_{m+1}\frac{\epsilon^2 - \tilde{\epsilon}^2}{2(pv)^2} = \tag{107}$$

$$= (\alpha'+1)J_m J_{m+1}\frac{-|\Delta|^2}{2(pv)^2} \tag{108}$$

$$Z_{p^{(1)}p^{(1)}} = (\alpha'+1)J_m\left(\frac{\epsilon}{pv}\right)^2[J_m - \frac{m+1}{x}J_{m+1}] - (\alpha'+1)J_m\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{pv}\right)^2[J_m - \frac{m+1}{pR}J_{m+1}] = \tag{109}$$

$$= (\alpha'+1)J_m\frac{\epsilon^2 - \tilde{\epsilon}^2}{(pv)^2}[J_m - \frac{m+1}{x}J_{m+1}] = \tag{110}$$

$$= (\alpha'+1)\frac{|\Delta|^2}{(pv)^2}\left[J_m^2 - \frac{m+1}{x}J_m J_{m+1}\right] \tag{111}$$

$$Z_{\alpha'^{(1)}p^{(1)}} = \gamma' J_m J_{m+1}\frac{\epsilon - \tilde{\epsilon}}{pv}\frac{\tilde{\epsilon}R}{v} \tag{112}$$

Здесь $Z_{p^{(2)}}$ отвечает за члены возникающие из второй поправки к новым импульсам (которых не было в графене), $Z_{p^{(1)}p^{(1)}}$ отвечает за перекрестные члены, сомножители которых из импульсов, $Z_{\alpha'^{(1)}p^{(1)}}$ отвечает за перекрестные члены $\alpha$ с новыми импульсами. Все прочие члены второго порядка уже содержатся в $X+Y$ и были сосчитаны выше. При этом в $X$ для обычного материала нужно заменить $\gamma$ на $\gamma'$. Знаменатель в $F'$ в главном порядке равен $(\alpha'+1)p\eta$. Таким образом, получается:

$$F' = \sqrt{2}B_{graphene} - \sqrt{2\pi}i^m\frac{\left(\frac{|\Delta|}{pv}\right)^2\left[J_m^2 - \left(\frac{m+1}{x} - \frac{1}{2}\right)J_m J_{m+1}\right] - \gamma'\frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2 pR}{2(pv)^2}J_m J_{m+1}}{\eta} = \tag{113}$$

$$-\sqrt{2\pi}i^m\frac{\left(\frac{|\Delta|R}{v}\right)^2\left(\frac{\left[J_m^2 - \left(\frac{m+1}{x} - \frac{1}{2}\right)J_m J_{m+1}\right]}{(x)^2} + \lambda\right) - \gamma'\frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2R^2}{2v^2}\left[\frac{J_m J_{m+1}}{pR} + \Lambda\right]}{\eta}, \tag{114}$$

причем при малых $x$

$$\frac{J_m J_{m+1}}{x} + \Lambda = -J_m^2 - J_{m+1}^2 + (m+1)\frac{2}{x}J_m J_{m+1} \simeq \tag{115}$$

$$\simeq -\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}\frac{1}{(m!)^2}\frac{2m^2 - 5m - 4}{(m+1)^2(m+2)} \tag{116}$$

Последнее выражение получено при помощи разложения бесселей при малом параметре, включая первую поправку к главному члену (в нашем списке свойств эти формулы не выписаны). Первая скобка - стоящая при $|\Delta|^2$ - определяется (при малых x) первым членом, при этом она равняется $\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2}$. Таким образом, для амплитуды при малом $x$ имеем

$$F' = -\sqrt{2\pi} i^m \frac{\left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2}\right) + \gamma' \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2 R^2}{2v^2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2} \frac{1}{(m!)^2} \frac{2m^2-5m-4}{(m+1)^2(m+2)}\right]}{\eta} = \tag{117}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2\pi} i^m \frac{i\pi}{8(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^2 - \sqrt{2\pi} i^m \frac{i\pi(2m^2-5m-4)}{2(m!)^2(m+1)^3(m+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2} \left(\frac{|\tilde{\epsilon}-\epsilon| R}{v}\right)^2, m > 0 \\ -\sqrt{2\pi} \frac{i\pi}{8} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^2 - \sqrt{2\pi} 4\pi i \left(\frac{x}{2}\right)^4 \ln(\gamma_E x/2), m = 0 \end{cases} \tag{118}$$

Отметим, что в силу простого неравенства $\frac{|\Delta|}{|\tilde{\epsilon}-\epsilon|} \geq 1$ при малых $x$ вторые слагаемые в $F$ можно выкинуть при любых моментах. Так что окончательно в нашем предельном случае

$$F' = -\sqrt{2\pi} i^m \frac{i\pi}{8(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^2 \tag{119}$$

## 4.3 Вычисление дырочной амплитуды в обычном материале

Далее, вычислим $G$:

$$G' = C'_+(\epsilon - \tilde{\epsilon}) \frac{\tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) J_m(\tilde{p}_+) - \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) J_m(\tilde{p}_-)}{\tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) H_m^{(2)}(p_-) - p_- J_m(\tilde{p}_-) H_{m+1}^{(2)}(p_-)} = \tag{120}$$

$$G' = \frac{\sqrt{2\pi} i^m}{\Delta} \frac{\tilde{\epsilon}+\epsilon}{2\tilde{\epsilon}} (\epsilon - \tilde{\epsilon}) \frac{\tilde{p}_- J_{m+1}(\tilde{p}_-) J_m(\tilde{p}_+) - \tilde{p}_+ J_{m+1}(\tilde{p}_+) J_m(\tilde{p}_-)}{p\eta} = \tag{121}$$

$$= \sqrt{2} G + \frac{\sqrt{2\pi} i^m \Delta^*}{2\tilde{\epsilon}} \frac{\frac{-2\tilde{\epsilon}}{v} J_m J_{m+1}}{p\eta} = \tag{122}$$

$$\sqrt{2} G - \sqrt{2\pi} i^m \frac{\Delta^*}{pv} \frac{J_m J_{m+1}}{\eta} = \tag{123}$$

$$\sqrt{2\pi} i^m \left[\frac{\Delta^* R \Lambda}{v\eta} - \frac{\Delta^*}{pv} \frac{J_m J_{m+1}}{\eta}\right] = \sqrt{2\pi} i^m \left(\frac{\Delta^* R}{v}\right) \left[\frac{\Lambda - \frac{J_m J_{m+1}}{x}}{\eta}\right]. \tag{124}$$

При малых $pR$ получается

$$G' = \sqrt{2\pi} i^m \left(\frac{\Delta^* R}{v}\right) \left[\frac{\Lambda - \frac{J_m J_{m+1}}{x}}{\eta}\right] = \tag{125}$$

$$= \sqrt{2\pi} i^m \left(\frac{\Delta^* R}{v}\right) \left[\frac{2\Lambda}{x}\eta\right] = 2\sqrt{2}G \tag{126}$$

$$f'_h = 2f_h. \tag{127}$$

Интересный результат - в обычном материале дырочная амплитуда вдвое больше, чем в графене. Выпишем еще формулы для амплитуд в обычном материале, выраженных через коээффициенты $F, G$. От графенных они отличаются лишь множителем $\sqrt{2}$

$$f'_{em} = \frac{i^{-m}}{\pi\sqrt{p}} F'_m e^{im\theta} \tag{128}$$

$$f'_{hm} = \frac{i^m}{\pi\sqrt{p}} G'_m e^{im\theta} \tag{129}$$

$$\tag{130}$$

# 5 Сечения рассеяния и комментарии к ним

Теперь, пользуясь формулой для сечения

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\theta \tag{131}$$

найдем парциальные сечения в каждом моменте в электронном и дырочном рассеянии для графена и обычного материала. В графене нулевой канал дается двумя слагаемыми - $J = \pm\frac{1}{2}$, тогда как в обычном материале это только момент $m = 0$. Отсюда в два раза меньший множитель в обычном материале а нулевом канале. В графене

$$\sigma_{em} = 4\pi \frac{2}{\pi^2 p} |B_m|^2 \tag{132}$$

$$\sigma_{hm} = 4\pi \frac{2}{\pi^2 p} |G_m|^2, \tag{133}$$

а в обычном материале

$$\sigma'_{em} = 4\pi \frac{2-\delta_{m0}}{\pi^2 p} |F'_m|^2 \tag{134}$$

$$\sigma'_{hm} = 4\pi \frac{2-\delta_{m0}}{\pi^2 p} |G'_m|^2, \tag{135}$$

В пределе, когда $x \ll 1$, полное сечение в главном приближении равно сечению в нулевом канале. В графене

$$\sigma_{e0} = \frac{8\pi^2}{p} \left(\frac{R}{v}\right)^4 \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left|\left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2} \ln(\gamma_E x/2)\right]\right|^2 \tag{136}$$

$$\sigma_{em>0} = \frac{2\pi^2}{p} \frac{m^2}{((m+1)!)^4} \left(\frac{R}{v}\right)^4 \left(\frac{x}{2}\right)^{4m} \left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2}\right]^2 \tag{137}$$

$$\sigma_{hm} = \frac{2\pi}{p} \frac{1}{((m+1)!)^4} \left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{4m+2}. \tag{138}$$

В обычном материале

$$\sigma'_{em} = \frac{2-\delta_{m0}}{p} \frac{\pi^2}{2(m+1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4m-2} \left(\frac{|\Delta| R}{v}\right)^4 \tag{139}$$

$$\sigma'_{hm} = 2(2-\delta_{0m}) \sigma_{hm}. \tag{140}$$

Перепишем теперь формулы так, чтобы были видны малые величины $\frac{|\Delta|}{E_F}, x$

$$\sigma_{e0} = \frac{128\pi^2}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^8 \left|\frac{\left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2} \ln(\gamma_E x/2)\right]}{E_F^2}\right|^2 \tag{141}$$

$$\sigma_{em>0} = \frac{32\pi^2}{p} \frac{m^2}{((m+1)!)^4} \left(\frac{x}{2}\right)^{4m+4} \frac{\left[|\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2}\right]^2}{E_F^4} \tag{142}$$

$$\sigma_{hm} = \frac{8\pi}{p} \frac{1}{((m+1)!)^4} \left(\frac{|\Delta|}{E_F}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{4m+4} \tag{143}$$

$$\sigma'_{em} = \frac{2-\delta_{m0}}{p} \frac{\pi^2}{2(m+1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4m+2} \left(\frac{|\Delta|}{E_F}\right)^4 \tag{144}$$

$$\sigma'_{hm} = \frac{1}{2}(2-\delta_{0m}) \sigma_{hm}. \tag{145}$$

Здесь в последних двух формулах произошло дополнительное деление на 16 и 4 соответственно, поскольку в графене $E_F = pv$, а в обычном материале $E_F = \frac{pv}{2} = \frac{p^2}{2}$. Именно поэтому формулы для $\sigma'_h$ получаются разные. Из так записанных формул видно, например, что выражение для электронной амплитуды необязательно расходится при малых импульсах - просто формула (139) перестает работать как только энергия Ферми становится порядка щели или энергии электрона. Из формулы (144) видно, что расходимость при $p \to 0$ возникает именно из-за множителя $\frac{|\Delta|}{E_F}$. Если же мы хотим перейти к пределу, в котором полученные формулы применимы, надо привязать $\Delta, \epsilon$ к $E_F$ и устремлять их одновременно к нулю. Полагая $\frac{\epsilon}{E_F} = const$, $\frac{\Delta}{E_F} = const$, видим, что при фиксированном $R$ и $p \to 0$

$$\sigma_{e0} \sim \frac{(pR)^8}{p} \left| \frac{\left[ |\Delta|^2 - \frac{(\tilde{\epsilon}-\epsilon)^2}{2} \ln(\gamma_E x/2) \right]}{E_F^2} \right|^2 \tag{146}$$

$$\sigma_{h0} \sim \frac{(pR)^4}{p} \left( \frac{|\Delta|}{E_F} \right)^2 \tag{147}$$

$$\sigma'_{e0} \sim \frac{(pR)^2}{p} \left( \frac{|\Delta|}{E_F} \right)^4 \tag{148}$$

$$\sigma'_{h0} \sim \frac{(pR)^4}{p} \left( \frac{|\Delta|}{E_F} \right)^2 \tag{149}$$

Итак, все сечения в этом пределе стремятся к нулю. Довольно неожиданно, что по параметру $pR$ в графене электронное рассеяние исчезает быстрее, чем андреевское, тогда как в обычном материале, напротив, при малых $pR$ доминирует именно электронное. Очевидное же сходство рассеяния в графене и обычном материале - по малым величинам $\frac{\Delta}{E_F}$ и $\frac{\epsilon}{E_F}$ электронное рассеяние спадает, как четвертая степень, а андреевское - квадратично. Кроме того, необычный вид имеет $\sigma_{e0}$. Для сравнения с нашими формулами приведем также низкоэнергетическое сечение в графене на обычном прямоугольном барьере в круглой области, взятое из работы [4]:

$$\sigma \sim \frac{(pR)^2}{p} \tag{150}$$

Видно, что в графене низкоэнергетическое рассеянии на сверхпроводящем диске гораздо слабее, чем на обычном потенциале.

Важным свойством является описанное уже в главе 3.1 полное отсутствие электронного рассеяния назад и дырочного вперед в каждой паре каналов $m, -m-1$.

# 6 Дальнейшие планы

В принципе, полученные промежуточные формулы для амплитуд типа (114) выведены лишь в предположении $\Delta, \epsilon \ll E_F, \frac{v}{R}$, так что их можно использовать для того, чтобы получить сечения при $pR \gg 1$. Пока неясно, является ли $pR \gg 1$ достаточным условием квазиклассичности, то есть условием того, что рассеяние на сверхпроводнике можно рассматривать отдельно в каждой точке границы, как рассеяние на плоской $SN$-границе? Вполне вероятно, что требуется также $\Delta, \epsilon \gg \frac{v}{R}$, то есть в частности $\frac{v}{\Delta} = \xi \ll R$, что делает наше решение неприменимым на гораздо более раннем этапе - в момент разложения цилиндрических функций вблизи $pR$?

Кроме того, интересно решить задачу, когда $\epsilon, \Delta, E_F$ одного порядка. Если все они при этом малы по сравнению с $\frac{v}{R}$, то можно снова воспользоваться поведением бесселей вблизи нуля. При этом может возникнуть зеркальное андреевское рассеяние ([2])- оно будет иметь место, когда $\epsilon > E_F$. Также любопытны случаи, когда, например $E_F \simeq \epsilon$ - в этом случае импульс отраженных дырок очень мал. Как это повлияет на сечение $f_h$?

Интересно, как скажется необычный вид сечения и запрет рассеяния электрона назад (и дырки вперед) на проводимости графена, загрязненного сверхпроводящими островками? Какой окажется андреевская проводимость островка, то есть какой потечет ток, если приложить напряжение между сверхпроводником и графеном?

# Список литературы


[1] *Andreev reflection and Klein tunneling in graphene*, by C. W. J. Beenakker, (arxiv: 0710.3848v2, 2007).

[2] *Specular Andreev reflection in graphene*, by C. W. J. Beenakker, (arxiv: cond-mat/0604594v3, 2006)

[3] *Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene*, by M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim (arxiv: cond-mat/0604323v2, 2006)

[4] *Elastic scattering theory and transport in graphene*, by D. S. Novikov, (arxiv: 0706.1391v3, 2007)

[5] A.F. Andreev, Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964)

[6] Milton Abramovitz, Irene A. Stegun *Handbook of mathematical functions*