Министрерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный Университет)

Бакалаврская диссертация

Пространственная запутанность электронов при наличии кулоновского взаимодействия.

Выполнил:
Студент 428 группы
Вышневый А.А.

Научный руководитель:
Д.ф.-м.н. Лесовик Г.Б.

Москва, 2008г

Содержание

1 Введение.

Запутанные квантовые состояния являются одним из важнейших понятий, порожденных квантовой механикой. Повышенный интерес к таким состояниям связан, с одной стороны, с тем, что такие состояния наиболее ясно демонстрируют фундаментальное свойство нелокальности квантовой теории, и имеют, с другой стороны, потенциально большие возможности для практического применения в квантовых вычислениях и квантовой криптографии.

Начнем с рассмотрения мысленного эксперимента, придуманного Эйнштейном, Подольским и Розеном(ЭПР) [2] в интерпретации Бома [3] (ЭПР рассматривали пространственно запутанное состояние, а Бом — запутанное по спину). Рассмотрим две частицы со спином 1/2 , находящиеся в удаленных точках A и B пространства. Пусть в точках A и B находятся два наблюдателя: Алиса и Боб, каждый из которых может измерять проекцию спина частицы $s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a})$ и $s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b})$ на произвольно выбранные направления $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в пространстве соответственно. Будем считать, что наблюдаемая может принимать значения $+1$ или -1 в зависимости от того, сонаправлен ли измеряемый спин с выбранным направлением или нет. Пусть две измерямые частицы находятся в синглетном состоянии, т.е. их суммарный спин равен нулю. Тогда если Алиса и Боб выбрали одно и то же направление, то всегда, когда Алиса будет в результате измерения получать $s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a}) = \pm 1$, то Боб гарантированно получит $s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b} = \mathbf{a}) = \mp 1$. Таким образом, измерения оказались полностью скоррелированными. Внешне дело выглядит таким образом, что измерение Алисы в точке A *мгновенно* повлияло на состояние частицы в точке B.

Один из возможных способов преодоления подобного парадокса состоит в том, что на самом деле результаты измерений $s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a})$ и $s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b})$ известны заранее и определяются значением "скрытой"переменной λ, функция распределения которой $\rho(\lambda)$:

$$s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a}) = s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a}, \lambda), \qquad s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b}) = s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b}, \lambda). \tag{1}$$

Как показал Белл [4], условия локальности (1) накладывают ограничения на возможные результаты измерений. Определим коррелятор:

$$E(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \langle s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a}) s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b}) \rangle. \tag{2}$$

Если все зависит от скрытого параметра, то (2) примет вид:

$$E(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\mathrm{A}}(\mathbf{a}, \lambda) s_{\mathrm{B}}(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda. \tag{3}$$

Если Алиса и Боб выбрали два направления в пространстве ($\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{b}}$ соответственно), то будет верно следующее нер-во на двухчастичные корреляторы (неравенство Белла в форме Клаузера-Хорна [5]):

$$\frac{1}{2}|E(\mathbf{a};\mathbf{b}) + E(\bar{\mathbf{a}};\mathbf{b}) + E(\mathbf{a};\bar{\mathbf{b}}) - E(\bar{\mathbf{a}};\bar{\mathbf{b}})| \leq 1. \tag{4}$$

Однако оказалось, что в случае синглетного состояния двух частиц существует такой набор направлений $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{b}}$, что неравентво (4) нарушается. Это показало, что гипотеза локальных скрытых переменных неверна. Более того, для оператора Белла

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}} + \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{a}}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}} + \hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{b}}} - \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{a}}} \otimes \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{b}}}). \tag{5}$$

выполнены следующие свойства:

- Если двухчастичное состояние *факторизуемо*, т.е. $\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$, то ни при каких $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{b}}$ неравенство Белла $\langle\hat{B}\rangle \leq 1$ не нарушается.

- Если состояние нефакторизуемо, то существует набор четырех направлений в пространстве, для которого неравенство Белла нарушено. [14, 15, 16]

- Квадрат оператора Белла

  $$\hat{B}^2 = 1 + \sin\alpha \sin\beta \hat{\sigma}_{\mathbf{m}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{n}}, \tag{6}$$

  где α и β — углы между векторами $\mathbf{a}$ и $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ соответственно, $\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{a}\times\bar{\mathbf{a}}]}{|[\mathbf{a}\times\bar{\mathbf{a}}]|}$, $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{b}\times\bar{\mathbf{b}}]}{|[\mathbf{b}\times\bar{\mathbf{b}}]|}$

- Из (6) следует, что среднее занчение оператора Белла не может превышать $\sqrt{2}$. [11]

Найдем максимально возможное среднее значение оператора Белла для заданного двухчастичного спинового состояния

$$\Psi = \alpha_{\uparrow\uparrow}\psi_\uparrow\phi_\uparrow + \alpha_{\uparrow\downarrow}\psi_\uparrow\phi_\downarrow + \alpha_{\downarrow\uparrow}\psi_\downarrow\phi_\uparrow + \alpha_{\downarrow\downarrow}\psi_\downarrow\phi_\downarrow, \tag{7}$$

которому поставим соответсвие матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha_{\uparrow\uparrow} & \alpha_{\uparrow\downarrow} \\ \alpha_{\downarrow\uparrow} & \alpha_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}$. Сначала сосчитаем линейную энтропию одной из частиц для такого состояния. Линейная энтропия частицы по определению равна $I = Tr(\hat{\rho} - \hat{\rho}^2)$, где ρ —

матрица плотности для частицы. Итак, матрица плотности первой частицы в таком состоянии

$$\hat{\rho} = Tr(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_m \langle\phi_m|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi_m\rangle =$$

$$= |\alpha_{\uparrow\uparrow}\psi_\uparrow + \alpha_{\downarrow\uparrow}\psi_\downarrow\rangle\langle\alpha_{\uparrow\uparrow}\psi_\uparrow + \alpha_{\downarrow\uparrow}\psi_\downarrow| + |\alpha_{\uparrow\downarrow}\psi_\uparrow + \alpha_{\downarrow\downarrow}\psi_\downarrow\rangle\langle\alpha_{\uparrow\downarrow}\psi_\uparrow + \alpha_{\downarrow\downarrow}\psi_\downarrow| =$$
$$= (\alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\uparrow\uparrow} + \alpha_{\uparrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow})|\psi_\uparrow\rangle\langle\psi_\uparrow| + (\alpha_{\downarrow\uparrow}\alpha^*_{\uparrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow})|\psi_\downarrow\rangle\langle\psi_\uparrow| +$$
$$+(\alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} + \alpha_{\uparrow\downarrow}\alpha^*_{\downarrow\downarrow})|\psi_\uparrow\rangle\langle\psi_\downarrow| + (\alpha_{\downarrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\downarrow\downarrow})|\psi_\downarrow\rangle\langle\psi_\downarrow| =$$
$$= \begin{pmatrix} |\alpha_{\uparrow\uparrow}|^2 + |\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2 & \alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow} \\ \alpha_{\downarrow\uparrow}\alpha^*_{\uparrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow} & |\alpha_{\downarrow\uparrow}|^2 + |\alpha_{\downarrow\downarrow}|^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Линейную энтропию удобно считать через собственные значения ρ_1 и ρ_2 матрицы плотности. Тогда она равна $I = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2) - (\rho_1 + \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2$. Уравнение на собственные значения имеет вид

$$\begin{vmatrix} |\alpha_{\uparrow\uparrow}|^2 + |\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2 - \rho & \alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow} \\ \alpha_{\downarrow\uparrow}\alpha^*_{\uparrow\uparrow} + \alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow} & |\alpha_{\downarrow\uparrow}|^2 + |\alpha_{\downarrow\downarrow}|^2 - \rho \end{vmatrix} = 0,$$
$$\rho^2 - \rho + P = 0. \tag{9}$$

, где $P = (|\alpha_{\uparrow\uparrow}|^2+|\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2)(|\alpha_{\downarrow\uparrow}|^2+|\alpha_{\downarrow\downarrow}|^2)-(\alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow}+\alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow})(\alpha_{\downarrow\uparrow}\alpha^*_{\uparrow\uparrow}+\alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow}) = |\alpha_{\uparrow\uparrow}|^2|\alpha_{\downarrow\downarrow}|^2 + |\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2|\alpha_{\downarrow\uparrow}|^2 - \alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha_{\downarrow\downarrow}\alpha^*_{\uparrow\downarrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} - \alpha^*_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\downarrow}\alpha_{\uparrow\downarrow}\alpha_{\downarrow\uparrow} = \alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha_{\downarrow\downarrow}(\alpha^*_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\downarrow} - \alpha^*_{\uparrow\downarrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow}) + \alpha_{\uparrow\downarrow}\alpha_{\downarrow\uparrow}(\alpha^*_{\uparrow\downarrow}\alpha^*_{\downarrow\uparrow} - \alpha^*_{\uparrow\uparrow}\alpha^*_{\downarrow\downarrow}) = |\alpha_{\uparrow\uparrow}\alpha_{\downarrow\downarrow} - \alpha_{\uparrow\downarrow}\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2 = |\det A|^2$

Согласно теореме Виета для (9)

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \qquad \rho_1\rho_2 = P,$$

поэтому линейная энтропия

$$I = 1 - 1 + 2P = 2P = 2|\det A|^2. \tag{10}$$

Как известно, любое состояние $\Psi_{AB} \in C_A^p \times C_B^q$ двух квантовых систем A и B может быть представлено в виде разложения Шмидта [18]:

$$\Psi_{AB} = \sum_{i=1}^{d} c_i|u_i\rangle_A|v_i\rangle_B, \quad d = \min\{p, q\}, \tag{11}$$

где $|u_i\rangle_A$, $|v_i\rangle_B$ — ортонормированные базисы состояний в подсистемах A и B соответственно. В случае двух частиц со спином $\frac{1}{2}$ имеем:

$$\Psi = \alpha|+\mathbf{n}\rangle_A|+\mathbf{m}\rangle_B + \beta|-\mathbf{n}\rangle_A|-\mathbf{m}\rangle_B, \tag{12}$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ - единичные векторы в трехмерном пространcтве, $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$

Для состояния, разложенного по Шмидту, линейная энтропия из (10) получается равной $I = 2|\alpha\beta|^2$. Максимальное среднее оператора Белла при этом равно [1]

$$\langle B \rangle_{max} = \sqrt{1 + 4|\alpha\beta|^2} = \sqrt{1 + 2I} \qquad (13)$$

Полученная связь между линейной энтропией и $\langle B \rangle_{max}$ верна, очевидно, не только когда двухчастичное состояние разложено по Шмидту. Поэтому для двухчастичного состояния, заданного матрицей A

$$\langle B \rangle_{max} = \sqrt{1 + 4|\det A|^2}. \qquad (14)$$

Степень нарушения неравенства Белла($\langle B \rangle_{max} - 1$) можно понимать как количественную меру запутнности двухчастичного квантового состояния. При этом не обязательно, чтоб это состояние было спиновым. Достаточно, чтоб пространство состояний двухчастичной системы имело вид $C_A^2 \times C_B^2$, а в некоторых случаях (о них речь пойдет позже) даже это не обязательно. При наличии схемы измерений, аналогичной измерению проекции спина в описанном эксперименте ЭПР, можно вводить корреляторы $E(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ и для них смотреть, выполненено ли неравенство Белла (4)

2 Экспериментальное обнаружение пространственной запутанности

2.1 Схема экспериментальной установки

Установка состоит из четырех безотражательных делителей, соединенных проводами, между двумя из которых в заштрихованной области имеется емкостное взаимодействие (т е если в ней находятся два электрона, то у них появляется взаимная энергия). Через входы, обозначенные $R0$ и $R0'$ одновременно запускаются два электрона (волновые пакеты с некоторой характерной длиной ξ). Кулоновская энергия взаимодействия электронов приводит к набегу дополнительной фазы у волновой функции электронов, которая в конечном счете и приведет к появлению запутанности. Далее на выходах R, L и R', L' измеряется число одновременных попаданий электронов $N_{RR'}$ в выходы R и R', $N_{RL'}$ в выходы R и L' и т. д. После этих измерений считается белловский кореллятор

$$E(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{N_{RR'} + N_{LL'} - N_{LR'} - N_{RL'}}{N}, \qquad (15)$$

где N — полное число запусков частиц, а правило, по которому заданной конфигурации установки сопоставляются вектора **a** и **b**, будет пояснено позже. Также через каждый из замкнутых контуров между последовательно расположенными делителями может быть пропущен магнитный поток(Φ через левое кольцо и Φ' через правое).

Каждый делитель представляет из себя рассеиватель с четырьмя выходами. Рассеиватель должен быть подобран таким образом, чтобы электрон, будучи запущенным в любой из выходов, не рассеивался назад.

Теперь кратко обсудим механизм возникновения запутанности в такой установке. В начальный момент времени, когда электроны находятся во входах $R0$ и $R0'$, их совместное состояние имеет вид $|\Psi\rangle = |\psi_{R0}\rangle|\phi_{R0'}\rangle$. Далее, после прохождения первых делителей, состояние описывается следующим вектором

$$|\Psi\rangle = \alpha_{R1R1}|\psi_{R1}\rangle|\phi_{R1'}\rangle + \alpha_{L1R1}|\psi_{L1}\rangle|\phi_{R1'}\rangle + \\ + \alpha_{R1L1}|\psi_{R1}\rangle|\phi_{L1'}\rangle + \alpha_{L1L1}|\psi_{L1}\rangle|\phi_{L1'}\rangle, \quad (16)$$

однако оно все еще факторизуемо. После прохождения области кулоновского взаимодействия $|\psi_{R1}\rangle|\phi_{R1'}\rangle$ приобретает дополнительную фазу Φ_0 и с этого момента состояние

$$|\Psi\rangle = e^{i\Phi_0}\alpha_{R1R1'}|\psi_{R1}\rangle|\phi_{R1'}\rangle + \alpha_{L1R1'}|\psi_{L1}\rangle|\phi_{R1'}\rangle + \\ + \alpha_{R1R1'}|\psi_{R1}\rangle|\phi_{L1'}\rangle + \alpha_{L1L1'}|\psi_{L1}\rangle|\phi_{L1'}\rangle, \quad (17)$$

более не является факторизуемым. Далее происходит набор фазы за счет эффекта Аронова-Бома и прохождение вторых делителей, но эти события уже не влияют на запутанность состояния. Вторые делители влияют на величины N_{IJ}, но не на саму запутанность, поэтому далее их будем называть измерительными. Именно параметры измерительных делителей и величины аронов-бомовских фаз задают вектора **a** и **b**, указанные в корелляторе. Заменой измерительных делителей и величин АБ фаз, мы получим возможность измерять белловский кореллятор для других векторов. После измерений четырех корелляторов ($E(\mathbf{a};\mathbf{b})$, $E(\bar{\mathbf{a}};\mathbf{b})$, $E(\mathbf{a};\bar{\mathbf{b}})$ и $E(\bar{\mathbf{a}};\bar{\mathbf{b}})$), можно проверить, выполнено ли неравенство Белла (4). Его нарушение и будет доказательством того, что полученное состояние действительно является запутанным.

2.2 Параметризация безотражательного делителя

Последовательное изучение предложенной экспериментальной установки начнем с делителей. S - матрица делителя имеет размер 4x4. Будем считать рассеиватель обратимым по времени. Матрица рассеяния должна в таком случае удовлетворять условиям $SS^{\dagger} = 1$ и $S = S^{T}$.

$$S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{21} & t_{31} & t_{41} \\ t_{21} & r_{22} & t_{32} & t_{42} \\ t_{31} & t_{32} & r_{33} & t_{43} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & r_{44}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_{31} & t_{41} \\ 0 & 0 & t_{32} & t_{42} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

где были учтены требование безотражательности делителя ($r_{ii} = 0$), а также то, что любой входящий пучок должен делиться на два, а не на три пучка.

Условие унитарности в таком случае записывается довольно просто

$$\begin{cases} T_{31} + T_{41} = 1, \quad t_{31}t_{32}^{*} + t_{41}t_{42}^{*} = 0, \\ T_{32} + T_{42} = 1, \quad t_{31}t_{41}^{*} + t_{32}t_{42}^{*} = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

При этом $T_{ij} = |t_{ij}|^2$. Решение нужно искать в виде:

$$\begin{aligned} t_{31} &= \cos\theta e^{i\delta_1}, \\ t_{41} &= \sin\theta e^{i\delta_2}, \\ t_{32} &= \sin\theta e^{i\delta_3}, \\ t_{42} &= \cos\theta e^{i\delta_4}, \end{aligned}$$

после подстановки которого в систему получаем соотношение

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_3 - \delta_4 + \pi. \qquad (20)$$

Окончательный ответ имеет вид

$$t_{31} = \cos\theta e^{i\delta_1}, \qquad (21)$$

$$t_{41} = \sin\theta e^{i\delta_2}, \qquad (22)$$

$$t_{32} = \sin\theta e^{i(\delta_3+\delta_1)}, \qquad (23)$$

$$t_{42} = -\cos\theta e^{i(\delta_3+\delta_2)}. \qquad (24)$$

Отдельно рассмотрим случай симметричного делителя ($t_{32} = t_{41}, t_{31} = t_{42}$). Тогда

$$\begin{aligned} t_{31} &= \cos\theta, \\ t_{41} &= i\sin\theta, \\ t_{32} &= i\sin\theta, \\ t_{42} &= \cos\theta. \end{aligned} \qquad (25)$$

2.3 Матричное описание двухчастичных состояний системы

Во введении при расчете максимально возможного нарушения неравенства Белла уже прдлагалось двухчастичному состоянию типа

$$|\Psi\rangle = \alpha_{RR}|\psi_R\rangle|\phi_{R'}\rangle + \alpha_{RL}|\psi_R\rangle|\phi_{L'}\rangle + \alpha_{LR}|\psi_R\rangle|\phi_{R'}\rangle + \alpha_{LL}|\psi_R\rangle|\phi_{R'}\rangle$$

поставить в соответствие матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha_{RR} & \alpha_{RL} \\ \alpha_{LR} & \alpha_{LL} \end{pmatrix}$. В этом разделе эта идея будет развита, а также использована для нахождения двухэлектронной функции на выходе из системы.

Рассмотрим сначала изменение A-матрицы системы после прохода первой частицей делителя. В нашем случае это прохождение эквивалентно следующей замене

$$\begin{aligned} \psi_R &\to \beta_{RR}\psi_R + \beta_{RL}\psi_L, \\ \psi_L &\to \beta_{LR}\psi_R + \beta_{LL}\psi_L. \end{aligned} \tag{26}$$

где β_{RR} — коэффициент прохождения из правого нижнего канала в правый верхний, остальные параметры определяются аналогично. Дальнейшие преобразования будем производить без знаков кет-векторов. Итак, состояние системы после прохождения делителя

$$\begin{aligned} \Psi = \alpha_{RR}(\beta_{RR}\psi_R + \beta_{RL}\psi_L)\phi_{R'} + \alpha_{RL}(\beta_{RR}\psi_R + \beta_{RL}\psi_L)\phi_{L'} + \\ + \alpha_{LR}(\beta_{LR}\psi_R + \beta_{LL}\psi_L)\phi_{R'} + \alpha_{LL}(\beta_{RR}\psi_R + \beta_{RL}\psi_L)\phi_{L'} = \\ = \psi_R\phi_{R'}(\alpha_{RR}\beta_{RR} + \alpha_{LR}\beta_{LR}) + \psi_R\phi_{L'}(\alpha_{RL}\beta_{RR} + \alpha_{LL}\beta_{LR}) + \\ + \psi_L\phi_{R'}(\alpha_{RR}\beta_{RL} + \alpha_{LR}\beta_{LL}) + \psi_L\phi_{R'}(\alpha_{RL}\beta_{RL} + \alpha_{LL}\beta_{LL}). \end{aligned} \tag{27}$$

Соответствующая ему A-матрица

$$\begin{aligned} A' = \begin{pmatrix} \alpha_{RR}\beta_{RR} + \alpha_{LR}\beta_{LR} & \alpha_{RL}\beta_{RR} + \alpha_{LL}\beta_{LR} \\ \alpha_{RR}\beta_{RL} + \alpha_{LR}\beta_{LL} & \alpha_{RL}\beta_{RL} + \alpha_{LL}\beta_{LL} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \beta_{RR} & \beta_{LR} \\ \beta_{RL} & \beta_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{RR} & \alpha_{RL} \\ \alpha_{LR} & \alpha_{LL} \end{pmatrix} = B^T A. \end{aligned} \tag{28}$$

Под матрицей B подразумевается $\begin{pmatrix} \beta_{RR} & \beta_{RL} \\ \beta_{LR} & \beta_{LL} \end{pmatrix}$. Аналогичное вычисление конечной A-матрицы проделаем и в случае, когда через делитель проходит только вторая частица. Соответствующая замена

$$\begin{aligned} \phi_R &\to \beta_{RR}\phi_R + \beta_{RL}\phi_L, \\ \phi_L &\to \beta_{LR}\phi_R + \beta_{LL}\phi_L. \end{aligned} \tag{29}$$

А-матрица конечного состояния

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{RR}\beta_{RR} + \alpha_{RL}\beta_{LR} & \alpha_{RR}\beta_{RL} + \alpha_{RL}\beta_{LL} \\ \alpha_{LR}\beta_{RR} + \alpha_{LL}\beta_{LR} & \alpha_{LR}\beta_{RL} + \alpha_{LL}\beta_{LL} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \alpha_{RR} & \alpha_{RL} \\ \alpha_{LR} & \alpha_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{RR} & \beta_{RL} \\ \beta_{LR} & \beta_{LL} \end{pmatrix} = AB. \quad (30)$$

Если же обе частицы проходят через свои делители (заданные матрицами B и B' соответственно), то происходят обе замены и конечное состояние имеет вид

$$A' = B^T A B'. \quad (31)$$

Из этого равенства следует, что величина запутанности системы не изменяется после прохождения делителей. Действительно, линейная энтропия, как и максимальное нарушение неравенства Белла, зависит только от $|\det A|$, а так как в нашем случае $|\det B| = 1$ $|\det B'| = 1$, то $|\det A'| = |\det B||\det A||\det B'| = |\det A|$, поэтому она не изменяется.

В нашей установке будем считать делители симметричными (25). Определим, при какой конфигурации входных делителей и величине кулоновского набега фазы получится максимально запутанное состояние. Обозначим их параметры θ_0 и θ_0' соответственно. А-матрица на входе $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. После прохождения входных делителей

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & i\sin\theta_0 \\ i\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0' & i\sin\theta_0' \\ i\sin\theta_0' & \cos\theta_0' \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 \\ i\sin\theta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0' & i\sin\theta_0' \\ i\sin\theta_0' & \cos\theta_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0\cos\theta_0' & i\cos\theta_0\sin\theta_0' \\ i\sin\theta_0\cos\theta_0' & -\sin\theta_0 sin\theta_0' \end{pmatrix} \quad (32)$$

После кулоновского набега фазы

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\Phi_0}\cos\theta_0\cos\theta_0' & i\cos\theta_0\sin\theta_0' \\ i\sin\theta_0\cos\theta_0' & -\sin\theta_0 sin\theta_0' \end{pmatrix} \quad (33)$$

Линейная энтропия такого состояния

$$I = 2|\det A|^2 = \\ = 2\left|-e^{i\Phi_0}\cos\theta_0\sin\theta_0\cos\theta_0' sin\theta_0' + \cos\theta_0\sin\theta_0\sin\theta_0'\cos\theta_0'\right|^2 = \\ = 2\left|\frac{\sin 2\theta_0}{2}\frac{\sin 2\theta_0'}{2}(1-e^{i\Phi_0})\right|^2 = 2\left|e^{i\Phi_0/2}\frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_0' \sin(\Phi_0/2)}{2}\right|^2 = \\ = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta_0 \sin^2 2\theta_0' \sin^2(\Phi_0/2). \quad (34)$$

достигает своего максимального значения $1/2$ при $\theta_0 = \theta_0' = \pi/4$ и $\Phi_0 = \pi$ (Такой же энтропией обладает синглетное состояние, в котором максимально нарушается неравенство Белла)

Дальнейшие рассуждения будем проводить для указанной конфигурации с максимальной запутанностью. Пусть θ и θ' — параметры выходных делителей, а Φ и Φ' — эффективные аронов-бомовские разности фаз, учитывающие не только сам эффект, но и набеги фаз из-за разных длин проводов а также возможную ассиметрию делителей. А-матрица системы после прохожления области кулоновского взаимодействия в рассматриваемом случае $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ После набега фаз Φ и Φ'

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{i}{2}e^{i\Phi'} \\ \frac{i}{2}e^{i\Phi} & -\frac{1}{2}e^{i(\Phi+\Phi')} \end{pmatrix}$$

Конечная А-матрица (после прохождения измерительных делителей)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{i}{2}e^{i\Phi'} \\ \frac{i}{2}e^{i\Phi} & -\frac{1}{2}e^{i(\Phi+\Phi')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & i\sin\theta' \\ i\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}e^{i\Phi}\sin\theta & \frac{i}{2}e^{i\Phi'}\cos\theta - \frac{i}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\sin\theta \\ \frac{i}{2}e^{i\Phi}\cos\theta - \frac{i}{2}\sin\theta & -\frac{1}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\cos\theta - \frac{1}{2}e^{i\Phi'}\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & i\sin\theta' \\ i\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{35}$$

Выпишем результат поэлементно

$$\alpha_{RR} = -\frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta' - \frac{1}{2}e^{i\Phi}\sin\theta\cos\theta' - \frac{1}{2}e^{i\Phi'}\cos\theta\sin\theta' + \frac{1}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\sin\theta\sin\theta', \tag{36}$$

$$\alpha_{RL} = -\frac{i}{2}\cos\theta\sin\theta' - \frac{i}{2}e^{i\Phi}\sin\theta\sin\theta' + \frac{i}{2}e^{i\Phi'}\cos\theta\cos\theta' - \frac{i}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\sin\theta\cos\theta', \tag{37}$$

$$\alpha_{LR} = -\frac{i}{2}\sin\theta\cos\theta' + \frac{i}{2}e^{i\Phi}\cos\theta\cos\theta' - \frac{i}{2}e^{i\Phi'}\sin\theta\sin\theta' - \frac{i}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\cos\theta\sin\theta', \tag{38}$$

$$\alpha_{LL} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\theta' - \frac{1}{2}e^{i\Phi}\cos\theta\sin\theta' - \frac{1}{2}e^{i\Phi'}\sin\theta\cos\theta' - \frac{1}{2}e^{i(\Phi+\Phi')}\cos\theta\cos\theta'. \tag{39}$$

Значение коррелятора опреляется по формуле

$$E(\mathbf{a};\mathbf{b}) = |\alpha_{RR}|^2 + |\alpha_{RR}|^2 + |\alpha_{RR}|^2 + |\alpha_{RR}|^2. \tag{40}$$

2.4 Спиновая аналогия

Найдем такие конфигурации измерительных делителей, чтобы неравенство Белла нарушалось максимально. Очевидно, что прямо это сделать путем максимизации выражения для среднего значения оператора Белла, выраженного через полученные в прошлом разделе явные формулы для α_{IJ} практически невозможно по причине очень большого объема вычислений.

Для решения задачи состоянию ψ_R ставится в соответствие состояние частицы со спином $\frac{1}{2}$, в котором проекция спина на ось z равна $+1/2$ ψ_+, а состоянию ψ_L — ψ_-. Тогда мы нашему двухчастичному состоянию поставим в соответствие спиновое состояние двух частиц со спином $\frac{1}{2}$ у каждой. Можно сказать что рассматриваемые нами электроны обладают "псевдоспином"$1/2$. При этом измерению белловского коррелятора $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ будет соответствовать измерение среднего значения оператора $\sigma_z \otimes \sigma_z$ по конечному состоянию. Далее можно воспользоваться тем, что при всех проводимых измерениях состояние электронов после прохода области кулоновского взаимодействия одно и то же. Поэтому нужно поставить в соответствие оператору σ_z на конечном состоянии оператор проекции спина на некоторую другую ось $\mathbf{a}$, действующем на состояние после кулоновского взаимодейтвия.

Рассмотрим пока действие операторов на одночастичные состояния. Итак, пусть изначальное состояние $\alpha_0\psi_+ + \beta_0\psi_-$ (ему ставим в соответствие столбец $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$). После прохождения измеительного делителя и набора аронов-бомовской фазы состояние изменилось и стало описываться столбцом $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Связь между этими состояниями дается формулой $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$, где S — матрица перехода, компоненты которой зависят от параметра θ делителя и фазы Φ. На конечное состояние может действовать оператор σ

$$\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},$$

$$S\begin{pmatrix}\alpha_0'\\ \beta_0'\end{pmatrix} = \sigma S\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0'\\ \beta_0'\end{pmatrix} = S^{-1}\sigma S\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}.$$

Получается, что оператору σ, действующему на конечное состояние отвечает оператор

$$\sigma' = S^{-1}\sigma S, \tag{41}$$

который действует на исходное состояние. В случае делителя с параметром θ и аронов-бомовской фазы Φ матрица перехода $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix}$ Далее можно найти вид операторов σ_x, σ_y и σ_z для состояния до прохождения делителя.

$$\hat{\sigma}'_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta e^{-i\Phi} & \cos\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ -i\sin\theta e^{-i\Phi} & -\cos\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2i\sin\theta\cos\theta e^{i\Phi} \\ -2i\sin\theta\cos\theta e^{-i\Phi} & -(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & i\sin 2\theta e^{i\Phi} \\ -i\sin 2\theta e^{-i\Phi} & -\cos 2\theta \end{pmatrix} =$$
$$= \hat{\sigma}_z \cos 2\theta - \hat{\sigma}_y \sin 2\theta \cos\Phi - \hat{\sigma}_x \sin 2\theta \sin\Phi. \tag{42}$$

Получается оператор проекции спина на ось $\mathbf{n_z}(-\sin 2\theta\sin\Phi, -\sin 2\theta\cos\Phi, \cos 2\theta)$

Аналогично находим для операторов проекций сипина на оси x и y.

$$\hat{\sigma}'_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta e^{-i\Phi} & \cos\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta e^{-i\Phi} & -i\sin\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \hat{\sigma}_x \cos\Phi - \hat{\sigma}_y \sin\Phi. \tag{43}$$

$$\hat{\sigma}'_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta e^{-i\Phi} & \cos\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sin\theta & -i\cos\theta \\ i\cos\theta e^{-i\Phi} & -\sin\theta e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta e^{i\Phi} \\ i\sin\theta & \cos\theta e^{i\Phi} \end{pmatrix} =$$
$$= \hat{\sigma}_z \sin 2\theta + \hat{\sigma}_x \cos 2\theta \sin\phi + \hat{\sigma}_y \cos 2\theta \cos\Phi. \tag{44}$$

Получилось, что делитель совершает поворот в спиновом просторанстве. Матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \cos 2\theta\sin\Phi & -\sin 2\theta\sin\Phi \\ -\sin\Phi & \cos 2\theta\cos\Phi & -\sin 2\theta\cos\Phi \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{45}$$

Переход от ветора в конечном базисе(в спиновом пространстве конечного состояния) в вектор в исходном базисе(в спиновом пространстве исходного запутанного состояния) происходит в два этапа. Сначала нужно совершить поворот вектора вокруг оси z на угол Φ по чаасовой стрелке($xyz \rightarrow$

$x'y'z'$). Затем нужно повернуть вектор вокруг оси x' на угол 2θ против часовой стрелки($x'y'z' \to x''y''z''$). Координаты связаны формулой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{46}$$

2.5 Определение параметров измерительных делителей, дающих максимальное нарушение неравентства Белла

Как уже было показано ранее, каждый делитель производит поворот в спиновом пространстве каждой частицы. При этом схема измерений, дающая среднее значение оператора произведения проекций спинов на ось z в конечном базисе (понятия исходного и конечного базиса пояснены в предыдущем разделе) $\langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle$ будет давать средне значение оператора $\hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}}$, где координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются по формуле (46) при $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 1$, а вместо θ и Φ подставляются параметры измерительного делителя первой($\mathbf{a}$) и второй($\mathbf{b}$) частицы. Для дальнейшего решения задачи требуется найти разложение Шмидта для запутанного состояния, с которым мы работаем (11). Проще всего его выполнить используя формулы (36)-(39), с явно выписанными элементами А-матрицы конечного состояния. Потребуем, чтобы $A_{21} = A_{12} = 0$. Для простоты возьмем $\Phi = \Phi' = 0$, $\theta' = 0$, тогда соответствующее уравнение примет вид

$$\cos\theta - \sin\theta = 0.$$

Возьмем одно из его решений $\theta = \pi/4$. Тогда остальные коэффициенты будут равны $A_{11} = A_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, т е при описанной конфигурации делителей состояние на выходе

$$|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_+\rangle |\phi_+\rangle + |\psi_-\rangle |\phi_-\rangle \right). \tag{47}$$

.

Дальнейший план действий состоит в том, чтобы сначала найти направления векторов $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{b}$,$\bar{\mathbf{b}}$, дающих максимальное нарушение неравенства Белла в конечном базисе, затем по формуле (46) перейти в исходный базис, а далее из векторов в исходном базисе перейти непосредственно к параметрам θ, θ' и Φ, Φ' измерительных делителей.

Итак, оператор Белла имеет вид

$$\hat{B} = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}} + \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{a}}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}} + \hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{b}}} - \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{a}}} \otimes \hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{b}}} \right)$$

Подсчитаем величину

$$\langle\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+\phi_+ + \psi_-\phi_-)\right|\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\left| -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+\phi_+ + \psi_-\phi_-)\right\rangle. \tag{48}$$

Для этого перейдем к спинорной записи ($\psi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\psi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$) и учтем, что

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\psi_+ = \hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_z\\m_x+im_y\end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\psi_- = \hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_x-im_y\\-m_z\end{pmatrix} \tag{49}$$

Теперь используем полученный результат:

$$\langle\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|\left.\begin{pmatrix}m_z\\m_x+im_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_z\\n_x+in_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m_x-im_y\\-m_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_x-in_y\\-n_z\end{pmatrix}\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left[m_zn_z + (m_x-im_y)(n_x-in_y) + (m_x+im_y)(n_x+in_y) + (-m_z)(-n_z)\right] =$$
$$= m_zn_z + m_xn_x - m_yn_y. \tag{50}$$

квадрат оператора Белла

$$\hat{B}^2 = 1 + \sin(\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}})\sin(\mathbf{b},\bar{\mathbf{b}})\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}, \tag{51}$$

где $\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{a}\times\bar{\mathbf{a}}]}{|[\mathbf{a}\times\bar{\mathbf{a}}]|}$, $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{b}\times\bar{\mathbf{b}}]}{|[\mathbf{b}\times\bar{\mathbf{b}}]|}$. Необходимое условие максимального нарушения $\langle\hat{B}^2\rangle = 2$, т е $\mathbf{a}\perp\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{b}\perp\bar{\mathbf{b}}$, а также$\langle\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\rangle = 1$. Рассмотрим вектора $\mathbf{b}'$ и $\bar{\mathbf{b}}'$, связанные с $\mathbf{b}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ соотношениями

$$b'_x = b_x; \qquad \bar{b}'_x = \bar{b}_x; \tag{52}$$
$$b'_y = -b_y; \qquad \bar{b}'_y = -\bar{b}_y; \tag{53}$$
$$b'_z = b_z; \qquad \bar{b}'_z = \bar{b}_z; \tag{54}$$

Тогда

$$\langle\hat{\sigma}_{\mathbf{a}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{b}}\rangle = (\mathbf{a},\mathbf{b}') \tag{55}$$

аналогично для остальных слагаемых из оператора Белла. А вот для $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ соотношение запишется несколько другим образом. Дело в том, что если определить $\mathbf{n}'$ как $\frac{[\mathbf{b}'\times\bar{\mathbf{b}}']}{|[\mathbf{b}'\times\bar{\mathbf{b}}']|}$, то $n'_x = -n_x$, $n'_y = n_y$, $n'_z = -n_z$ и в этом случае

$$\langle\hat{\sigma}_{\mathbf{m}}\otimes\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}\rangle = -(\mathbf{m},\mathbf{n}'). \tag{56}$$

Поскольку все рассматриваемые в работе вектора единичные, то последнее условие выполнено в том и только в том случае, когда $\mathbf{m} = -\mathbf{n}'$. Следовательно вектора $\mathbf{b}'$, $\bar{\mathbf{b}}'$, $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$ лежат в одной плоскости, перепендикулярной вектору $\mathbf{m}$. Отметим, что вектор $\mathbf{m}$ может быть выбран произвольным образом. Введем в этой плоскости систему координат x_0, y_0.(см. рис.) Углы, которые составляют вектора $\mathbf{b}'$, $\bar{\mathbf{b}}'$, $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$ с осью x равны соответственно $\phi_0 - \phi$,$\phi_0 - \phi - \pi/2$,ϕ_0,$\phi_0 + \pi/2$.

$$\langle \hat{B} \rangle = \frac{1}{2}((\mathbf{b}', \mathbf{a}) + (\bar{\mathbf{b}}', \mathbf{a}) + (\mathbf{b}', \bar{\mathbf{a}}) + (\bar{\mathbf{b}}', \bar{\mathbf{a}})) =$$
$$\frac{1}{2}(\cos\phi + \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) - \cos(\phi + \pi)) = \cos\phi - \sin\phi. \quad (57)$$

Максимальное значение, равное $\sqrt{2}$ достигается при $\phi = -\frac{\pi}{4}$, а минимальное (равное $-\sqrt{2}$) при $\phi = \frac{3\pi}{4}$. Не нарушая общности, можно выбирать оси x_0 и y_0 так, чтобы координаты соответствующих ортов были следующими

$$\mathbf{e_1^0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e_2^0} = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где α и β — сферические углы вектора $\mathbf{m}$. Тогда координаты векторов в плоскости и в пространстве связаны между собой

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \\ -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

В частности, если вектор единичный и образует с осью x_0 угол p, то

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \\ -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos p \\ \sin p \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos p - \sin\beta\sin p \\ \cos\alpha\sin\beta\cos p + \cos\beta\sin p \\ -\sin\alpha\cos p \end{pmatrix} \quad (60)$$

Обозначим

$$\tilde{\mathbf{a}}(p) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos p - \sin\beta\sin p \\ \cos\alpha\sin\beta\cos p + \cos\beta\sin p \\ -\sin\alpha\cos p \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}(p) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos p - \sin\beta\sin p \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos p - \cos\beta\sin p \\ -\sin\alpha\cos p \end{pmatrix} \quad (61)$$

Тогда

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\phi_0), \tag{62}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}(\phi_0 + \frac{\pi}{2}), \tag{63}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\phi_0 + \frac{\pi}{4}), \tag{64}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}(\phi_0 - \frac{\pi}{4}), \tag{65}$$

$$\tag{66}$$

Для перехода в исходный базис нужно воспользоваться формулой (46). В нашем случае ($\theta = \frac{\pi}{4}$, $\Phi = \Phi' = \theta' = 0$) и матрица T для первой частицы имеет простой вид (для второй частицы это вовсе единичная матрица)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Закон преобразования векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ -z'' \\ y'' \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Значит, если обозначить

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos p - \sin\beta\sin p \\ \sin\alpha\cos p \\ \cos\alpha\sin\beta\cos p + \cos\beta\sin p \end{pmatrix}, \tag{68}$$

то в исходном базисе

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\phi_0), \tag{69}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\phi_0 + \frac{\pi}{2}), \tag{70}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\phi_0 + \frac{\pi}{4}), \tag{71}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}(\phi_0 - \frac{\pi}{4}). \tag{72}$$

Каждому вектору $\mathbf{m}$ в исходном базисе соответствует набор параметров $(\theta_{\mathbf{m}}, \Phi_{\mathbf{m}})$ соответствующего ему делителя

$$\theta_{\mathbf{m}} = \frac{1}{2}\arccos m_z; \tag{73}$$

$$\Phi_{\mathbf{m}} = \mathrm{sign}(m_y)\arccos m_x. \tag{74}$$

При помощи этого выражения можно найти требуемые параметры измерительных делителей. Отметим, что пространство измерительных техник, в которых можно обнаружить максимальное нарушение неравенства Белла зависит от трех независимых параметров α, β, ϕ_0.

Особый интерес представляют случаи, когда $a_z = \bar{a}_z$, $b_z = \bar{b}_z$. При выполнении этих условий переход от одной измерительной конфигурации к другой в рамках одной серии измерений осуществляется без замены делителей, а только изменением аронов-бомовских фаз. Эти два условия понизят размерность пространства на два и параметры всех таких измерительных техник зависит только от одной независимой величины.

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta\cos\phi_0 + cos\beta\sin\phi_0 = \cos\alpha\sin\beta\cos(\phi_0+\dfrac{\pi}{2}) + cos\beta\sin(\phi_0+\dfrac{\pi}{2}) \\ -\sin\alpha\cos(\dfrac{\pi}{4}+\phi_0) = -\sin\alpha\cos(-\dfrac{\pi}{4}+\phi_0) \end{cases} \tag{75}$$

Из второго уравнеия системы следует, что $tg(\phi_0+\pi/4) = 1$, поэтому ϕ_0 может быть равно или 0 или π. Первое уравнение можно записать в виде

$$\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(\pi/4-\phi_0) = 1; \tag{76}$$

Это условие связывает между собой параметры α и β. Также имеется решение с $\sin\alpha = 0$. В этом случае $\beta+\phi_0 = \pi/4$, но при всех возможных значениях параметров β и ϕ_0 измерительная серия задается одна и та же ($\theta_{\mathbf{a}} = \theta\bar{\mathbf{a}} = \pi/8, \Phi_{\mathbf{a}} = -\Phi_{\bar{\mathbf{a}}} = -\pi/2, \theta_{\mathbf{b}} = \theta_{\bar{\mathbf{b}}} = \pi/4, \Phi_{\mathbf{b}} = 0, \Phi_{\bar{\mathbf{b}}} = -\pi/2$)

3 Заключение

В работе проведен анализ идеализированной экспериментальной схемы. Основная проблема, стоящая на пути реализации такого эксперимента состоит прежде всего в том, что указанных в работе безотражательных делителей на данный момент не существует. Для решения этой проблемы можно пойти по одному из двух путей. Первый состоит в том, чтобы видоизменить схему установки, сохранив ее суть (создание пространственно запутанного состояния при помощи кулоновского взаимодействия), и рассматривать реально достижимые варианты. Второй — в рамках предложенной конфигурации пожертвовать безотражательностью делителей и посмотреть влияние малого отражения на исход эксперимента. Если окажется, что малое отражение не помешает обнаружить нарушени неравентсва Белла, то цель будет достигнута. Далее возникает следующая проблема. Одним из ключевых моментов анализа состоял в *интерференции* волновых пакетов в измерительном делителе. А для этого нужно, чтобы они приходили к нему одновременно, что возможно, если длины путей одинаковы, или по крайней мере отличаются на величину, много меньшую характерной длины волнового пакета. Также есть требования на область кулоновского взаимодействия. Во первых при любой форме такого взаимодействия будет происходить отражение электронов назад. Для того, чтобы можно было им пренебречь, эффективный потенциал, созданный вторым электроном для первого, должен быть в достаточной мере слабым и гладким. При этом размер области взаимодействия электронов должен значительно превышать размер волнового пакета электрона. Запутанность, порожденная кулоновским взаимодействием в нашем случае не является следствием изменения формы волновых пакетов за счет взаимодействия. Необходимо детальное изучение влияния этого эффекта на исход эксперимента. Обозначенные здесь проблемы и будут изучаться в ближайшем будущем.

****

Список литературы

[1] Г. Б. Лесовик, А. В. Лебедев, К. В. Баяндин. *Квантовые запутанные состояния в электронных системах.*

[2] Einstein A., Podolsky B., Rosen N. *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

[3] Bohm D. *Quantum Theory* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1951); перевод: Бом Д. *Квантовая теория* (М.: Физматгиз, 1961).

[4] Bell J. S. *Physics* **1**, 195 (1964).

[5] Clauser J. F., Horne M. A. *Phys. Rev. D* **10**, 526 (1974).

[6] Fine A. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291 (1982).

[7] De Myunck W. M. *Phys. Lett. A* **114**, 65 (1986).

[8] Белинский А. В. *УФН* **164**, 435 (1994).

[9] Collins D., Gisin N., Linden N., Massar, Popescu S. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 040404 (2002).

[10] *The Physics of Quantum Information* (Ed. D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger) (Springer-Verlag, Berlin, 2000); перевод: *Физика квантовой информации* (под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера) (Постмаркет, Москва, 2002).

[11] Cirel'son B. S. *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).

[12] Landau L. J. *Phys. Lett. A* **120**, 54 (1987).

[13] Braunstein S. L., Mann A., Revzen M. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3259 (1992).

[14] Gisin N. *Phys. Lett. A* **154**, 201 (1991).

[15] Gisin N., Peres A. *Phys. Lett. A* **162**, 15 (1992).

[16] Popescu S., Rohrlich D. *Phys. Lett. A* **166**, 293 (1992).

[17] Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M. *Phys. Lett. A* **200**, 340 (1995).

[18] Peres A. *Quantum Theory: Contepts and Methods* (Kluwer, Dordrecht, 1993).

[19] Schumacher B. *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).