

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный Университет)

**Многофотонные резонансы в
джозефсоновском кубите,
взаимодействующем с осциллятором.**

Выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра
студента 428 гр. Зателепина А.В.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Махлин Ю.Г.

Москва, 2008г.

Содержание

1	Введение.	2
2	Многофотонные переходы.	3
3	Вывод квантового гамильтониана системы.	4
4	Квазиклассическое рассмотрение.	7
5	Заключение.	12

1 Введение.

Сверхпроводящие цепи мезоскопических размеров, изготовление которых возможно в рамках современных технологий, в определённой области параметров представляют собой квантовомеханические двухуровневые системы (кубиты), что делает их перспективными кандидатами для основы физической реализации квантовых вычислений [1]. Такие системы также интересны потому, что представляют возможность проверить применимость квантовой механики к квантово-когерентным явлениям, происходящим на больших масштабах.

В связи с этим важным представляется понимание процессов, которые происходят при взаимодействии кубита с осциллятором, который может представлять из себя длинную линию или LC-контур. Подобные задачи рассматриваются в квантовой оптике, где изучается взаимодействие атома, находящегося в полости, с модами электромагнитного излучения [2].

Все экспериментальные системы, предложенные для реализации кубитов, взаимодействуют с окружающей средой, и, следовательно, подвержены различным источникам шума. Например, наличие диссипативных элементов в схеме приводит к найквистовским флуктуациям напряжений. Поэтому при теоретическом рассмотрении необходимо учитывать потерю когерентности квантовых состояний кубита и релаксацию вследствие взаимодействия с резервуаром.

В случае резонанса, когда расстояние между уровнями кубита близко к кратному частоты осциллятора, передача энергии между двумя системами происходит эффективно. Например, для сверхпроводящих кубитов экспериментально были наблюдаемы вакуумные рабиевские осцилляции, при которых кубит когерентно поглощает и испускает квант колебаний осциллятора [3].

В данной работе рассматривается система, состоящая из кубита, связанного индуктивной связью с LC-контуром, накачиваемым извне, при этом предполагается, что осциллятор находится в квазиклассическом режиме. Кубит представляет собой сверхпроводящий островок малой ём-

кости, соединённый с остальной цепью джозефсоновскими контактами. Состояния кубита различаются количеством куперовских пар на острове [1].

Один из способов экспериментально определить состояние системы – измерить коэффициент отражения Γ сигнала накачки. Он определяется собственной частотой и затуханием осциллятора, которые зависят от состояния кубита. Например, в недавней экспериментальной работе [4] были проведены такие измерения для системы, подобной той, которая рассматривается в данной работе. Коэффициент отражения на данной частоте определяется эффективным импедансом осциллятора. Цель данной работы состоит в том, чтобы количественно рассмотреть изменение импеданса вследствие слабого взаимодействия с кубитом.

2 Многофотонные переходы.

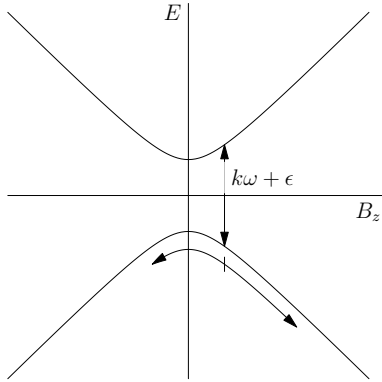


Рис. 1: Картина энергетических уровней при многофотонных переходах. Накачка синусоидальная.

Рассмотрим классические многофотонные переходы, при которых спин $1/2$ находится в классическом магнитном поле: постоянном поле $B_x = \Delta$ и синусоидально изменяемом $B_z(t) = k\omega + \epsilon + A \sin \omega t$. Здесь k – целое число, порядок резонанса. Гамильтониан принимает вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_x - \frac{1}{2}B_z(t)\sigma_z \quad (1)$$

Мы считаем, что $\Delta \ll k\omega$ так, что расстояние между уровнями $\Delta E \approx k\omega + \epsilon$. Для нахождения [5, 6] установившейся поляризации перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вокруг оси z так, что угол поворота $\phi(t) = k\omega t + (A/\omega) \sin \omega t$. В новой системе магнитное поле $B_z = \epsilon$, $B_+(t) = B_x(t) + iB_y(t) = \Delta e^{i\phi(t)}$. Воспользуемся приближе-

Мы считаем, что $\Delta \ll k\omega$ так, что расстояние между уровнями $\Delta E \approx k\omega + \epsilon$. Для нахождения [5, 6] установившейся поляризации перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вокруг оси z так,

что угол поворота $\phi(t) = k\omega t + (A/\omega) \sin \omega t$. В новой системе магнитное поле $B_z = \epsilon$, $B_+(t) = B_x(t) + iB_y(t) = \Delta e^{i\phi(t)}$. Воспользуемся приближе-

нием вращающихся волн (RWA) – оставим только нулевую гармонику поля $B_+(t)$:

$$\tilde{\Delta} = \Delta \langle \exp [ik\omega t + (A/\omega) \sin \omega t] \rangle = (-1)^k \Delta J_k \left(\frac{A}{\omega} \right)$$

Получаем $B_+(t) = \tilde{\Delta}$, то есть нулевая гармоника поля $B_y(t)$ отсутствует.

Применимость подобного приближения оправдана тем, что за большое время $1/\tilde{\Delta}$ вклад быстро осциллирующих ненулевых гармоник мал.

Будем учитывать процессы декогерентности и релаксации с помощью уравнений Блоха с феноменологически введёнными константами $\gamma_{\parallel} = 1/T_1$ и $\gamma_{\perp} = 1/T_2$:

$$\dot{\mathbf{M}} = -[\mathbf{B} \times \mathbf{M}] - \gamma_{\parallel}(M_z - M_0)\mathbf{e}_z - \gamma_{\perp}(M_x\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y) \quad (2)$$

, где $\mathbf{M} = \langle \sigma/2 \rangle$ – средняя поляризация.

Стационарное решение этих уравнений можно найти, например, в [6]

$$M_z = M_{eq} \frac{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2}}{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{\tilde{\Delta}^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}} \quad (3)$$

3 ВЫВОД КВАНТОВОГО ГАМИЛЬТониАНА СИСТЕМЫ.

Исучаемая цепь изображена на рис. 2. Осциллятор, состоящий из конденсаторов C и катушки индуктивности L , соединён индуктивно с кубитом. Стандартная процедура квантования подобных систем состоит в том, чтобы выписать классический гамильтониан и заменить в нём сверхпроводящие фазы и соответствующие импульсы на канонически сопряжённые операторы.

Обозначим через χ_1, χ_2 разность фаз между обкладками конденсаторов C , через ϕ_1 и ϕ_2 разности фаз на джозефсоновских контактах. Введём $\chi = \phi_2 - \phi_1$, $\theta = (\chi_1 + \chi_2)/2$. Сумма изменений фазы по замкнутому контуру должна быть равна $2\pi\Phi/\Phi_0$, где Φ – поток магнитного поля через

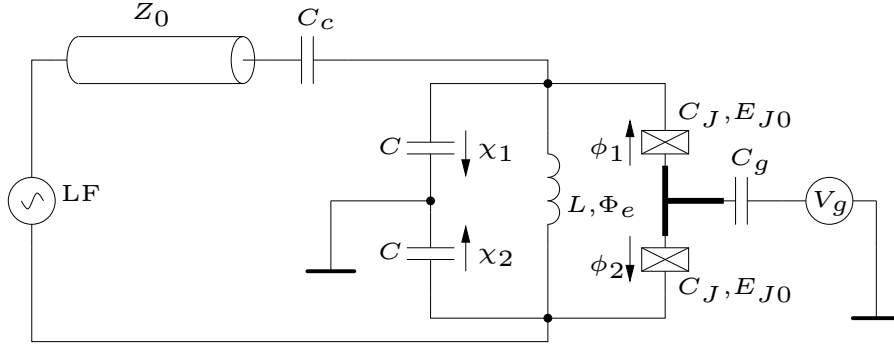


Рис. 2: Изучаемая цепь. Жирным выделен островок. Стрелками показано направление увеличения фазы.

контур, Φ_0 – квант потока. Тогда разность фаз между концами индуктивности будет $\chi - \chi_0$, где $\chi_0 = 2\pi\Phi_e/\Phi_0$. Получаем

$$V_g + V_{cg} + \frac{\dot{\phi}}{2e} + \frac{\dot{\theta}}{2e} = 0 \quad (4)$$

Здесь V_{cg} – напряжение на C_g , $\phi \equiv (\phi_1 + \phi_2)/2$.

Запишем «кинетическую», то есть зарядовую энергию системы:

$$\mathcal{K} = \frac{C_J}{8e^2} \left(2\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right) + \frac{C_g}{2} \left(V_g + \frac{\dot{\phi}}{2e} + \frac{\dot{\theta}}{2e} \right)^2 + \frac{C}{8e^2} \left(2\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\chi}^2}{2} \right) \quad (5)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\dot{\chi} = \dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2$

Найдём импульсы (можно проверить, что n совпадает с количеством лишних пар на островке):

$$n = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{C_g}{4e^2} (2eV_g + \dot{\phi} + \dot{\theta}) + \frac{C_J}{2e^2} \dot{\phi} \quad (6)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{C_g}{4e^2} (2eV_g + \dot{\phi} + \dot{\theta}) + \frac{C}{2e^2} \dot{\theta} \quad (7)$$

$$p_\chi = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\chi}} = \frac{C_J + C}{8e^2} \dot{\chi} \quad (8)$$

Отсюда выразим скорости ($\tilde{n}_g = C_g V_g / 2e$):

$$\dot{\phi} = 4e^2 \frac{(n - C_g V_g / 2e)(C_g + 2C) - (p_\phi - C_g V_g / 2e)C_g}{(C_g + 2C_J)(C_g + 2C) - C_g^2} \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = 4e^2 \frac{(p_\phi - C_g V_g / 2e)(C_g + 2C_J) - (n - C_g V_g / 2e)C_g}{(C_g + 2C_J)(C_g + 2C) - C_g^2} \quad (10)$$

$$\dot{\chi} = \frac{8e^2}{C_J + C} p_\chi \quad (11)$$

Переменная θ циклическая. Соответствующий закон сохранения $p_\theta = \text{const}$ выражает закон сохранения заряда в участке цепи правее C , но левее C_g (если принять имеющееся количество куперовских пар за нуль, константу можно не учитывать):

$$C_g V_{cg} = C \left(\frac{\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2}{2e} \right) \quad (12)$$

Кинетическая энергия, выраженная через импульсы, выглядит так (здесь положено $p_\theta = 0$ и обозначено $\alpha = \frac{2C}{2C + C_g}$, $n_g = \alpha C_g V_g / 2e$):

$$\mathcal{K} = \frac{4e^2}{C_J + C} p_\chi^2 + 4e^2 \frac{C_J}{(2C_J + \alpha C_g)^2} (n - n_g)^2 + 2\alpha e^2 C_g \frac{(nC_g + 2C_J n_g / \alpha)^2}{C_g^2 (2C_J + \alpha C_g)^2} \quad (13)$$

Видно, что ёмкость затвора C_g претерпела перенормировку и заменилась на $2CC_g / (2C + C_g)$. Обычно $C \gg C_g$ и поэтому $\alpha \approx 1$. Так как от уровня отсчёта энергии ничего не зависит, можно сдвинуть его так, чтобы дополнить энергию кубита до полного квадрата. С учётом этого запишем гамильтониан системы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\chi \dot{\chi} + n \dot{\phi} - \mathcal{K} + \frac{E_M}{2} (\chi - \chi_0)^2 - 2E_{J0} \cos \frac{\chi}{2} \cos \phi = \\ &= \frac{E_{CO}}{2} p_\chi^2 + \frac{E_M}{2} (\chi - \chi_0)^2 + \frac{E_{CQ}}{2} (n - n_g)^2 - 2E_{J0} \cos \frac{\chi}{2} \cos \phi \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $E_{CO} = \frac{8e^2}{C_J + C}$, $E_{CQ} = \frac{4e^2}{2C_J + \alpha C_g}$ – характерные зарядовые энергии осциллятора и кубита, $E_M = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}$ – характерная магнитная энергия катушки.

Для того, чтобы получить квантовый гамильтониан, нужно заменить ϕ , n и χ , p_χ операторами с каноническими коммутационными соотношениями. При этом собственные значения оператора числа пар на островке n целые. Вблизи точки вырождения $n_g = 1/2$ можно не учитывать все состояния, кроме $|n = 0\rangle$ и $|n = 1\rangle$. Тогда можно перейти к описанию на спиновом языке, приняв $|\uparrow\rangle = |1\rangle$ и $|\downarrow\rangle = |0\rangle$. Магнитное поле по оси z вблизи точки вырождения можно выписывать в линейном приближении. В результате, гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{E_{CO}}{2} p_\chi^2 + \frac{E_M}{2} (\chi - \chi_0)^2 - \frac{1}{2} \left[E_{CQ} (n_g - 1/2) \sigma_z + 2E_{J0} \cos \frac{\chi}{2} \sigma_x \right] \quad (15)$$

4 Квазиклассическое рассмотрение.

Осциллятор проще рассматривать, если ввести обычным образом операторы рождения и уничтожения:

$$a = \sqrt[4]{\frac{E_M}{4E_{CO}}} (\chi - \chi_0) + i \sqrt[4]{\frac{E_{CO}}{4E_M}} p_\chi \quad (16)$$

$$a^\dagger = \sqrt[4]{\frac{E_M}{4E_{CO}}} (\chi - \chi_0) - i \sqrt[4]{\frac{E_{CO}}{4E_M}} p_\chi \quad (17)$$

Тогда часть гамильтониана, относящаяся к осциллятору, принимает вид:

$$\mathcal{H}_O = \frac{E_{CO}}{2} p_\chi^2 + \frac{E_M}{2} (\chi - \chi_0)^2 = \omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

Здесь $\omega_c = \sqrt{E_M E_{CO}}$ – частота колебаний осциллятора.

Рассмотрим взаимодействие кубита и осциллятора вблизи точки вырождения. Это значит, что $n_g \approx 1/2$, $\chi_0 \approx \pi$, и осциллятор не слишком возбуждён, так что можно воспользоваться линейным приближением:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= -E_{J0} \cos \frac{\chi}{2} \sigma_x \approx \frac{E_{J0}}{2} ((\chi - \chi_0) + (\chi_0 - \pi)) = \\ &= \left(\frac{E_{J0}}{2} \sqrt[4]{\frac{E_{CO}}{4E_M}} (a + a^\dagger) + \frac{E_{J0}}{2} (\chi_0 - \pi) \right) \sigma_x \end{aligned} \quad (19)$$

Сделаем поворот в спиновом пространстве на $-\pi/2$ вокруг оси y , чтобы расположение осей было более привычным. При этом $z \rightarrow -x$, $x \rightarrow z$. Окончательно, учитывая накачку, приходим к гамильтониану

$$\mathcal{H} = \omega_c a^\dagger a - \frac{\Delta}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} (\beta + g(a^\dagger + a)) \sigma_z + \mathcal{E} (a^\dagger e^{-i\omega t} + a e^{i\omega t}) \quad (20)$$

Здесь $\Delta = E_{CQ}(n_g - 1/2)$, $\beta = E_{J0}(\chi_0 - \pi)$, $g = E_{J0} \sqrt{\frac{E_{CQ}}{4E_M}}$.

Для описания динамики такой системы воспользуемся методом, который описан в [7]. Перейдём к соответствующим квазиклассическим уравнениям для средних с феноменологическими членами, описывающими диссипацию. Обозначив $D = \langle \sigma_z \rangle / 2$, $v = \langle \sigma^+ \rangle$, $a = \langle \hat{a} \rangle$, получаем

$$\dot{a} = -i\omega_c a + igD - i\mathcal{E} e^{-i\omega t} - \kappa a \quad (21)$$

$$\dot{D} = i\frac{\Delta}{2}(v - v^*) - \gamma_{\parallel}(D - D_{eq}) \quad (22)$$

$$\dot{v} = i\Delta D - i[\beta + g(a^* + a)]v - \gamma_{\perp} v \quad (23)$$

Здесь мы пренебрегли отличием $\langle a\sigma^+ \rangle$ от $\langle a \rangle \langle \sigma^+ \rangle$. Это означает пренебрежение флуктуациями $\langle a \rangle$. Такое приближение оправдано в квазиклассическом случае ввиду того, что $a \gg 1$.

Представим теперь эти величины в виде $a(t) = a_0(t) + a_1(t)e^{-i\omega t}$ (что соответствует смещению положения равновесия осциллятора и переходу к представлению взаимодействия), $v(t) = v_0(t) \exp\left[-ik\omega t - 2ig \operatorname{Re}\left(\frac{ia_1 e^{-i\omega t}}{\omega}\right)\right]$ (что соответствует переходу в равномерно вращающуюся вокруг оси z систему координат), $D(t) = D_0(t) + D_1(t)e^{-i\omega t} + D_1^*(t)e^{i\omega t}$. Порядок многофотонного резонанса k и отстройка от него ϵ определяются так:

$$|\beta + 2ga_0 - k\omega| = |\epsilon|$$

Все введённые функции предполагаются медленно меняющимися на временном масштабе $1/\omega$. Естественно, при переходе в систему координат, вращающуюся относительно оси z , $D(t)$ не должно меняться. Тем не менее, мотивация рассмотрения $D_1(t)$ такова: мы хотим посмотреть, как

меняется отклик системы на накачку, то есть изменение a_1 . Видно, что в приближении RWA (то есть, если отбросить в уравнениях члены, существенно меняющиеся на временах $1/\omega$) влияние кубита на a_1 описывается гармоникой $D_1(t)$. А средняя поляризация $D_0(t)$ в этом приближении вообще не влияет на a_1 . Отметим, что появление $a_0(t)$ изменяет отстройку от резонанса, которую теперь необходимо находить самосогласованно.

Теперь можно записать уравнения для амплитуд в приближении RWA:

$$\dot{a}_0 = -i\omega_c a_0 + igD_0 - \kappa a_0 \quad (24)$$

$$\dot{a}_1 = -i(\omega_c - \omega)a_1 - i\mathcal{E} + igD_1 - \kappa a_1 \quad (25)$$

$$\dot{D}_0 = \frac{i}{2}(\tilde{\Delta}_0^* v_0 - \tilde{\Delta}_0 v_0^*) - \gamma_{\parallel}(D_0 - D_{eq}) \quad (26)$$

$$\dot{v}_0 = i\tilde{\Delta}_0 D_0 - i\epsilon v_0(t) - \gamma_{\perp} v_0(t) \quad (27)$$

$$\dot{D}_1 = (i\omega - \gamma_{\parallel})D_1 + \frac{i}{2}(\tilde{\Delta}_-^* v_0 - \tilde{\Delta}_+ v_0^*) \quad (28)$$

При рассмотрении только этих величин в приближении RWA уравнения оказываются замкнутыми. Видно из уравнений (24)–(28), что их можно считать медленно меняющимися на временных масштабах порядка $1/\omega$ в режиме слабой связи $g \ll \omega$, слабой диссипации $\gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel} \ll \omega$ и близости к резонансам: $\omega - \omega_c \ll \omega_c$, $\epsilon \ll \omega$. Таким условиям вполне возможно удовлетворить на эксперименте.

В рамках RWA в уравнениях (24)–(28) оставлена только нулевая гармоника магнитного поля Δ , которое перестаёт быть постоянным по времени после замены переменных. (усреднение производится по одному

периоду $2\pi/\omega$, при этом можно считать $a_1(t) = |a_1|e^{i\delta}$ постоянным):

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_0 &= \Delta \left\langle \exp \left[ik\omega t + 2ig \operatorname{Re} \left(\frac{ia_1 e^{-i\omega t}}{\omega} \right) \right] \right\rangle = \\ &= (-1)^k \frac{a_1^k}{|a_1|^k} \Delta J_k \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right)\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\pm} &= \Delta \left\langle \exp \left[i(k \pm 1)\omega t + 2ig \operatorname{Re} \left(\frac{ia_1 e^{-i\omega t}}{\omega} \right) \right] \right\rangle = \\ &= (-1)^{k\pm 1} \frac{a_1^{k\pm 1}}{|a_1|^{k\pm 1}} \Delta J_{k\pm 1} \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right)\end{aligned}\quad (30)$$

Необходимо найти стационарное решение уравнений (24)–(28). Стационарное решение уравнений (26),(27) как функция амплитуды a_1 известно из классической задачи о многофотонном резонансе (Поворотом $v_0 = \tilde{v}_0(-a_1)^k/|a_1|^k$ можно избавиться от фазовых множителей.):

$$v_0(a_1) = D_{eq} \frac{\tilde{\Delta}_0}{\gamma_{\perp}^2} \frac{\epsilon + i\gamma_{\perp}}{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{|\tilde{\Delta}_0|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}}\quad (31)$$

$$D_0(a_1) = D_{eq} \frac{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2}}{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{|\tilde{\Delta}_0|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}}\quad (32)$$

Получаем, что \tilde{v}_0 зависит только от $|a_1|$:

$$\tilde{v}_0(|a_1|) = D_{eq} \Delta J_k \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right) \frac{\frac{\epsilon}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{i}{\gamma_{\perp}}}{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{\Delta^2 J_k^2 \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right)}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}}\quad (33)$$

Из уравнения (28) находим $D_1(a_1)$:

$$\begin{aligned}D_1(a_1) &= -\frac{\omega + i\gamma_{\parallel}}{2(\omega^2 + \gamma_{\parallel}^2)} (\tilde{\Delta}_-^* v_0 - \tilde{\Delta}_+ v_0^*) = \\ &= \frac{(\omega + i\gamma_{\parallel})\Delta}{2(\omega^2 + \gamma_{\parallel}^2)} \left(\Delta J_{k-1} \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right) \tilde{v}_0(|a_1|) - \Delta J_{k+1} \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right) \tilde{v}_0^*(|a_1|) \right) \frac{a_1}{|a_1|}\end{aligned}\quad (34)$$

Окончательно, получаем, что влияние кубита на гармонику a_1 осцилля-

тора описывается членом $i\kappa_{qb}(|a_1|)$ в уравнении

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathcal{E}}{\omega - \omega_c + i\kappa + i\kappa_{qb}(|a_1|)}, \text{ где } \kappa_{qb} = \\ &= \frac{g(\gamma_{\parallel} - i\omega)\Delta}{2|a_1|(\omega^2 + \gamma_{\parallel}^2)} \left(J_{k-1} \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right) \tilde{v}_0(|a_1|) - J_{k+1} \left(\frac{2g|a_1|}{\omega} \right) \tilde{v}_0^*(|a_1|) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение (35) неявным образом определяет a_1 . $\text{Im } \kappa_{qb}$ описывает сдвиг собственной частоты осциллятора. Что касается $\text{Re } \kappa_{qb}$, то по крайней мере для $\epsilon = 0$, так как

$$(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x))J_k(x) = \frac{2k}{x}J_k^2(x) > 0,$$

то знак $\text{Re } \kappa_{qb}$ совпадает со знаком D_{eq} . Случаю термической релаксации соответствует $D_{eq} > 0$ (заселённость нижнего уровня больше), значит, связь с кубитом увеличивает затухание осциллятора.

Сделаем замечание по поводу отстройки от многофотонного резонанса ϵ . Вообще говоря, $\epsilon \neq \epsilon_0 \equiv (\beta - k\omega)$. Отстройку следует тоже находить самосогласованно исходя из уравнений (24),(32). Условие самосогласования:

$$\frac{\omega_c}{2g^2}(\epsilon - \beta + k\omega) = D_{eq} \frac{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2}}{1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma_{\perp}^2} + \frac{|\tilde{\Delta}_0|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}} \quad (36)$$

Если g мало, то прямая $\frac{\omega_c}{2g^2}(\epsilon - \beta + k\omega)$ практически вертикальна и $\epsilon \approx \epsilon_0$ (поправка $\delta\epsilon \sim g^2/\omega_c$). Эту поправку следует сравнить с шириной резонанса, то есть γ_{\perp} . Таким образом, условие, при котором можно пренебречь изменением отстройки, таково: $g^2 \ll \omega_c\gamma_{\perp}$. В случае «средней» связи, при $\sqrt{\omega_c\gamma_{\perp}} \ll g \ll \omega$, уравнения самосогласования (35) и (36) необходимо решать совместно (если ω вдали от резонанса с ω_c , можно пренебречь влиянием кубита на a_1 и решать одно уравнение (35)). Наконец, отметим, что уравнение самосогласования может иметь несколько решений и возможно появление бистабильности.

Вычислим теперь импеданс системы. Если в неё втекает ток I , тогда в гамильтониан добавится член $-\chi\Phi_0 I/2\pi$. Отсюда и из уравне-

ний (16),(17) следует, что константа \mathcal{E} в гамильтониане (20) выражается так:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{4E_{CO}}{E_M}} \frac{I}{2e} \quad (37)$$

Напряжение $V = \dot{\chi}/2e$. Таким образом, получаем, что при токе через систему $I \cos \omega t$ напряжение

$$V = -\frac{1}{8e^2} \sqrt{\frac{E_{CO}}{E_M}} I (-i\omega a_1(\omega) e^{-i\omega t} + i\omega a_1^*(\omega) e^{i\omega t}) \quad (38)$$

Отсюда импеданс

$$Z(I, \omega) = -\frac{i}{8e^2} \sqrt{\frac{E_{CO}}{E_M}} \omega a_1^*(I, \omega) \quad (39)$$

Если ток в падающей волне I_+ , в отражённой I_- , волновой импеданс подводящей линии Z_0 , то коэффициент отражения

$$\Gamma = \frac{I_-}{I_+} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (40)$$

Так как затухание нелинейно, его нужно находить самосогласованно:

$$\Gamma = \frac{Z[I_+(1 - \Gamma), \omega] - Z_0}{Z[I_+(1 - \Gamma), \omega] + Z_0} \quad (41)$$

При помощи уравнения (41) можно определить зависимость Γ от мощности накачки.

5 Заключение.

В работе рассмотрено взаимодействие кубита с квазиклассическим осциллятором, возбуждаемым внешней накачкой в условиях близости к многофотонному резонансу.

Получен гамильтониан системы. Путём решения уравнений Блоха показано, что в режиме слабой связи влияние кубита на коэффициент отражения сигнала накачки сводится к перенормировке собственной частоты

контура и его затухания. Перенормировка нелинейна в том смысле что она зависит от амплитуды колебаний и, следовательно, от мощности накачки.

В заключение хочу выразить благодарность своему научному руководителю Ю.Г.Махлину за чуткое и терпеливое руководство.

Список литературы

- [1] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
- [2] D. Walls and G. Milburn, *Quantum optics* (1994).
- [3] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **431**, 162 (2004), ISSN 0028-0836, URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02851>.
- [4] D. Gunnarsson, J. Tuorila, A. Paila, J. Sarkar, E. Thuneberg, Y. Makhlin, and P. Hakonen (2008), *cond-mat/0805.1633*, URL <http://arxiv.org/abs/0805.1633>.
- [5] M. Sillanpaa, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen (2005), *cond-mat/0510559*, URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0510559>.
- [6] A. Abragam, *The principles of nuclear magnetism* (Clarendon, Oxford, 1961).
- [7] M. Reid, K. J. McNeil, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **24**, 2029 (1981).