Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт
(государственный университет)"
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

"Новые конформные теории поля в подходе Гепнера"

Студент 528 гр.
Альба В.А.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Пархоменко С.Е.

Работа выполненна в
Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
Москва
2009 г.

Содержание

1 Введение

Теория струн является основным кандидатом на роль "теории всего". Теория суперструн определена в десяти измерениях. С целью применения теории к окружающему миру необходимо скомпактифицировать “лишние” 6 измерений. Идея компактификации дополнительных измерений впервые появилась в работах Калуцци и Клейна, она была высоко оценена Эйнштейном и всем мировым сообществом. Сегодня известно два подхода компактификации. Первый из них геометрический который состоит в отождествление дополнительных измерений с некоторой сигма-моделью на некотором многообразии. Оказывается, что условие суперсимметричности требует чтобы многообразие принадлежало к классу многообразий Калаби-Яу. Эти многообразия являются достаточно сложными в изучении. Хотя геометрический подход хорош с точки зрения наглядности, но не возможность его применения на Калаби-Яу заставляет обратить особенное внимание на другой подход. Второй подход к компактификации является алгебраическим. Этот подход использует конструкцию конформной теории поля [4]. Единственный подход к построению квантовой теории поля на многообразиях Калаби-Яу — подход Гепнера, который развивается, в частности в этой работе . В этой конструкции используется произведение минимальных теорий как конформную теорию описывающую внутренними возбуждения струны.

Возникает естественный вопрос: Эквивалентны ли эти два подхода? Ответ — эквивалентны. Но понимание в смысла эквивалентности было не очевидно длительное время. Оказывается, топологические инварианты вычисленные в геометрической и алгебраической постановках совпадают. А данная конструкция отвечает сингулярные Калаби-Яу. Конструкция Гепнера представляет собой обобщение проекции GSO, хорошо известной в теории струн. Эта проекция оставляет только состояния которые инвариантные относительно действия оператора $(-1)^F$, где F - фермионное число. Оказывается, что пространство состояний теории NSR-струны после GSO проекции совпадает с пространством состояний струны Грина- Шварца, и также обладает пространственной суперсимметрией.

Грин и Плессер провели систематизацию возможных орбифолдов в модели Гепнера, то есть выделили пары которые соответствуют зеркальным Калаби-Яу.

В работе рассмотрен пример конструкции Гепнера, вычислены правила преобразований при модулярных преобразованиях для характеров и получена модулярно-инвариантная статсумма в конкретном примере орбифолда. Получены уравнения на коэффициенты слияния определяющие модулярно - инвариантную статическую сумму.

2 NSR струна и компактификация

2.1 Действие и его симметрии

Рассматривается теория замкнутой фермионной струны в NSR формализме с действием в виде

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma e\left(h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - i\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\nabla_\alpha\psi_\mu + \right.$$
$$\left. +2\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\psi^\mu\bar{\chi}_\alpha\rho^\beta\rho^\alpha\chi_\beta\right), \quad (2.1)$$

это действие инвариантное относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu,\ \delta\psi^\mu = -i\rho^\alpha\varepsilon\left(\partial_\alpha X^\mu - \bar{\psi}^\mu\chi_\alpha\right),\ \delta e^a_\alpha = -2i\bar{\varepsilon}\rho^\alpha\chi_\alpha,\ \delta\chi_\alpha = \nabla_\alpha\varepsilon. \quad (2.2)$$

Действие (2.1) также инвариантно относительно вейлевских преобразований

$$\delta X^\mu = 0,\quad \delta\psi^\mu = -\frac{1}{2}\Lambda\psi^\mu,\ \delta e^a_\alpha = \Lambda e^a_\alpha,\quad \delta\chi_\alpha = \frac{1}{2}\Lambda\chi_\alpha, \quad (2.3)$$

и относительно фермионных преобразований

$$\delta\chi_\alpha = i\rho_\alpha\eta,\ \delta e^a_\alpha = \delta\psi^\mu = \delta X^\mu = 0, \quad (2.4)$$

где η - произвольный майорановский спинор. Таким образом имеется всего четыре локальные бозоные симметрии: две репараметризационные инвариантности мировой поверхности, одна лоренцева симметрия и одна симметрия относительно изменения масштаба. Локально они могут быть использованы для приведения e^a_α в диагональному виду, то есть $e^a_\alpha = \delta^a_\alpha$. Аналогично четыре фермионые симметрии: две ε и две η можно использовать для зануления гравитино χ_α. В такой калибровке уравнения движения для полей X^μ ψ^μ имеют простой вид

$$\partial^\alpha\partial_\alpha X^\mu = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu = 0. \quad (2.6)$$

А уравнения движения для e^a_α и χ_α в калибровке

$$e^a_\alpha = \delta^a_\alpha, \quad (2.7)$$

$$\chi_\alpha = 0 \quad (2.8)$$

имеют вид

$$J_\alpha \equiv -\frac{\pi}{2e}\frac{\delta S}{\delta\chi_\alpha} = \frac{1}{2}\rho^\beta\rho_\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu = 0, \quad (2.9)$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \frac{i}{2}\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\overleftrightarrow{\partial}_\beta\psi_\mu - \mathrm{Tr} = 0, \quad (2.10)$$

Эти условия называются условиями суперсвязи Вирасоро.

Плотность импульса и углового момента вдоль струны представимые в виде нётеровских токов, связанных с глобальными симметриями $X^\mu \to a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu,\ \psi^\mu \to a^\mu_\nu\psi^\nu$

$$\begin{aligned} P^\mu_a &= \tfrac{1}{\pi}\partial_a X^\mu, \\ J^{\mu\nu}_\alpha &= \tfrac{1}{\pi}\left(X^\mu\partial_\alpha X^\nu - X^\nu\partial_\alpha X^\mu + i\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\psi^\nu\right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

а сохраняющийся заряд дается формулой

$$J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + K^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

2.2 Граничные условия и разложения на моды

Для замкнутых струн граничные условия для бозонов

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi) \tag{2.13}$$

используя эти граничные условия можем записать решение (2.5)

$$X_R^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu\sigma^- + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-2in\sigma^-} \tag{2.14}$$

$$X_L^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu\sigma^+ + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in\sigma^+}, \tag{2.15}$$

где $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$. Если потребовать вещественности X_L ,X_R получим

$$\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu\dagger}, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = \tilde{\alpha}_n^{\mu\dagger}. \tag{2.16}$$

Для исчезновение граничного члена фермионов при выводе уравнения движений (2.6) необходимы периодические или анти периодические граничные условия отдельно для каждой компоненты вотдельности

$$\psi_-^\mu = \sum d_n^\mu e^{-2in\sigma^-}, \tag{2.17}$$

$$\psi_-^\mu = \sum b_r^r e^{-2ir\sigma^-}, \tag{2.18}$$

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{d}_n^\mu e^{-2in\sigma^+}, \tag{2.19}$$

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{b}_r^r e^{-2ir\sigma^+}, \tag{2.20}$$

где разложение ведется по целым модам в случае n(R сектор) и полуцелым в случае r (NS сектор). Соответствующий выбор пар будем называть R-R, NS-R, R-NS и NS-NS секторам. Выражения (2.9),(2.10) можно также переписать в конусных координатах

$$\begin{aligned} J_+ &= \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, \\ J_- &= \psi_-^\mu \partial_- X_\mu \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \tfrac{i}{2}\psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu}, \\ T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \tfrac{i}{2}\psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

Для этих выражений также определено разложение по модам

$$L_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-2in\sigma}T_{--}, \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2in\sigma}T_{++} \tag{2.23}$$

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma e^{2im\sigma}J_{++}, \quad \tilde{F}_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma e^{-2im\sigma}J_{--}, \tag{2.24}$$

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma e^{2ir\sigma}J_{++}, \quad \tilde{F}_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma e^{-2ir\sigma}J_{--}, \tag{2.25}$$

Разложения по целым и полуцелым модам соответствует сектору Рамона или Нёвье-Шварца

2.3 Квантование в калибровке светового конуса

Коммутационные соотношения для координат стандартные

$$
\begin{aligned}
&[X^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)] = -i\pi\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \\
&\{\psi^\mu_A(\sigma,\tau), \psi^\nu_B(\sigma',\tau)\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

легко показать, что коммутационные соотношения для мод (2.13)-(2.20) будут

$$
\begin{aligned}
&[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad [\tilde{\alpha}^{mu}_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \\
&\{b^\mu_r, b^\nu_s\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s}, \\
&\{d^\mu_m, d^\nu_n\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n},
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Введенные моды для тензора энергии-импульса и для супер тока можно выразить через осциляторные моды

$$
\begin{aligned}
L_m &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha^\mu_{-n}\alpha^\mu_{n+m}: \; + \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(r+\frac{1}{2}m\right) :b^\mu_{-r}b^\mu_{m+r}: , \quad NS \text{ сектор}, \\
L_m &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha^\mu_{-n}\alpha^\mu_{n+m}: \; + \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}m\right) :d^\mu_{-n}d^\mu_{m+n}: , \quad R \text{ сектор},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

для операторов вирасоро и

$$
\begin{aligned}
G_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha^\mu_{-n}b^\mu_{r+m}: , \quad NS \text{ сектор}, \\
F_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha^\mu_{-n}F^\mu_{n+m}: , \quad R \text{ сектор},
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

для фермионных генераторов. Мы получаем супер алгебру Вирасоро

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \tfrac{1}{8}D(m^3-m)\delta_{n+m} \\
&[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - r\right)G_{r+m} \\
&\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

для NS сектора и

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \tfrac{1}{8}Dm^3\delta_{n+m} \\
&[L_m, F_n] = \left(\frac{1}{2}m - n\right)F_{n+m} \\
&\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

для R секкора.

Введем обозначения

$$
X^\pm = \frac{1}{2}\left(X^0 \pm X^{D-1}\right), \quad \psi^\pm = \frac{1}{2}\left(\psi^0 \pm \psi^{D-1}\right)
\tag{2.32}
$$

Остаточная репараметризационная инвариантность позволяет зафиксировать калибровку

$$
X^+ = x^+ + p^+\tau
\tag{2.33}
$$

Теперь можно сделать преобразования локальной супер симметрии, сохраняющие выбранные калибровки. Так мы можем выбрать калибровку

$$
\psi^+ = 0.
\tag{2.34}
$$

Заметим, что такой выбор калибровки непротиворечивый

$$\delta X^+ = \bar{\varepsilon}\psi^+ = 0. \tag{2.35}$$

То есть у нас $\alpha_n^+ = 0$, оказывается, что теперь можно разрешить связи $L_n = 0$, это приводит к

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : \; + \frac{1}{2p^+}\sum_{-\infty}^{\infty}(r - n/2) : b_{n-r}^i b_n^i :\right) - a\frac{\delta_n}{2p^+} \tag{2.36}$$

$$b_r^- = \frac{1}{p^+}\sum_{i=2}^{D-2}\sum_{-\infty}^{\infty} : \alpha_{r-s}^i b_s^i : . \tag{2.37}$$

То что мы смогли выразить "минусные"моды черезпоперечные означает, что мы явно разрешили связи. Физические состояния строятся с помощью отрицательных поперечных мод

$$\alpha_{-n_1}^{i_1} \ldots \alpha_{-n_l}^{i_l} b_{-r_1}^{i_1} \ldots b_{-r_R}^{i_1} \left|0\right\rangle \tag{2.38}$$

в NS секторе и

$$\alpha_{-n_1}^{i_1} \ldots \alpha_{-n_l}^{i_l} d_{-n_1}^{i_1} \ldots d_{-n_N}^{i_1} \left|0\right\rangle \tag{2.39}$$

в R секторе. Подставляя выражения для (2.36) в (2.12) получаем

$$E^{+\mu} = K^{+\mu} = 0, \tag{2.40}$$

$$E^{i-} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(: \alpha_{-n}^i \alpha_n^- : - : \alpha_{-n}^- \alpha_n^i :\right), \tag{2.41}$$

$$K^{i-} = \frac{1}{p^+}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{D-2} K_{-n}^{ij}\alpha_n^i, \tag{2.42}$$

где

$$K^{i-} = -\frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(: b_{m-r}^i b_r^i : - : b_{m-r}^i b_r^i :\right), \tag{2.43}$$

из требования удовлетворения обычной лоренцевой алгебры получается критическая размерность $D = 10$ и $a = 1/2$.

3 Конструкция Гепнера

Построенная теория квантовой фермионной струны в $D = 10$ измерениях содержит 8 физических мод. В алгебраическом подходе компактификации мы выделяем 4 измерения которые назовем пространством временем. В этом пространстве состояния генерируются двумя наборами мод

$$\alpha_{-n}^i, d_{-r}^i, \quad i = 1, 2 \; n, r > 0, \tag{3.1}$$

в сектора Нёвье-Шварца и

$$\alpha_{-n}^i, d_{-m}^i, \quad i = 1, 2 \; n, m > 0. \tag{3.2}$$

Остальные шесть измерений представляют собой конформную теорию с центральным зарядом $c = \left(\frac{1}{2} + 1\right)6 = 9$. Идея Гепнера состоит в замене этой теории другой конформной теорией поля с таким же центральным зарядом и одним суперзарядом($\mathcal{N} = 1$).То есть мы получаем теорию которая является тензорным произведением двух конформных теорий. Состояния в этой теории также представляют собой тензорное произведение состояний из пространства-времени и дополнительной конформной теории поля , которая описывает внутренние возбуждения струны

$$|p, v\rangle = |p\rangle_{s.t.} \otimes |v\rangle_{int}. \tag{3.3}$$

Также факторизуется генератор супералгебры лоренца

$$S_0 = S_{st} S_{int}. \tag{3.4}$$

Про его внутреннюю часть мы еще вспомним в дальнейшем. Оказывается, что теперь для того, что б удовлетворить условия алгебры Лоренца конформная теория должна быть не $\mathcal{N} = 1$, а $\mathcal{N} = 2$ теория. Конформная теория поля с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией содержит супералгебру Вирасоро, которая задается операторными разложениями

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\,T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \cdots \ , \tag{3.5}$$

$$T(z)G^{\pm}(w) = \frac{3/2}{(z-w)^2}\, G^{\pm}(w) + \frac{\partial_w G^{\pm}(w)}{z-w} + \cdots \ , \tag{3.6}$$

$$T(z)J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \cdots \ , \tag{3.7}$$

$$G^{+}(z)G^{-}(w) = \frac{2\,c/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \partial_w J(w)}{z-w} + \cdots \ , \tag{3.8}$$

$$J(z)G^{\pm}(w) = \pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w} + \cdots \ , \tag{3.9}$$

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \cdots \ , \tag{3.10}$$

или на более привычном языке коммутационными соотношениями для мод разложения операторов

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}\, m(m^2-1)\,\delta_{m+n,0} \ , \tag{3.11}$$

$$[J_m, J_n] = \frac{c}{3} m\, \delta_{m+n,0} \ , \tag{3.12}$$

$$[L_n, J_m] = -m\, J_{m+n} \ , \tag{3.13}$$

$$\left[L_n, G^{\pm}_{m\pm a}\right] = \left(\frac{n}{2} - (m \pm a)\right)\, G^{\pm}_{m+n\pm a} \ , \tag{3.14}$$

$$\left[J_n, G^{\pm}_{m\pm a}\right] = \pm\, G^{\pm}_{m+n\pm a} \ , \tag{3.15}$$

$$\left\{G^{+}_{n+a}, G^{-}_{m-a}\right\} = 2\, L_{m+n} + (n-m+2a)\, J_{n+m} + \frac{c}{3}\left((n+a)^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{m+n,0} \ . \tag{3.16}$$

Параметр a определяет сектор, то есть по каким модам произведено разложение — целым или полуцелым[1]. У супералгебры Вирасоро есть изоморфизм

$$L_n \to L_n + \eta J_n + \frac{c}{6}\eta^2\delta_{n,0}, \tag{3.17}$$

$$J_n \to J_n + \frac{c}{3}\eta\delta_{n,0}, \tag{3.18}$$

$$G_r^{\pm} \to G_{r\pm\eta}^{\pm}. \tag{3.19}$$

Этот изоморфизм переводит R сектор в NS и наоборот. Спектральный поток - другое название. Оказывается, что S_int — внутренняя часть генератора суперсимметрии должна быть оператором спектрального потока. Этот оператор можно бозонизовать

$$S_{int} = e^{i\varphi\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{3.20}$$

Так как моды $U(1)$-тока удовлетворяют алгебре Гейзенберга, то их можна также бозонизовать

$$J_{int}(z) = i\sqrt{3}\partial\varphi. \tag{3.21}$$

4 Построение модулярно-инвариантной статсуммы

Определим действие модулярной группы на переменные (τ, z, u)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}(\tau, z, u) = \left(\frac{a\tau + b}{m\tau + n}, \frac{z}{m\tau + n}, u + \frac{cz^2 m}{6(m\tau + n)}\right). \tag{4.1}$$

У модулярной группы есть два генератора

$$\mathbf{S}: \quad \tau \longrightarrow -\frac{1}{\tau}, \Longrightarrow (\tau, z, u) \longrightarrow \left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u + \frac{cz^2}{6\tau}\right) \tag{4.2}$$

$$\mathbf{T}: \quad \tau \longrightarrow \tau + 1 \Longrightarrow (\tau, z, u) \longrightarrow (\tau + 1, z, u). \tag{4.3}$$

Характер определяется

$$\chi_{h,t}(\tau, z, u) = e^{-2\pi i u} \operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_{h,t}} e^{i2\pi z J_0} q^{\left(L_0 - \frac{c}{24}\right)}, \tag{4.4}$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $c = 3(1 - \frac{2}{\mu})$ - центральный заряд.

Преобразование твистования определяется

$$\chi_{h,t+n}(\tau, z, u) = \chi_{h,t}\left(\tau, z + n\tau, u - \frac{n^2\tau c}{6} - \frac{nzc}{3}\right). \tag{4.5}$$

Использованы тождества для характеров

$$\begin{aligned} \chi_{h,t}\left(-\tfrac{1}{\tau}, \tfrac{z}{\tau}, u + \tfrac{cz^2}{6\tau}\right) &= S_{h,t}^{h',t'}\chi_{h',t'}(\tau, z, u) \\ \chi_{h,t}\left(-\tfrac{1}{\bar\tau}, \tfrac{\bar z}{\bar\tau}, \bar u + \tfrac{c\bar z^2}{6\bar\tau}\right) &= S_{h,t}^{h'',t''}\chi_{h'',t''}(\bar\tau, \bar z, \bar u), \end{aligned} \tag{4.6}$$

И также

$$\begin{aligned} \chi_{h,t}(\tau + 1, z, u) &= T_{h,t}^{h',t'}\chi_{h',t'}(\tau, z, u) \\ \chi_{h,t}(\bar\tau + 1, \bar z, \bar u) &= T_{h,t}^{h'',t''}\chi_{h'',t''}(\bar\tau, \bar z, \bar u). \end{aligned} \tag{4.7}$$

[1] $G^{\pm}\left(e^{2\pi i}z\right) = -G^{\mp}e^{2\pi i a}(z)$

Для матриц преобразований есть точное выражение

$$S_{h,t}^{h',t'} = S_{t'}^{h'} \exp\left[\pi i \frac{(h-2t)(h'-2t')}{\mu}\right], \tag{4.8}$$

где

$$S_h^{h'} = \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \cdot \sin\left(\pi \frac{(h+1)(h'+1)}{\mu}\right), \tag{4.9}$$

и также для T:

$$T_{h,t}^{h',t'} = \delta_{h,t}^{h',t'} e^{2\pi i \Delta_{h,t}}, \tag{4.10}$$

где для NS сектора $\Delta_{h,t} = \frac{h-2t^2-2ht}{2(\mu)}$ а также для R сектора $\Delta_{h,t} = \frac{h+2ht-t^2}{2(\mu)} + \frac{t^2}{2}$.

Используя (4.8) легко понять, что

$$S_{h,t+n}^{h',t'} = S_{h,t}^{h',t'} e^{2\pi i \left(-n\frac{h'-2t'}{\mu}\right)} \tag{4.11}$$

5 Примеры модулярно инвариантных статистических сумм

Как показано в [3] можно построить модулярно инвариантную статистическую сумму $\mu = 3$:

$$Z_M = (1 + S + T + T^2)Z_1 - Z_G, \tag{5.1}$$

где $Z_1 = (1,1) + (1,a) + (1,a^2)$.

Рассматривая твистованую статистическую сумму

$$Z(\tau, z, u, \bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \prod_{i=1}^{r} \sum_{h_i,t_i} \chi_{h_i,t_i+n}(\tau, z, u)\chi_{h_i,t_i}(\bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}). \tag{5.2}$$

5.1 Действие первого генератора

Действие первого генератора модулярной группы:

$$\begin{aligned} SZ(\tau, z, u, \bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \sum_{h_i,t_i} \prod_{i=1}^{r} \chi_{h_i,t_i+n}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u + \frac{cz^2}{6\tau}\right) \\ \times \chi_{h_i,t_i}\left(-\frac{1}{\bar{\tau}}, \frac{\bar{z}}{\bar{\tau}}, \bar{u} + \frac{c\bar{z}^2}{6\bar{\tau}}\right) \overset{(4.6)}{=} \\ \overset{(4.6)}{=} \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \prod_{i=1}^{r} \sum_{h_i,t_i} \sum_{h'_i,'t_i} \sum_{h''_i,t''_i} \chi_{h'_i,t'_i}(\tau, z, u)\chi_{h''_i,t''_i}(\bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) S_{h_i,t_i+n}^{h'_i,t'_i} S_{h_i,t_i}^{h''_i,t''_i} \end{aligned} \tag{5.3}$$

используя (4.11) мы получаем

$$\begin{aligned} SZ = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \prod_{i=1}^{r} \sum_{h_i,t_i} \sum_{h'_i,'t_i} \sum_{h''_i,t''_i} \chi_{h'_i,t'_i}(\tau, z, u)\chi_{h''_i,t''_i}(\bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) S_{h_i,t_i}^{h'_i,t')i} S_{h_i,t_i}^{h''_i,t''_i} e^{-2\pi i n \frac{h'-2t'}{\mu}} \overset{(4.4)}{=} \\ \overset{(4.4)}{=} \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \prod_{i=1}^{r} \sum_{h_i,t_i} \sum_{h'_i,'t_i} \sum_{h''_i,t''_i} \chi_{h'_i,t'_i}(\tau, z-n, u)\chi_{h''_i,t''_i}(\bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) S_{h_i,t_i}^{h'_i,t'_i} S_{h_i,t_i}^{h''_i,t''_i} = \\ = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \prod_{i=1}^{r} \sum_{h_i,t_i} \chi_{h_i,t_i}(\tau, z-n, u)\chi_{h_i,t_i}(\bar{\tau}, \bar{z}, \bar{u}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2 Действие второго генератора

Вторым генератором мы действуем так

$$TZ(\tau,z,u,\bar\tau,\bar z,\bar u)=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(\tau+1,z,u+\frac{cz^2}{6}\right)$$

$$\times\chi_{h_i,t_i}\left(\bar\tau+1,\bar z,\bar u+\frac{c\bar z^2}{6}\right)\overset{(4.7)}{=}$$

$$\overset{(4.7)}{=}\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\sum_{h'_i,t'_i}\sum_{h''_i,t''_i}\chi_{h'_i,t'_i}\left(\tau,z,u\right)\chi_{h''_i,t''_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)T^{h'_i,t'_i}_{h_i,t_i+n}T^{h''_i,t''_i}_{h_i,t_i},\quad(5.5)$$

используя (4.10):

$$TZ=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\sum_{h'_i,t'_i}\sum_{h''_i,t''_i}\chi_{h'_i,t'_i}\left(\tau,z,u\right)\chi_{h''_i,t''_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)$$

$$\times\delta^{h'_i,t'_i}_{h_i,t_i+n}\delta^{h''_i,t''_i}_{h_i,t_i}e^{2\pi i\left(\Delta_{h_i,t_i}+\bar\Delta_{h_i,t_i}\right)}e^{2\pi i n\frac{h_i-2t_i}{\mu}}e^{-2\pi i\frac{n^2}{\mu}}\overset{\delta^{h'_i,t'_i}_{h_i,t_i+n}=\delta^{h'_i,t'_i-n}_{h_i,t_i}}{=}$$

$$\overset{\delta^{h'_i,t'_i}_{h_i,t_i+n}=\delta^{h'_i,t'_i-n}_{h_i,t_i}}{=}\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\sum_{h_i,t_i}\sum_{h'_i,t'_i}\sum_{h''_i,t''_i}\prod_{i=1}^{r}\chi_{h'_i,t'_i}\left(\tau,z,u\right)\chi_{h''_i,t''_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)$$

$$\times\delta^{h'_i,t'_i-n}_{h_i,t_i}\delta^{h''_i,t''_i}_{h_i,t_i}e^{2\pi i n\frac{h'_i-2t'_i}{\mu}}e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}},\quad(5.6)$$

и окончательно :

$$TZ=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h'_i,t'_i}\sum_{h''_i,t''_i}\chi_{h'_i,t'_i}\left(\tau,z+n,u\right)\chi_{h''_i,t''_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)\delta^{h'_i,t'_i-n}_{h''_i,t''_i}e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(\tau,z+n,u\right)\chi_{h_i,t_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}}.\quad(5.7)$$

Действием T генератором дважды и получаем

$$T^2Z=T\left(TZ\right)=T\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(\tau,z+n,u\right)\chi_{h_i,t_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}}=$$

$$=T\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(\tau,z,u\right)\chi_{h_i,t_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}}e^{2\pi i n\frac{h-2t}{\mu}}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(\tau,z+2n,u\right)\chi_{h_i,t_i}\left(\bar\tau,\bar z,\bar u\right)e^{2\pi i\frac{2n^2}{\mu}}\quad(5.8)$$

5.3 Обобщение для NS сектора

Из предыдущих расчетов а также из (5.1) можно записать

$$Z_M=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{h_i,t_i}\Big[\chi_{h_i,t_i+n}(\tau,z,u)+\chi_{h_i,t_i}(\tau,z-n,u)+\chi_{h_i,t_i+n}(\tau,z+n,u)e^{2\pi i\frac{n^2}{\mu}}+$$

$$+\chi_{h_i,t_i+n}(\tau,z+2n,u)e^{2\pi i\frac{2n^2}{\mu}}-(\mu)\chi_{h_i,t_i}(\tau,z,u)\Big]\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u).\quad(5.9)$$

Естественный способ построения обобщения для произвольного k строится так

$$Z = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h,t} e^{2\pi i f(n,m)}\chi_{h_i,t_i+n}(\tau, z+m, u)\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u), \tag{5.10}$$

В дальнейшем мы получим уравнения на $f(n,m)$.

5.3.1 Действие оператора S

$$\begin{aligned} SZ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}+m, u+\frac{cz^2}{6\tau}\right)\times \\ \times\chi_{h_i,t_i}\left(-\frac{1}{\bar\tau},\frac{\bar z}{\bar\tau},\bar u+\frac{c\bar z^2}{6\bar\tau}\right)\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m)\right]\right\} = \\ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z+m\tau}{\tau}, u+\frac{c(z+m\tau)^2}{6\tau}-\frac{cm(z+m\tau)}{3}-\frac{cm^2\tau}{3}\right)\times \\ \times\chi_{h_i,t_i}\left(-\frac{1}{\bar\tau},\frac{\bar z}{\bar\tau},\bar u+\frac{c\bar z^2}{6\bar\tau}\right)e^{2\pi i f(n,m)} \\ \overset{(4.6),(4.11)}{=} \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h'_i,t'_i}\left(\tau, z-n+m\tau, u-\frac{cm(z-n)}{3}-\frac{cmn}{3}-\frac{cm^2\tau}{6}\right)\times \\ \times\chi_{h''_i,t''_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)S_{h_i,t_i}^{h'_i,t'_i}S_{h,t}^{h'',t''}e^{2\pi i f(n,m)} \\ \overset{(4.5)}{=} \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h,t}\chi_{h_i,t_i+m}(\tau, z-n, u)\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m)-\frac{2nm}{\mu}\right]\right\} = \end{aligned} \tag{5.11}$$

после замены переменных:

$$m\to n,\quad n\to\mu-m, \tag{5.12}$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} SZ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h,t}\chi_{h_i,t_i+n}(\tau, z+m, u)\times \\ \times\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\exp\left\{2\pi i\left[f(\mu-m,n)+\frac{2nm}{\mu}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Первое уравнение для фазовых множителей

$$\boxed{f(n,m) = f(\mu-m,n)+\frac{2nm}{\mu}\mod\mathbb{Z}.} \tag{5.14}$$

5.3.2 Действие T генератора

$$TZ \overset{(4.3)}{=} \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}(\tau+1,z,u)\bar{T}\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau+1,\bar z,\bar u)\exp\{2\pi i\,[f(n,m)]\} \overset{(4.7),(4.10)}{=}$$

$$\overset{(4.7),(4.10)}{=} \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h'_i,t'_i}(\tau,z+m,u)\,\chi_{h''_i,t''_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\,\delta_{h,t}^{h',t'-n}\delta_{h,t}^{h'',t''}\times$$

$$\times\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m)+n\frac{h'_i-2t'_i}{\mu}+\frac{n^2}{\mu}\right]\right\}$$

$$\overset{(4.4)}{=} \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}(\tau,z+m+n,u)\chi_{h_i,t_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m)+\frac{n^2}{\mu}\right]\right\}, \tag{5.15}$$

После замены переменных

$$n\to n,\quad m\to m-n, \tag{5.16}$$

мы получаем:

$$TZ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\chi_{h_i,t_i+n}(\tau,z+m,u)\chi_{h'_i,t'_i}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m-n)+\frac{n^2}{\mu}\right]\right\}. \tag{5.17}$$

Второе уравнение для фазовых множителей

$$\boxed{f(n,m-n)+\frac{n^2}{\mu}=f(n,m)\mod\mathbb{Z}} \tag{5.18}$$

После подстановки $f(n,m)=g(n,m)+\frac{nm}{\mu}$ в(5.14) и (5.18) мы получим:

$$\begin{cases} g(n,m)=g(\mu-m,n)\\ g(n,m)=g(n,m-n)\end{cases}. \tag{5.19}$$

5.4 Обобщение для RR сектора

Мы собираемся получить уравнения для фазовых множителей используя условия модулярной инвариантности в R^-R^- секторе. Статистическая функция имеет вид

$$Z(\tau,z,u,\bar\tau,\bar z,\bar u)=\frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\widetilde{\chi}_{h_i,t_i+n+\frac12}(\tau,z+m,u)$$

$$\times\,\widetilde{\chi}_{h_i,t_i+\frac12}(\bar\tau,\bar z,\bar u)\exp\{i2\pi f(n,m)\}, \tag{5.20}$$

Где:

$$\widetilde{\chi}_{h,t+\frac12}(\tau,z,u)=e^{-2\pi iu}\operatorname*{Tr}_{\mathcal{H}_{h,0}}U^{t+\frac12}(-1)^F u^{J_0}q^{\left(L_0-\frac{c}{24}\right)}U^{-\left(t+\frac12\right)}=$$

$$=\chi_{h,t+\frac12}\left(\tau,z+\frac12,u\right)\exp\left\{-\frac{i\pi}{\mu}\left(h-2\left(t+\frac12\right)\right)\right\}. \tag{5.21}$$

С помощью оператора спектрального потока мы можем записать характер из R сектора как характер из NS сектора:

$$\widetilde{\chi}_{h,t+\frac{1}{2}}(\tau,z,u) = \chi_{h,0}\left(\tau, z+\tfrac{1}{2}+\tau\left(t+\tfrac{1}{2}\right), u-\tfrac{c}{3}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)\left(t+\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{c}{6}\left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2\tau\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{i\pi}{\mu}\left(h-2\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right)\right\} \tag{5.22}$$

5.4.1 Получение матриц S и T преобразования

Мы собираемся получить матрицы аналогичные (4.9) и (4.10).

$$S\widetilde{\chi}_{h,t+\frac{1}{2}}(\tau,z,u) =$$
$$= \chi_{h,o}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}\left(z-\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{\tau}{2}\right), u+\frac{c}{6\tau}\left(z-\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{\tau}{2}\right)^2-\frac{cz}{6}-\frac{c\tau}{24}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i2\pi\left[-\frac{1}{2\mu}\left(h-2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right\} \tag{5.23}$$

Используя (4.6) мы получим:

$$S\widetilde{\chi}_{h,t+\frac{1}{2}}(\tau,z,u) = \sum_{h',t'} S_{h,0}^{h',t'}\chi_{h',t'}\left(\tau, z+\frac{1}{2}-(t+1)+\frac{\tau}{2}, u-\frac{cz}{6}-\frac{c\tau}{24}\right)$$
$$\times\exp\left\{i2\pi\left[-\frac{1}{2\mu}\left(h-2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right\} =$$
$$= \sum_{h',t'} S_{h,\frac{1}{2}}^{h',t+\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}}\widetilde{\chi}_{h',t'+\frac{1}{2}}(\tau,z,u) \tag{5.24}$$

5.4.2 S action

Используя (5.24) и следуя стандартной процедуре:

$$SZ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\sum_{h'_i,(t'_i+\frac{1}{2})}\sum_{h''_i,(t''_i+\frac{1}{2})}\sin\left(\pi\frac{(h+1)(h'+1)}{\mu}\right)$$
$$\times\exp\left\{\pi i\frac{\left(h-2\left(t+n+\frac{1}{2}\right)\right)\left(h'-2\left(t'+\frac{1}{2}\right)\right)}{\mu}\right\}$$
$$\times\widetilde{\chi}_{h',t'+\frac{1}{2}}\left(\tau, z+m\tau, u-\frac{cmz}{3}-\frac{cm^2\tau}{6}\right)$$
$$\times\sin\left(\pi\frac{(h+1)(h''+1)}{\mu}\right)\exp\left\{-\pi i\frac{\left(h-2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\left(h''-2\left(t''+\frac{1}{2}\right)\right)}{\mu}\right\}$$
$$\times\widetilde{\chi}_{h'',t''+\frac{1}{2}}(\bar{\tau},\bar{z},\bar{u})\exp\left\{2\pi i f(n,m)\right\} \tag{5.25}$$

Это может быть найдено в виде

$$SZ = \frac{1}{\mu}\sum_{n,m=0}^{\mu-1}\prod_{i=1}^{N}\sum_{h_i,t_i}\widetilde{\chi}_{h,t+m+\frac{1}{2}}(\tau,z,u)\widetilde{\chi}_{h,t+\frac{1}{2}}(\bar{\tau},\bar{z},\bar{u})\exp\left\{2\pi i\left[f(n,m)-\frac{2nm}{\mu}\right]\right\}. \tag{5.26}$$

После замены переменных:

$$m \longrightarrow n, \quad n \longrightarrow \mu - m \tag{5.27}$$

мы получаем: $\boxed{f(n,m) = f(\mu - m, n) + \frac{2nm}{\mu} \mod \mathbb{Z}.}$

5.4.3 T action

Уравнение на фазовые множители :

$$\boxed{f(n,m) = f(n, m-n) + \frac{n^2}{\mu} \mod \mathbb{Z}.} \tag{5.28}$$

6 Дальнейшее развитие

В дальнейшем планируется продолжить изучение конструкции Гепнера в случаях центрального заряда не кратного трем. Так же планируется построение пар зеркальных моделей, используя методику Грина и Плессера [5].

Благодарности

Хочу поблагодарить Сергея Евгеньевича Пархоменка за чуткое и терпеливое научное руководство. Также хочу поблагодарить Александра Абрамовича Белавина за замечательные лекции по конформной теории поля, а также за плодотворные обсуждения на завершающем этапе написания работы.

Список литературы

[1] D.Gepner, *“Lectures on $\mathcal{N} = 2$ String Theory”*, Lectures given at Spring School on Superstrings, Trieste, Italy,3-11 April, 1989.

[2] B.R. Green, *“String Theory on Calabi-Yau Manifolds”* , `arXiv:hep-th/9702155`.

[3] D. Gepner, E. Witten,*“String theory on group manifolds”*, Nucl.Phys. **B 278** (1986) 493-549.

[4] Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B., *“Infinite conformal symmetry in two-dimentional quantum field theory”*, Nucl.Phys. **B 241** (1984) 330-380.

[5] B.R. Greene, M.R. Plesser, *“Duality in Calabi-Yau moduli space”*, Nucl. Phys. **B 338** (1990) 15-37.

[6] М. Грин. Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн. Том 1*, Москва 1990

[7] P.Berglund, M.Henningson *Landau-Ginzburg Orbifolds, Mirror Symmetry and the Elliptic Genus*, `arXiv:hep-th/9401029`