

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

# Интерференция в зарядовом кубите при наличии слабой диссипации

Выпускная квалификационная  
работа на степень бакалавра  
студента 528 гр. Гусева О.В.

Научный руководитель  
д.ф.-м.н. Махлин Ю.Г.

Москва, 2009г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Джозефсоновский зарядовый квантовый бит</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Влияние слабого шума на двухуровневую систему</b>	<b>6</b>
3.1	Влияние шума в непрерывном времени . . . . .	7
3.2	Влияние шума в дискретном времени . . . . .	9
3.3	Уравнения Блоха с осью анизотропии $\vec{n} \nparallel \vec{B}$ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Стационарное решение в приближении многофотонных переходов</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Исследование стационарного решения методом дискретизации времени</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>18</b>

# 1 Введение

В основу данной работы положен тот факт, что при наличии между пересекающимися во времени энергетическими уровнями слабого отталкивающего взаимодействия существует конечная вероятность перехода между ними. Это явление, количественно описанное Ландау, Зенером, Штюкельбергом, Майорана, называется переходом Ландау-Зенера [2, 3].

Одними из возможных реализаций двухуровневой системы с переходами Ландау-Зенера являются Джозефсоновский зарядовый и фазовый квантовые биты. Эти кубиты были исследованы в экспериментах [4, 5]. Полученные результаты для них во многом аналогичны, поэтому для исследования этих кубитов можно применять одинаковые методы.

В экспериментах (характерный график изображен на рис. 1) на кубит подается внешний сигнал вида  $n_g(t) = n_{g0} + n_g^{r,f} \sin \omega t$  с частотой в гигагерцевом диапазоне. Параметры  $(n_{g0}, n_g^{r,f})$  определяют заселенность возбужденного уровня, которая влияет на емкость кубита (см. далее формулы (4,5)). Кубит подсоединяется к колебательному контуру и изменяет его емкость. На систему посылается сигнал в мегагерцевом диапазоне, а далее строятся зависимости амплитуды и фазы для отраженного сигнала от вышеуказанных параметров накачки. Отметим, что при определенном выборе параметров накачки в системе уровни будут пересекаться периодически во времени, что приведет к интерференции переходов Ландау-Зенера, [6].

Также следует отметить, что во всех экспериментальных установках, реализующих кубиты, присутствуют различные механизмы диссипации. Поэтому при теоретическом описании системы необходимо вводить источники шума. В данной работе будут рассматриваться только слабые источники диссипации. Так, время сбоя фазы  $T_2$  должно быть существенно больше времени между последовательными пересечениями уровней при накачке, иначе не имело бы смысла говорить об интерференции.

Одной из первых работ, в которой было предложено учесть влияние слабой диссипации (введенной как феноменологически, так и из микроскопических соображений) на интерференционную картину путем анализа перехода Ландау-Зенера, является статья [7]. В ней также был проведен анализ с ограничением на вероятность перехода Ландау-Зенера  $P_{LZ} \ll 1$ . Интересно рассмотреть эту же задачу другими методами, которые позволили бы

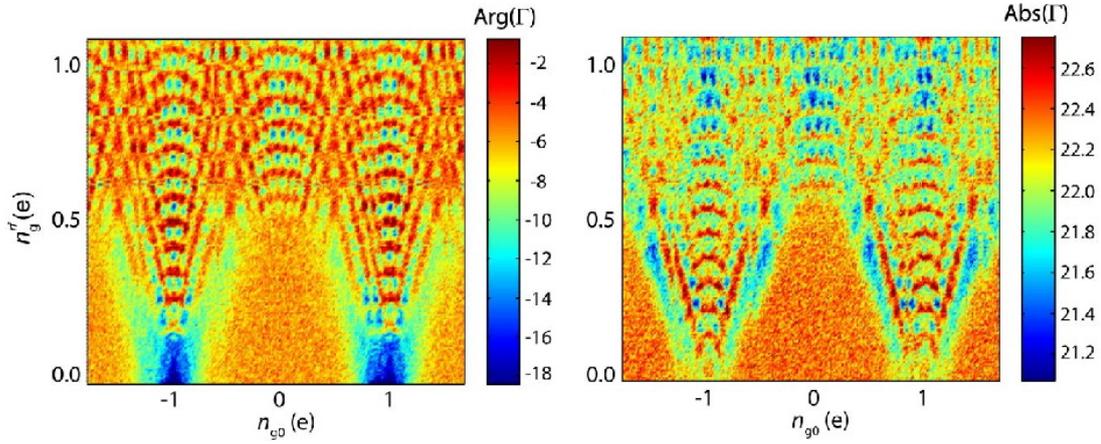


Рис. 1: Зависимость фазы (слева) и амплитуды (справа) отраженного сигнала от  $(n_{g0}, n_g^{rf})$ , характерные величины  $f_{rf} = 4\text{GHz}$ ,  $2\Delta = 2.7\text{ GHz}$ ,  $E_C = 1\text{ K}$ .

обойти это ограничение.

Существуют различные экспериментальные методы измерения характерного времени диссипации. Так, в работах [8, 9] был использован метод измерения поглощения на резонансной частоте, а в работе [10] исследовалось поведение системы с течением времени. В этих методах измерения производятся в гигагерцевом диапазоне частот, и поэтому представляет особый интерес исследование возможности определения этих времен иными методами, на меньших частотах (по форме максимумов заселенности на плоскости параметров  $(n_{g0}, n_g^{rf})$ ).

Экспериментальное и теоретическое изучение влияния времен  $T_1, T_2$  на интерференцию требуется для более глубокого понимания свойств шума и, возможно, микроскопического механизма его образования. Это в перспективе позволит уменьшить его влияние на когерентность кубита, а, возможно, и полностью избавиться от него.

Основной целью данной работы является аналитическое исследование качественных зависимостей между параметрами накачки  $n_g(t) = n_{g0} + n_g^{rf} \sin \omega t$  и заселенностью возбужденного уровня, а также изучение слабого влияния окружающей среды на процесс накачки кубита. Как видно из вышесказанного, общее понимание интерференции в кубитах уже имеется, но хотелось бы описать влияние диссипации на форму максимумов заселенности, так как решение этой задачи предоставит новый метод определения времени

дефазирушки.

Эту задачу можно было бы решать "точно" - записать уравнения Блоха для коротко-коррелированного шума и решать их с учетом зависимости от времени. При этом можно было бы воспользоваться известным решением Зенера для одного пересечения уровней, а влияние диссипативных членов в уравнениях Блоха учесть пертурбативно, перейдя в представление взаимодействия. Однако, получившееся таким методом решение было бы очень громоздким и неудобным в использовании. В частности, заранее не известна точная структура релаксационного члена. Все эти соображения наталкивают на поиск более простых путей.

В разделах (4,5) поставленная задача будет исследована двумя различными методами. В одном из них, в методе дискретизации времени, диссипация вводится феноменологически. Результат этого метода проверяется на согласованность с решением в методе многофотонных переходов, который анализируется в разделе 4 и является отправной точкой. В обоих методах мы будем пользоваться уравнениями Блоха, которые обоснованы в соответствующей литературе по ЯМР [11, 12] для постоянных магнитных полей. Применимость этих уравнений в нашей задаче требует отдельного исследования. Отметим, что оба метода являются приближенными и даже совпадение результатов не доказывает правомерность их применения. Однако их согласованность дает основания "верить" в их разумность и, возможно, применить при дальнейшем изучении кубита.

Также представляет особый интерес исследование интерференционной картины при больших амплитудах накачки  $n_g^{rf} > 1$  (ввиду того, что при этом за один период в рассмотрение вовлекаются более одного перехода Ландау-Зенера), а также учет влияния квазичастичных состояний с нечетным количеством избыточных электронов на сверхпроводящем острове.

## 2 Джозефсоновский зарядовый квантовый бит

Простейший зарядовый кубит (см. рис. 2) состоит из сверхпроводящего островка малой емкости  $C_J$ , соединенного со сверхпроводящим электродом с одной стороны с помощью Джозефсоновского перехода  $E_J$ . С другой стороны с помощью затворной емкости  $C_g$  островок подключается к источнику напряжения  $V_g$ . Квантовомеханическое состояние такой системы

определяется избыточным (по сравнению с нейтральным состоянием) количеством  $n$  куперовских пар на островке.

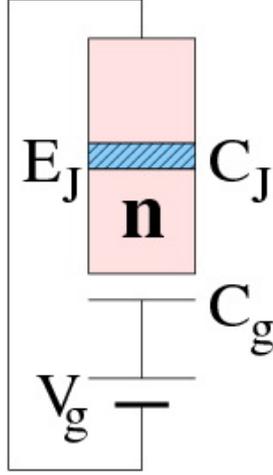


Рис. 2: Зарядовый кубит

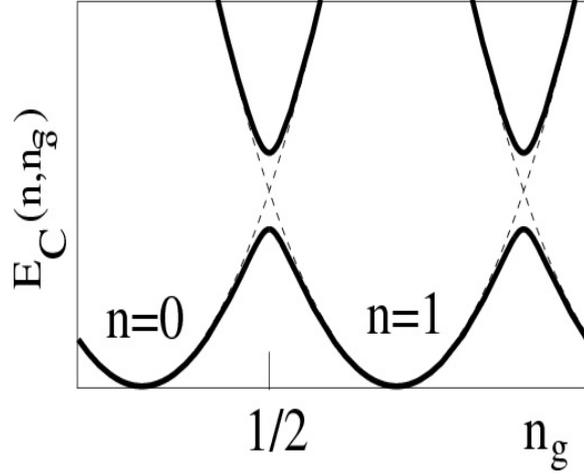


Рис. 3: Спектр кубита

Гамильтониан этой (см. обзор [1]) системы в отсутствие внешнего магнитного поля (вообще говоря, влияющего только на константу  $E_J$ ), можно записать в виде:

$$\hat{H} = \sum_n \left[ 4E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{1}{2} E_J (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) \right] \quad (1)$$

,где для удобства введено обозначение  $n_g = C_g V_g / e$  для затворного напряжения.

Его спектр изображен на рис. 3. Видно, что при малой в окрестности перехода Ландау-Зенера (при небольшом отклонении параметра  $n_g$  от значения  $1/2$ ) система эффективно ведет себя как двухуровневая.

Как известно, гамильтониан любой двухуровневой системы может быть представлен в виде гамильтониана взаимодействия магнитного поля и спина  $1/2$ . В данном случае гамильтониан редуцируется (см. [6]) к виду:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E(n_g) & -\Delta \\ -\Delta & -E(n_g) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} B_z \sigma_z - \frac{1}{2} B_x \sigma_x \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2} B_z = 2E_C (1 - n_g) \quad , \quad \Delta = \frac{1}{2} B_x = E_J \quad (3)$$

В таких двухуровневых системах под воздействием затворного напряжения вида  $n_g(t) = n_{g0} + n_g^r \sin \omega t$  происходит накачка возбужденного уровня.

Экспериментально можно измерять степень возбуждения системы по ее емкости (см. [13]), основываясь на том, что

$$C_{eff} = p_0 C_{eff}^0 + p_1 C_{eff}^1 \quad (4)$$

, где  $p_0, p_1$  - заселенности основного и возбужденного уровней соответственно. Эффективные емкости этих уровней даются выражениями:

$$C_{eff}^k = -\frac{\partial^2 E_k(n_g)}{\partial V_g^2} = -\frac{C_g^2}{e^2} \frac{\partial^2 E_k(n_g)}{\partial n_g^2} \quad (5)$$

### 3 Влияние слабого шума на двухуровневую систему

Шум в системе может быть смоделирован взаимодействием двухуровневой системы, гамильтониан которой  $\hat{H}_{spin}$  с неким тепловым резервуаром, гамильтониан которого  $\hat{H}_{bath}$ . Параметры  $\hat{H}_{bath}$  от времени не зависят. Пусть это взаимодействие описывается членом в гамильтониане  $\hat{H}_{int}$ , тогда полный гамильтониан системы может быть записан в виде:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{spin}(t) + \hat{H}_{int}(t) + \hat{H}_{bath} \quad (6)$$

Как уже упоминалось ранее, гамильтониан двухуровневой системы всегда может быть представлен в виде:

$$\hat{H}_{spin} = \vec{B}(t) \hat{\sigma} \quad (7)$$

Из свойств матриц Паули следует, что гамильтониан взаимодействия также всегда может быть представлен в виде:

$$\hat{H}_{int} = \hat{X}_0 + \hat{X}_x \hat{\sigma}_x + \hat{X}_y \hat{\sigma}_y + \hat{X}_z \hat{\sigma}_z \quad (8)$$

, где  $\hat{X}_k$  - операторы действующие только на переменные резервуара. Оператор  $\hat{X}_0$  без ограничения общности может быть отнесен к члену  $\hat{H}_{bath}$  и общий вид гамильтониана системы принимает форму:

$$\hat{H} = \left( \vec{B}(t) + \vec{X} \right) \hat{\sigma} + \hat{H}_{bath} \quad (9)$$

Пусть матрица плотности имеет вид  $\rho_{i\alpha,j\beta}$ , где  $i, j$  нумеруют чистые состояния спинов, а  $\alpha, \beta$  нумеруют состояния резервуара. Тогда, взяв

след по переменным резервуара, получим следующие уравнения движения для матрицы плотности спиновой системы:

$$\dot{\rho}_{i,j} = \sum_{\alpha} \dot{\rho}_{i\alpha,j\alpha} = i \sum_{\alpha,\beta,k} (\rho_{i\alpha,k\beta} H_{k\beta,j\alpha} - H_{i\alpha,k\beta} \rho_{k\beta,j\alpha}) \quad (10)$$

$$H_{i\alpha,j\beta} = \vec{B}(t) \vec{\sigma}_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \vec{\sigma}_{ij} \vec{X}_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \langle \alpha | \hat{H}_{bath} | \beta \rangle \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получаем:

$$\dot{\rho}_{i,j} = i \left[ \rho, \hat{H}_{spin} \right]_{i,j} + i \sum_{\alpha,\beta,k} (\rho_{i\alpha,k\beta} \vec{\sigma}_{k,j} \vec{X}_{\beta,\alpha} - \vec{\sigma}_{i,k} \vec{X}_{\alpha,\beta} \rho_{k\beta,j\alpha}) \quad (12)$$

Если взаимодействие спина и резервуара слабое и коротко-коррелированное, то переменные могут быть разделены, и общий Марковский вид уравнений движения для матрицы плотности:

$$\dot{\rho}_{i,j} = i \left[ \rho, \hat{H}_{spin} \right]_{i,j} + \sum_{kl} L_{ij,kl} \rho_{kl} \quad (13)$$

Условие слабости шума принимает вид  $L_{ij,kl} \ll |\vec{B}(t)|$ .

### 3.1 Влияние шума в непрерывном времени

Рассматривая задачу в непрерывном времени выясним, какие значения могут принимать элементы  $L_{ij,kl}$  и каков их физический смысл. Для удобства направим магнитное поле  $B$ , действующее на спиновую систему, вдоль оси  $Oz$ , тогда гамильтониан принимает вид:

$$\hat{H}_{spin} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \quad (14)$$

Уравнение движения для матрицы плотности системы без возмущения:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} = i \left[ \rho, \hat{H}_{spin} \right] = 2iH \begin{pmatrix} 0 & -\rho_{01} \\ \rho_{10} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Решение этого уравнения запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} e^{-2iBt} \\ C_{10} e^{2iBt} & C_{11} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Учтем взаимодействие спинов с резервуаром, пользуясь методом вариации постоянных, т.е. будем считать, что  $C_{ij} \equiv C_{ij}(t)$ . Тогда уравнения на элементы  $C_{ij}$  запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{C}_{00}(t) = L_{00,00}C_{00} + e^{-2iBt}L_{00,01}C_{01} + e^{2iBt}L_{00,10}C_{10} + L_{00,11}C_{11} \\ \dot{C}_{01}(t) = e^{2iBt}L_{01,00}C_{00} + L_{01,01}C_{01} + e^{4iBt}L_{01,10}C_{10} + e^{2iBt}L_{01,11}C_{11} \\ \dot{C}_{10}(t) = e^{-2iBt}L_{10,00}C_{00} + e^{-4iBt}L_{10,01}C_{01} + L_{10,10}C_{10} + e^{-2iBt}L_{10,11}C_{11} \\ \dot{C}_{11}(t) = L_{11,00}C_{00} + e^{-2iBt}L_{11,01}C_{01} + e^{2iBt}L_{11,10}C_{10} + L_{11,11}C_{11} \end{cases} \quad (17)$$

Выберем время  $\tau$  такое, что  $\frac{1}{B} \ll \tau \ll \frac{1}{L_{ij,kl}}$  и усредним систему (17) за это время в приближении вращающейся волны (rotating wave approximation). В таком случае быстроосциллирующими членами в этих уравнениях можно пренебречь:

$$\begin{cases} \dot{C}_{00}(t) = L_{00,00}C_{00} + L_{00,11}C_{11} \\ \dot{C}_{01}(t) = L_{01,01}C_{01} \\ \dot{C}_{10}(t) = L_{10,10}C_{10} \\ \dot{C}_{11}(t) = L_{11,00}C_{00} + L_{11,11}C_{11} \end{cases} \quad (18)$$

Матрица плотности - неотрицательный эрмитов оператор с единичным следом. Отсюда вытекают следующие свойства (причем константы  $\Gamma_{\uparrow}, \Gamma_{\downarrow}$  вещественны):

$$L_{11,00} = -L_{00,00} \equiv \Gamma_{\uparrow} \quad L_{00,11} = -L_{11,11} \equiv \Gamma_{\downarrow} \quad L_{01,10} = L_{10,01}^* = -\Gamma_2 + i\delta \quad (19)$$

Физический смысл этих констант:  $\Gamma_{\uparrow}, \Gamma_{\downarrow}$  - вероятности переходов в единицу времени с нижнего уровня на верхний и с верхнего на нижний соответственно.  $T_2$  - характерное время потери фазы. Константа  $\delta$  дает малую поправку к ларморовской частоте прецессии, и для рассмотрения поставленной задачи несущественна.

Вспомним, что  $\rho_{00} - \rho_{11} = M_z$ ,  $\text{Re}\rho_{01} = M_x$  и  $\text{Im}\rho_{01} = M_y$ , где  $(M_x, M_y, M_z) = \langle \hat{\sigma} \rangle$  средний по состоянию спин. Тогда уравнения для проекции спина на различные оси примут вид:

$$\begin{cases} \dot{M}_z = -\frac{M_z - M_z^0}{T_1} \\ \dot{M}_y = -M_x B - \frac{M_y}{T_2} \\ \dot{M}_x = M_y B - \frac{M_x}{T_2} \end{cases} \quad (20)$$

, где введены обозначения  $\frac{1}{T_1} \equiv \Gamma_{\uparrow} + \Gamma_{\downarrow}$  и  $M_z^0 \equiv \frac{\Gamma_{\downarrow} - \Gamma_{\uparrow}}{\Gamma_{\downarrow} + \Gamma_{\uparrow}}$ .

Таким образом было показано, что уравнения Блоха - наиболее общий вид уравнений движения для среднего значения спина, если рассматривать систему на временах порядка  $\tau$ .

### 3.2 Влияние шума в дискретном времени

Разобьем время на равные промежутки длины  $T$  и будем рассматривать матрицу плотности только в таких дискретных точках, тогда уравнение движения примет вид:

$$\rho(N+1) = U\rho(N)U^+ + \hat{L}\rho(N) \quad (21)$$

, где  $U$  - оператор эволюции за период времени  $T$ .

Исследуем задачу о диссипации аналогично разделу (3.1) только в дискретном времени и установим, когда можно пользоваться уравнениями Блоха. Магнитное поле  $B$  направим вдоль оси  $Oz$ . Оператор эволюции за период времени  $T$  примет вид:

$$U(T) = \exp(-i\hat{\sigma}_z BT) = \begin{pmatrix} e^{-iBT} & 0 \\ 0 & e^{iBT} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Представим матрицу плотности снова в виде:

$$\rho(t) = U(t)\rho^0 U^+(t) \quad \Rightarrow \quad \rho(NT) = (U(T))^N \rho^0 (U(T)^+)^N \quad (23)$$

Считаем, что  $\rho_0$  слабо зависит от  $N$  при наличии диссипации. Тогда уравнение на  $\rho^0(N)$  примет вид:

$$\frac{\rho^0(N) - \rho^0(N-1)}{T} = (U(T)^+)^N \left[ \hat{L} (U(T))^N \rho^0(N) (U(T)^+)^N \right] (U(T))^N \quad (24)$$

После перемножения всех матриц будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\rho_{00}^0(N)}{T} = L_{00,00}\rho_{00}^0(N) + e^{-2iBT}L_{00,01}\rho_{01}^0(N) + e^{2iBT}L_{00,10}\rho_{10}^0(N) + L_{00,11}\rho_{11}^0(N) \\ \frac{\Delta\rho_{01}^0(N)}{T} = e^{2iBT}L_{01,00}\rho_{00}^0(N) + L_{01,01}\rho_{01}^0(N) + e^{4iBT}L_{01,10}\rho_{10}^0(N) + e^{2iBT}L_{01,11}\rho_{11}^0(N) \\ \frac{\Delta\rho_{10}^0(N)}{T} = e^{-2iBT}L_{10,00}\rho_{00}^0(N) + e^{-4iBT}L_{10,01}\rho_{01}^0(N) + L_{10,10}\rho_{10}^0(N) + e^{-2iBT}L_{10,11}\rho_{11}^0(N) \\ \frac{\Delta\rho_{11}^0(N)}{T} = L_{11,00}\rho_{00}^0(N) + e^{-2iBT}L_{11,01}\rho_{01}^0(N) + e^{2iBT}L_{11,10}\rho_{10}^0(N) + L_{11,11}\rho_{11}^0(N) \end{cases} \quad (25)$$

Чтобы применить приближение вращающейся волны, выберем время  $\tau$  такое, что  $BT(\bmod 2\pi) \gg \frac{T}{\tau}$ , но влияние диссипации все еще мало, т.е.  $\tau, B^{-1} \ll T_1, T_2$ , где  $T_1, T_2$  вводятся аналогично формуле (20). Итак, мы установили, что уравнения Блоха - наиболее общий вид уравнений движения в дискретном времени на временах определяемых таким соотношением:

$$\frac{T}{BT(\bmod 2\pi)} \ll \tau \ll T_1, T_2 \quad (26)$$

### 3.3 Уравнения Блоха с осью анизотропии $\vec{n} \nparallel \vec{B}$

Система уравнений Блоха (20) была получена в предположении, что релаксация в направлении, совпадающем с направлением поля, происходит за характерное время  $T_1$ , а в направлении, поперечном направлению поля - за характерное время  $T_2$ . Выясним, каким образом следует поправить эти константы в случае, когда ось анизотропии не совпадает с направлением магнитного поля.

Без ограничения общности выберем поле  $\vec{B} = (0, 0, B)$  вдоль оси  $Oz$ , ось анизотропии  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , а равновесное значение вдоль поля  $\vec{M}^0 = (0, 0, M_z^0)$ . В таком случае уравнения Блоха принимают форму:

$$\begin{cases} \dot{M}_z = \frac{n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{(M_z^0 - M_z) - n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \\ \dot{M}_y = -BM_x + \frac{n_y((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{-M_y - n_y((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \\ \dot{M}_x = BM_y + \frac{n_x((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{-M_x - n_x((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \end{cases} \quad (27)$$

Эквивалентная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{M}_z = \frac{n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{(M_z^0 - M_z) - n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \\ \dot{M}_+ = -iBM_+ + \frac{n_+((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{-M_+ - n_+((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \end{cases} \quad (28)$$

Перейдем в систему отсчета, вращающуюся с ларморовской частотой. В такой системе магнитное поле отсутствует. Замена переменных  $M_+ = \exp(-iBt)K_+$ ,  $M_z = K_z$  приводит к уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{K}_z = \frac{n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{(K_z^0 - K_z) - n_z((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \\ \dot{K}_+ = \frac{e^{iBt}n_+((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_1} + \frac{-K_+ - e^{iBt}n_+((\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n})}{T_2} \\ \left( (\vec{M}^0 - \vec{M})\vec{n} \right) = (K_z^0 - K_z)n_z - \frac{e^{-iBt}}{2}K_+n_- - \frac{e^{iBt}}{2}K_-n_+ \end{cases} \quad (29)$$

Усредним эти уравнения за время  $\tau$  такое, что  $\frac{1}{B} \ll \tau \ll T_1, T_2$ . Тогда в приближении вращающейся волны получим:

$$\begin{cases} \dot{K}_z = \frac{n_z^2(K_z^0 - K_z)}{T_1} + \frac{(1-n_z^2)(K_z^0 - K_z)}{T_2} \\ \dot{K}_+ = -\frac{(1-n_z^2)K_+}{2T_1} - \frac{(1+n_z^2)K_+}{2T_2} \end{cases} \quad (30)$$

Введем угол между осью анизотропии и полем  $\theta = \widehat{\vec{n}, \vec{B}}$ . Тогда уравнения Блоха в исходной системе координат примут вид:

$$\begin{cases} \dot{M}_z = \left( \frac{\cos^2 \theta}{T_1} + \frac{\sin^2 \theta}{T_2} \right) (M_z^0 - M_z) \\ \dot{M}_y = -BM_x - \left( \frac{\sin^2 \theta}{2T_1} + \frac{(1+\cos^2 \theta)}{2T_2} \right) M_y \\ \dot{M}_x = BM_y - \left( \frac{\sin^2 \theta}{2T_1} + \frac{(1+\cos^2 \theta)}{2T_2} \right) M_x \end{cases} \quad (31)$$

Таким образом, найдены эффективные времена диссипации вдоль поля и в перпендикулярном ему направлении:

$$\frac{1}{T_1^{eff}} = \frac{\cos^2 \theta}{T_1} + \frac{\sin^2 \theta}{T_2}, \quad \frac{1}{T_2^{eff}} = \frac{\sin^2 \theta}{2T_1} + \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2T_2} \quad (32)$$

Рассмотренный эффект изменения эффективных времен релаксации вызван тем, что из-за ларморовской прецессии направление между направлением спина и осью анизотропии быстро изменяется во времени, а не является постоянным.

Интересно также отметить, что из микроскопики [12] можно получить соотношение на времена  $T_1, T_2$ :

$$\frac{1}{T_2} \geq \frac{1}{2T_1} \quad (33)$$

И для времен  $T_1^{eff}, T_2^{eff}$  это соотношение также сохраняется:

$$\frac{1}{T_2^{eff}} - \frac{1}{2T_1^{eff}} = \frac{1}{2T_2} + \cos 2\theta \left( \frac{1}{2T_2} - \frac{1}{2T_1} \right) \geq 0 \quad (34)$$

, что достаточно проверить в экстремумах при  $\cos 2\theta = \pm 1$ .

## 4 Стационарное решение в приближении многофотонных переходов

Исследуем поведение системы под действием накачки вида:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_x - \frac{1}{2}E(t)\sigma_z \quad (35)$$

$$E(t) = n\omega + \varepsilon + \delta E \cos \omega t \quad (36)$$

Перейдем в систему координат, вращающуюся вокруг оси  $Oz$  так, что угол поворота есть функция времени:  $\varphi(t) = \int_0^\infty dt E(t) = n\omega t + \frac{\delta E}{\omega} \sin \omega t$ . Тогда в новой системе координат магнитное поле примет вид:

$$\tilde{B}_z = \varepsilon \quad , \quad \tilde{B}_+ = \tilde{B}_x + i\tilde{B}_y = \Delta e^{i\varphi(t)} \quad (37)$$

Функция  $e^{i\varphi(t)}$  - периодическая. Разложим  $\tilde{B}_+$  в ряд Фурье и воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя первого рода:

$$\tilde{B}_+(t) = \Delta \sum_k f_k e^{i\omega k t} \quad (38)$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \exp \left[ i(n-k)x + i\frac{\delta E}{\omega} \sin x \right] = \mathcal{J}_{n-k} \left( -\frac{\delta E}{\omega} \right) \quad (39)$$

Усредним  $\tilde{B}_+$  на промежутке времени  $\tau$  таком, что  $\frac{1}{\omega} \ll \tau \ll \frac{1}{\Delta}$ . В приближении вращающейся волны можно пренебречь вкладом гармоник с  $k \neq 0$ :

$$\tilde{B}_+(t) = (-1)^n \Delta \mathcal{J}_n \left( \frac{\delta E}{\omega} \right) \quad (40)$$

Стационарное решение уравнений Блоха в таких полях с учетом диссипации можно найти, например, в [11]:

$$\begin{cases} \tilde{M}_x = \frac{(-1)^n \mathcal{J}_n \left( \frac{\delta E}{\omega} \right) \varepsilon \Delta T_2^2}{1 + (\varepsilon T_2)^2 + \Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2 \left( \frac{\delta E}{\omega} \right)} \\ \tilde{M}_y = \frac{(-1)^n \mathcal{J}_n \left( \frac{\delta E}{\omega} \right) \Delta T_2}{1 + (\varepsilon T_2)^2 + \Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2 \left( \frac{\delta E}{\omega} \right)} \\ \tilde{M}_z = \frac{1 + (\varepsilon T_2)^2}{1 + (\varepsilon T_2)^2 + \Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2 \left( \frac{\delta E}{\omega} \right)} \end{cases} \quad (41)$$

Нас будет интересовать заселенность возбужденного уровня  $p_1$ . С учетом того, что  $M_z = \tilde{M}_z$ , получим:

$$p_1 = 1 - M_z = \frac{\Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2 \left( \frac{\delta E}{\omega} \right)}{1 + (\varepsilon T_2)^2 + \Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2 \left( \frac{\delta E}{\omega} \right)} \quad (42)$$

Найдем положение пиков заселенности и их кривизну (форму при малых отклонениях). Для этого используем стандартное (см. [14]) обозначение  $j'_{n,s}$  -  $s$ -ый нуль производной функции Бесселя первого рода  $\mathcal{J}'_n$ . Разложим  $\mathcal{J}_n$  в окрестности экстремумов (отдельный случай  $n = 0, s = 0$ , не охватываемый общей формулой -  $\mathcal{J}_0(x) \approx 1 - x^2/8$ ):

$$\mathcal{J}_n(j'_{n,s} + x) \approx \left( 1 + \frac{x^2 n^2 - (j'_{n,s})^2}{2 (j'_{n,s})^2} \right) \mathcal{J}_n(j'_{n,s}) \quad (43)$$

Таким образом получено разложение в окрестности пиков  $\frac{\delta E}{\omega} = j'_{n,s} + x$ ,  $E = n\hbar\omega + \varepsilon$ :

$$p_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left( 1 - x^2 \frac{(j'_{n,s})^2 - n^2}{(j'_{n,s})^2} \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{1}{1 + \alpha} (T_2 \varepsilon)^2 \right) \quad (44)$$

, где введено обозначение  $\alpha \equiv \Delta^2 T_2 T_1 \mathcal{J}_n^2(j'_{n,s})$ .

Заметим, что из-за свойства нулей функций Бесселя  $n \leq j'_{n,1} < j'_{n,2} < \dots$  получается необходимое условие существования максимумов заселенности:

$$|E| \leq |\delta E| \quad (45)$$

это условие является физически вполне естественным - его нарушение привело бы к отсутствию переходов Ландау-Зенера.

Более осмысленной величиной с точки зрения эксперимента является не кривизна пиков заселенности, а их характерная ширина. Обозначим ширину по оси  $E$  и  $\delta E$  пика с номером  $(n, s)$  -  $E_{(n,s)}^{width}$  и  $\delta E_{(n,s)}^{width}$  соответственно, тогда будем иметь оценку для них:

$$E_{(n,s)}^{width} = \frac{\sqrt{1 + \Delta^2 T_1 T_2 \mathcal{J}_n^2(j'_{n,s})}}{T_2} \quad (46)$$

$$\delta E_{(n,s)}^{width} \approx \omega \quad (47)$$

Видим, что для экспериментального определения времен диссипации  $T_1, T_2$  можно использовать величину  $E_{(n,s)}^{width}$  и кривизну пика в направлении изменения параметра  $\delta E$ .

## 5 Исследование стационарного решения методом дискретизации времени

Метод многофотонных переходов позволял находить стационарное решение только в узкой окрестности пиков заселенности в направлении изменения параметров  $\varepsilon \ll \omega$ , а также  $\Delta \ll \omega$  (условие на возбуждение только одной гармоники). Исследуем эту же задачу методом дискретизации времени, чтобы убедиться в том, что в области параметров, где применимы оба метода, они дают один и тот же ответ.

Для нахождения оператора эволюции за период, разобьем эту эволюцию на 4 этапа - 2 перехода Ландау-Зенера и 2 участка обычного набега фазы. Матрица соответствующая переходу Ландау-Зенера в базисе, состоящем из основного и возбужденного состояний, имеет вид (см. [4], либо [2]):

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-P}e^{i\phi_s} & i\sqrt{P} \\ i\sqrt{P} & \sqrt{1-P}e^{-i\phi_s} \end{pmatrix} \quad (48)$$

, где вероятность перехода Ландау-Зенера и фаза Стокса определяются соотношениями:

$$P = e^{-2\pi\gamma}, \quad \phi_s = \arg(\Gamma(1-i\gamma)) + \gamma(\ln \gamma - 1) - \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\Delta^2}{\left|d(E_0 - E_1)/dt\right|} \quad (49)$$

Если при  $t = 0$  система находится левее точки перехода Ландау-Зенера и движется в направление от него, то оператор когерентной эволюции за период можно записать как:

$$U(T) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-P}e^{i\phi_s} & i\sqrt{P} \\ i\sqrt{P} & \sqrt{1-P}e^{-i\phi_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_R/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_R/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-P}e^{i\phi_s} & i\sqrt{P} \\ i\sqrt{P} & \sqrt{1-P}e^{-i\phi_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_L/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_L/2} \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$U(T) = \begin{pmatrix} (1-P)e^{2i\phi_s - i\frac{\phi_R + \phi_L}{2}} - Pe^{i\frac{\phi_R - \phi_L}{2}} & 2i\sqrt{P(1-P)} \cos(\phi_s - \phi_R/2) e^{i\phi_L/2} \\ 2i\sqrt{P(1-P)} \cos(\phi_s - \phi_R/2) e^{-i\phi_L/2} & (1-P)e^{-2i\phi_s + i\frac{\phi_R + \phi_L}{2}} - Pe^{-i\frac{\phi_R - \phi_L}{2}} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Представим этот оператор в виде оператора поворота вокруг некоторой оси  $\vec{K}$  на угол  $2\theta$ :

$$U(T) = \exp \left[ i \left( \vec{K} \vec{\sigma} \right) \theta \right] = \cos \theta + i \left( \vec{K} \vec{\sigma} \right) \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta + iK_z \sin \theta & \sin \theta (iK_x + K_y) \\ \sin \theta (iK_x - K_y) & \cos \theta - iK_z \sin \theta \end{pmatrix} \quad (52)$$

Параметры оператора вращения:

$$\cos \theta = (1 - P) \cos \left( 2\phi_s - \frac{\phi_R + \phi_L}{2} \right) - P \cos \left( \frac{\phi_R - \phi_L}{2} \right) \quad (53)$$

$$K_x \sin \theta = 2\sqrt{P(1 - P)} \cos(\phi_s - \phi_R/2) \cos \frac{\phi_L}{2} \quad (54)$$

$$K_y \sin \theta = -2\sqrt{P(1 - P)} \cos(\phi_s - \phi_R/2) \sin \frac{\phi_L}{2} \quad (55)$$

$$K_z \sin \theta = (1 - P) \sin \left( 2\phi_s - \frac{\phi_R + \phi_L}{2} \right) - P \sin \left( \frac{\phi_R - \phi_L}{2} \right) \quad (56)$$

Тогда эволюцию системы можно аппроксимировать прецессией в магнитном поле с направлением  $(K_x, K_y, K_z)$  и напряженностью  $H = \theta/T$ .

Как было показано в разделе (3.2) в больших полях не имеет значения, как именно вводить диссипацию, поэтому для удобства напомним диссипативные члены в Блоховской форме с анизотропией, соответствующей мгновенному базису в выделенной точке периода, и с характерными временами затухания  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ . Для нахождения стационарного решения  $M_z$  нам достаточно знать проекцию напряженности магнитного поля на плоскость  $Oxy$  и вдоль оси  $Oz$ :

$$H_z = \frac{\theta}{T} K_z \quad , \quad H_{xy} = \frac{\theta}{T} \sqrt{K_x^2 + K_y^2} \quad (57)$$

Тогда пользуясь стационарным решением уравнений Блоха получим:

$$M_z = \frac{1 + \left( \frac{\tilde{T}_2 \theta K_z}{T} \right)^2}{1 + \left( \frac{\tilde{T}_2 \theta K_z}{T} \right)^2 + \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}{T^2} \theta^2 (K_x^2 + K_y^2)} \quad (58)$$

Используем также тот факт, что в области применимости (26) формулы (58) можно пренебречь единицами в числителе и знаменателе. Заметим, что угол  $\theta$  сократился, и мы не получили никакого противоречия с тем фактом, что угол  $\theta$  определяется лишь с точностью до  $2\pi k$ . Таким образом, заселенность возбужденного уровня:

$$p_1 = \frac{\tilde{T}_1 (K_x^2 + K_y^2)}{\tilde{T}_2 K_z^2 + \tilde{T}_1 (K_x^2 + K_y^2)} \quad (59)$$

Легко заметить, что  $p_1$  принимает максимальное значение (равное единице), когда  $K_z = 0$ . Для удобства введем обозначение

$$\beta_{R,L} = \phi_{R,L}/2 - \phi_s \quad (60)$$

В этих переменных параметры оператора вращения принимают вид:

$$\cos \theta = (1 - P) \cos(\beta_R + \beta_L) - P \cos(\beta_R - \beta_L) \quad (61)$$

$$K_x \sin \theta = 2\sqrt{P(1 - P)} \cos(\beta_R) \cos(\beta_L + \phi_s) \quad (62)$$

$$K_y \sin \theta = -2\sqrt{P(1 - P)} \cos(\beta_R) \sin(\beta_L + \phi_s) \quad (63)$$

$$K_z \sin \theta = (P - 1) \sin(\beta_R + \beta_L) - P \sin(\beta_R - \beta_L) \quad (64)$$

Из уравнения (??) и условия  $K_z = 0$  получается следующее условие на фазы:

$$\sin(\beta_R + \beta_L) = 2P \cos \beta_R \sin \beta_L \quad \iff \quad \beta_R = \arctan [(2P - 1) \tan \beta_L] \quad (65)$$

Покажем, что необходимое условие на максимум заселенности возбужденного уровня  $\phi_L = \phi_R \pmod{2\pi}$  - если бы мы решили поставленную задачу, в которой система изначально движется "влево" и максимизировали возбуждение системы слева от перехода, получив пару  $(\phi_R, \phi_L)$ , то поставив аналогичную задачу для системы с изначальным движением "вправо" мы должны были бы получить пару  $(\phi_L, \phi_R)$  откуда и следует их совпадение по модулю  $2\pi$ .

С другой стороны, отметим, что это эквивалентно максимизации угла  $\theta \iff$  минимизации  $\cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta_L} \cos \theta = 0 &= (P - 1) \sin(\beta_R + \beta_L) \left( \frac{d\beta_R}{d\beta_L} + 1 \right) + P \sin(\beta_R - \beta_L) \left( \frac{d\beta_R}{d\beta_L} - 1 \right) = \\ &= 2P \sin(\beta_R - \beta_L) \frac{d\beta_R}{d\beta_L} = \frac{2P(2P - 1) \sin(\beta_R - \beta_L)}{\cos^2 \beta_L + (2P - 1)^2 \sin^2 \beta_L} \end{aligned}$$

Откуда видно, что  $\beta_R = \beta_L \pmod{\pi} = \beta$ . И из уравнения  $K_z = 0$  следует  $\beta = \frac{\pi}{2}m$ . Подставив это решение в уравнения на  $K_x, K_y$ , увидим, что при  $m = 2n + 1$  не выполняется условие нормировки  $K_x^2 + K_y^2 = 1$ . Следовательно  $m = 2n$  и  $\beta = \pi n$ . Получаем решение для максимумов заселенности:

$$\begin{cases} \cos \theta = 1 - 2P \\ \sin \theta = 2\sqrt{P(1 - P)} \\ K_x = \cos \phi_s \\ K_y = -\sin \phi_s \\ K_z = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Теперь определим расположение пиков:

$$\phi_R = \frac{2}{\omega} \int_{-\arcsin(\frac{E}{\delta E})}^{\pi/2} (E + \delta E \sin x) dx = 2\pi n_R + 2\phi_s \quad (67)$$

После интегрирования получаем соотношение:

$$E \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( \frac{E}{\delta E} \right) \right) + \sqrt{(\delta E)^2 - E^2} = \pi n_R \omega + \phi_s \omega \quad (68)$$

Аналогично для фазы слева от перехода:

$$\phi_L = -\frac{2}{\omega} \int_{\pi + \arcsin(\frac{E}{\delta E})}^{3\pi/2} (E + \delta E \sin x) dx = 2\pi n_L + 2\phi_s \quad (69)$$

$$E \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{E}{\delta E} \right) \right) - \sqrt{(\delta E)^2 - E^2} = -\pi n_L \omega - \phi_s \omega \quad (70)$$

Комбинируя условия (68) и (70), получим уравнения на положение пиков:

$$\begin{cases} E = (n_R - n_L) \omega \\ E \arcsin \left( \frac{E}{\delta E} \right) + \sqrt{(\delta E)^2 - E^2} = \frac{\pi}{2} (n_R + n_L + \frac{2}{\pi} \phi_s) \omega \end{cases} \quad (71)$$

Убедимся, что расположение пиков в обоих методах совпадают при  $\delta E \gg E$ . Из совпадения пиков по оси  $E$  немедленно следует условие

$$n = n_R - n_L \quad (72)$$

, где  $n$  - номер многофотонного перехода. Используем асимптотическую формулу для  $j'_{n,s}$ , и учтем также, что в условиях применимости этого рассмотрения переход Ландау-Зенера происходит мгновенно, т.е.  $\gamma = 0$  в формуле (49) и фаза Стокса  $\phi_s = \pi/4$ , получим:

$$\begin{cases} E = n\omega \\ \delta E = j'_{n,s} \omega \approx \pi \left( s + \frac{n}{2} - \frac{3}{4} \right) \omega \end{cases} \quad (\text{многофот. переходы}) \quad (73)$$

$$\begin{cases} E = n\omega \\ \delta E = \pi \left( \frac{n}{2} + n_L + \frac{1}{4} \right) \omega \end{cases} \quad (\text{дискр. время}) \quad (74)$$

Из уравнений (73) и (74) видно, что при  $n_L = s - 1$  расположение пиков в обоих методах совпадает.

Аналогичные рассуждения можно провести и для минимумов (только фазы  $\phi_L, \phi_R$  сдвинутся на  $\pi$ ), и убедиться, что минимумы (по крайней мере на прямых с  $E = n\omega$ ) также совпадают.

Времена  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$  феноменологически введенные в этом разделе вообще говоря не должны совпадать с аналогичными временами в разделе (5). Это связано в первую очередь с тем, что некогерентные переходы с возбужденного уровня в основной и обратно происходят в основном в окрестности перехода Ландау-Зенера, т.к. там наименьшее расстояние между уровнями. Поэтому введенное в этой главе время  $\tilde{T}_1$  из этих соображений по порядку величины должно быть связано с более физическим временем  $T_1$  из главы (5) соотношением:

$$\tilde{T}_1 \approx \frac{\delta E}{\Delta} T_1 \quad (75)$$

, где  $\Delta$  - минимальное расстояние между уровнями, в то же время определяет характерную область близости уровней.

## 6 Заключение

В данной работе рассмотрено поведение кубита под действием на него внешней накачки вида  $V_g(t) = V_{g0} + V_g^{rf} \sin \omega t$  при наличие слабой диссипации. Показано, что уравнения Блоха являются наиболее общими уравнениями движения для матрицы плотности при рассмотрении системы на соответствующих промежутках времени, как в дискретном, так и в непрерывном случае. Найдена взаимосвязь между реальными временами релаксации системы и наблюдаемыми временами в случае, когда ось анизотропии не совпадает с направлением магнитного поля.

Интерференционная картина исследована двумя различными методами, и показано, что в области параметров, где применимы оба метода, интерференционная картина совпадает.

В качестве дальнейшего развития рассмотренной задачи можно было бы изучить влияние квазичастичных состояний, а также исследовать влияние слабой диссипации на динамику системы при увеличении амплитуды накачки, что привело бы к возбуждению более высоких уровней.

В заключение хочу выразить свою благодарность Махлину Юрию Генриховичу за ценные советы и рекомендации при обсуждении дипломной работы.

## Список литературы

- [1] Yuriy Makhlin, Gerd Schön and Alexander Shnirman, "Quantum state engineering with Josephson-junction devices", cond-mat/0011269.
- [2] C. Zener, "Non-adiabatic crossing of energy levels". Proc. Roy. Soc. London Ser. A 137:696-702, 1932.
- [3] L. Landau, "Zur Theorie der Energieübertragung. II". Physics of the Soviet Union 2: 46–51, 1932.
- [4] Antti Paila, Jani Tuorila, Mika Sillanpää, David Gunnarsson, Jayanta Sarkar, Yuriy Makhlin, Erkki Thuneberg and Pertti Hakonen, "Interband transitions and interference effects in superconducting qubits", cond-mat/0901.1304.
- [5] William D. Oliver, Yang Yu, Janice C. Lee, Karl K. Berggren, Leonid S. Levitov, Terry P. Orlando, "Mach-Zehnder Interferometry in a Strongly Driven Superconducting Qubit", cond-mat/0901.1304.
- [6] Mika Sillanpää, Teijo Lehtinen, Antti Paila, Yuriy Makhlin and Pertti Hakonen, "Landau-Zener interferometry with superconducting qubits", cond-mat/0510559.
- [7] A. V. Shytov, D. A. Ivanov, M. V. Feigel'man, "Landau-Zener interferometry for qubits", cond-mat/0110490.
- [8] C. van der Wal *et al*, Science, 290, 773 (2000).
- [9] J. R. Friedman *et al*, Nature, 406, 43 (2000).
- [10] Y. Nakamura, Yu. Pashkin and H. S. Tsai, Nature, 398, 786 (1999).
- [11] А. Абрагам, "Ядерный магнетизм", 1963.
- [12] Ч. Слиткер, "Основы теории магнитного резонанса", 1980.
- [13] M. A. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Yu. Makhlin, L. Roschier and P. J. Hakonen, "Direct observation of Josephson capacitance", cond-mat/0504517.
- [14] M. Abramovitz, I. Stegun, "Handbook of mathematical functions", 1964.