Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

"Динамо в случайном поле с сильным постоянным широм."

Студент 528 гр. Сизов Г.А.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Колоколов И.В.

Москва 2009 г.

Содержание

1 Введение.

В этой работе будет рассмотрен эффект турбулентного динамо — экспоненциальный рост магнитного поля в области турбулентного течения проводящей жидкости. Это явление ответственно за наличие сильных магитных полей в астрофизических системах. Динамо управляется двумя процессами - ростом магнитного поля за счет растяжения магнитных линий и диссипацией энергии за счет диффузии. На первоначальной стадии можно рассматривать магнитное поле как пассивное, живущее в заданом поле скоростей, позже включается обратное влияние поля на течение жидкости. Нас будет интересовать первая, кинематическая стадия.

Флуктуационую компоненту скорости будем описывать моделью Казанцева-Крайчнена [1], [2], т.е. поле скоростей предполагается гауссовым и дельта-коррелированным по времени:

$$\langle v_i(\vec{r}_1,t_1)v_j(\vec{r}_2,t_2) = 2\delta(t_1-t_2)D_{ij}(\vec{r}_1-\vec{r}_2). \tag{1}$$

$$D_{ij} = D_0\delta_{ij} - \frac{1}{2}d_{ij}(\vec{r}) \tag{2}$$

$D_{ij}(0)$ является эффективным коэффициентом диффузии, определяющий относительное движение двух лагранжевых частиц жидкости на больших временах. Поведение $d(r)$ определяется двумя масштабами: вязким масштабом η и масштабом корреляции скорости L. В интервале $r \ll \eta$ градиент скорости можно считать постоянным и $d(r) \sim r^2$. В инерционном интервале $\eta \ll L$ и $d(r) \sim r^{\xi}$. На расстояних, больших, чем L коррелятор скорости стремится к 0.

Имеется еще один пространственный масштаб, r_d - расстояние, на котором существенна молекулярная диффузия. Он предполагается много меньшим вязкого масштаба.

В статье [3] исследован двухточечный коррелятор в присутствии накачки и слабой диффузии для изотропного случая. В при $\xi < 1$ динамо отсутствует, и в инерционном интервале корелятор падает степенным образом с показателем

$$\gamma_2 = -\frac{3+\xi}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1-\xi(\xi+2)/3}. \tag{3}$$

Нас будет интересовать пространственная структура коррелятора в интервале между диффузным и вязким масштабами и инкремент роста:

$$\overline{\gamma} = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln\langle B^2\rangle}{2t} \tag{4}$$

В однородном случае он определяется ляпуновскими экспонентами λ_i [4]

$$\overline{\gamma} = \min\{(\lambda_1-\lambda_2)/2, (\lambda_2-\lambda_3)/2\} \tag{5}$$

Поскольку $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, то в изотропном турбулентном потоке инкремент всегда неотрицателен.

В работе иследуется одновременной пространственный коррелятор магнитного поля в течении, образованном наложением сильного постоянного шира и изотропного турбулентного потока. Сначала, используя уравнение, связывающее магнитное поле и поле скоростей, получаем уравнение на коррелятор поля, усредняя по статистике скоростей. Во второй секции мы решим это уравнение, пренебрегая флуктуациями(чистый сдвиг). При этом изначально коррелятор локализован на масштабе L, а потом наблюдается линейный рост величины поля и растяжение начального пятна. В третьей секции вводятся флуктуации. При этом рост становится экспоненциальным и, используя шир как большой параметр, находим инкремент роста поля на больших временах.

2 Вывод уравнения на двухточечный пространственный коррелятор.

Пространственный двухточечный коррелятор магнитного поля имеет вид

$$F_{ij}(r_1-r_2,t) = \langle B_i(r_1,t)B_j(r_2,t)\rangle. \tag{6}$$

Пусть полная скорость течения $\mathbf{v}$, складывается из ее флуктуационной части $\mathbf{u}$ и части со сдвигом $v_x^{shear} = sy$, который в данной задаче предполагается сильным(конкретное условие на s будет дано ниже). Выведем уравнение, которому подчиняется F_{ij} в так заданном течении.

Мы предполагаем, что расстояние между точками r_1 и r_2 лежит в интервале между диффузионным масштабом r_d и масштабом вязкости r_ν. В этом случае можно считать, что $v_\alpha(\mathbf{r}) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) r_\beta$

Итак,

$$\langle (u_\alpha(r_1) - u_\alpha(r_2))(u_\beta(r_1) - u_\beta(r_2)) \rangle = \frac{1}{\tau} \sigma_{\alpha\beta}(r_1 - r_2)\delta(t_1 - t_2), \tag{7}$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta}(r) = \delta_{\alpha\beta} r^2 - \frac{1}{2} r_\alpha r_\beta. \tag{8}$$

Параметер τ, имеющий размерность времени, определяет уровень гидродинамического "шума", накладывающегося на сдвиговое течение. Нас будет интересовать поведение магнитного поля на временах $t \gg \tau$.

$$\begin{cases} v_x = u_x + sy, \\ v_y = u_y, \\ v_z = u_z \end{cases} \tag{9}$$

Выведем уравнение, связывающее магнитное поле и скорость течения. В системе, в которой элемент жидкости покоится $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$. Значит в неподвижной системе

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right). \tag{10}$$

Пишем уравнения Максвелла в среде, пренебрегая током смещения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \tag{11}$$

В общем случае эти уравнения нужно дополнить уравнениями Навье-Стокса с внешней силой, возникающей из-за действия магнитного поля. Но когда магнитное число Рейнольдса $Re_m = \frac{ul}{\kappa}$ много больше единицы, можем пренебречь обратным влиянием магнитного поля на жидкость и решать следующее уравнение на B:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{vB}] + \kappa \Delta \mathbf{B}, \tag{12}$$

где диссипация определяется коэффициентом диффузии $\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}$ Запишем формальное решение этого уравнения, воспользовавшись $T-$ упорядоченной экспонентой:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = T \exp \int_0^t d\tau (\hat{A}(\mathbf{r}, \tau) + \kappa \Delta) \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0), \tag{13}$$

где введено обозначение

$$\hat{A}_{ij} = e_{inm} e_{m\alpha j} \partial_n v_\alpha. \tag{14}$$

Подставим это формальное решение в определение F_{ij}.

$$\langle B_i(\mathbf{r}_1) B_j(\mathbf{r}_2) \rangle = \left\langle \left(T \exp \int\limits_0^t d\tau_1 A(\mathbf{r}_1, \tau_1) \right)_{ip} \left(T \exp \int\limits_0^t d\tau_2 A(\mathbf{r}_2, \tau_2) \right)_{jq} \right\rangle \langle B_p(\mathbf{r}_1, 0) B_q(\mathbf{r}_2, 0) \rangle. \tag{15}$$

Здесь мы усредняем отдельно по статистике скорости и по начальному распределению магнитного поля.

Разобьем интервал интегрирования на промежутки длины ϵ. Согласно определению $T-$экспоненты, мы можем записать ее в виде произведения экспонент от интегралов по этим промежуткам, записанного с соблюдением порядка времен.

$$T\exp\int\limits_0^t d\tau = \prod_i \exp\int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau. \tag{16}$$

В итоге каждая из двух Т-экспонент в (15) представляется в виде произведения маленьких экспонент. Поскольку операторы $\hat{A}$, получаемые из первой и второй экспоненты действуют на координаты двух разных точек, то они коммутируют. Воспользовавшись этим, представим (15) в таком виде:

$$\langle B_i(r_1)B_j(r_2)\rangle = \prod_i \left\langle \left(T\exp\int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau_1 A(r_1,\tau_1)\right)_{ip} \left(T\exp\int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau_2 A(r_2,\tau_2)\right)_{jq} \right\rangle \langle B_p(r_1,0)B_q(r_2,0)\rangle \tag{17}$$

Каждую пару экспонент можно усреднять независимо, т.к. флуктуации скорости в нашей модели дельта-кореллированы по времени, и зацепляются между собой только операторы $\hat{A}$, относящиеся к одном и тому же временному промежутку. Разложим до второго порядка по ϵ каждую экспоненту в последнем произведении. Тогда отдельный множитель будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_{ip} + \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau A_{1ip}(\tau) + \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau' A_{1is}(\tau')A_{1sp}(\tau)\right) \times \\
&\qquad \times \left(\delta_{jq} + \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau A_{2jq}(\tau) + \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau \int\limits_{t_i}^{t_i+\epsilon} d\tau' A_{2js}A'_{2sq}\right) = \\
&= \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{ip}\left(\kappa\Delta_2\delta_{jq}\epsilon + \int d\tau A_{2jq} + \frac{1}{2}\int d\tau \int d\tau' A_{2js}A'_{2sq}\right) + \\
&+ \delta_{jq}\left(\kappa\Delta_1\delta_{ip}\epsilon + \int d\tau A_{1ip} + \frac{1}{2}\int d\tau \int d\tau' A_{1is}A'_{1sp}\right) + \iint d\tau d\tau' A_{1ip}A'_{2jq}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Соответственно разбиению скорости на флуктуационную и сдвиговую части представим оператор $\hat{A}$ в виде

$$\hat{A} = \langle\hat{A}\rangle + \hat{A}_{fl} \tag{19}$$

Наша задача — выделить линейные по ϵ члены.

В линейных по A слагаемых флуктуационная компонента скорости даст ноль при усреднении и останется только вклад в скорость, связанный с неизотропностью. В квадратичных по A слагаемых возможны три вида произведений: вида $A_{fl}A'_{fl}$, $A_{shear}A'_{fl}$ и $A_{shear}A'_{shear}$. Усреднение первого из них будет содержать дельа-функцию по времени, и поэтому двойной интеграл по времени сведется к домножению на ϵ, т.е. оно даст линейный вклад. Смешанные произведения сдвиговой и флуктуационной компоненты при усреднении изчезнут, т.к. в них флуктационная компонента стоит в первой степени. Слагаемые третьего типа от времени не зависят и дадут квадратичный по ϵ вклад.

Выпишем квадратичную по $\hat{A}$ часть (18), учитывая определение (14) оператора $\hat{A}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\delta_{ip}e_{jnm}e_{m\alpha s}e_{skl}e_{l\beta q}\partial_n^2(u_\alpha^2\partial_k^2(u_\beta^2 F_{pq}))+ \\
&\qquad + \frac{1}{2}\delta_{jq}e_{inm}e_{m\alpha s}e_{skl}e_{l\beta p}\partial_n^1(u_\alpha^1\partial_k^1(u_\beta^1 F_{pq}))+ \\
&\qquad\qquad + e_{inm}e_{m\alpha p}e_{jkl}e_{l\beta q}\partial_n^1(u_\alpha^1\partial_k^2(u_\beta^2 F_{pq}))
\end{aligned} \tag{20}$$

В первых двух слагаемых обе скорости взяты в одной точке. Но

$$\langle u_\alpha \partial_k u_\beta \rangle = 0 \tag{21}$$

$$\langle \partial_n (u_\alpha \partial_k u_\beta) \rangle = 0 \tag{22}$$

Поэтому слагаемые в (20), в которых хотя бы одна из производных действует на u, обнуляются. Вклад слагаемого в котором обе производные действуют на F пропорционален $v_0^2 \delta_{\alpha\beta}$. Положим $v_0 = 0$. Воспользуемся известным выражением для свертки антисимметричных тензоров e_{ijk}

$$e_{inm} e_{mqp} = \delta_{iq}\delta_{np} - \delta_{ip}\delta_{nq} \tag{23}$$

Тогда от (20) останется только последнее слагаемое, раскрываем его:

$$\begin{aligned}
&(\delta_{i\alpha}\delta_{np} - \delta_{ip}\delta_{n\alpha})(\delta_{j\beta}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{\beta k}) \times \\
&\quad \times \left(\langle \partial_n^1 u_\alpha^1 \partial_k^2 u_\beta^2 \rangle F_{pq} + \langle u_\alpha^1 \partial_k^2 u_\beta^2 \rangle \partial_n F_{pq} - \langle \partial_n^1 u_\alpha^1 u_\beta^2 \rangle \partial_k F_{pq} - \langle u_\alpha^1 u_\beta^2 \rangle \partial_n \partial_k F_{pq} \right) = \\
&\quad = \delta_{i\alpha}\delta_{np}\delta_{j\beta}\delta_{kq} \langle \partial_n^1 u_\alpha^1 \partial_k^2 u_\beta^2 \rangle F_{pq} - \delta_{ip}\delta_{n\alpha}\delta_{j\beta}\delta_{kq} \langle u_\alpha^1 \partial_k^2 u_\beta^2 \rangle \partial_n F_{pq} + \\
&\quad + \delta_{i\alpha}\delta_{np}\delta_{jq}\delta_{\beta k} \langle \partial_n^1 u_\alpha^1 u_\beta^2 \rangle \partial_k F_{pq} - \delta_{ip}\delta_{n\alpha}\delta_{jq}\delta_{\beta k} \langle u_\alpha^1 u_\beta^2 \rangle \partial_n \partial_k F_{pq} = \\
&\quad = \langle \partial_p u_i \partial_q u_j \rangle F_{pq} - \langle u_n^1 \partial_k^2 u_j^2 \rangle \partial_n F_{ik} + \langle \partial_n^1 u_i^1 u_k^2 \rangle \partial_k F_{nj} - \langle u_n^1 u_k^2 \rangle \partial_n \partial_k F_{ij}
\end{aligned} \tag{24}$$

Выпишем несколько соотношений, которые получаются из выражения для коррелятора скоростей (7) и используются ниже

$$\langle u_\alpha u'_\beta \rangle = \frac{1}{2} \left(v_0^2 \delta_{\alpha\beta} - (r - r')^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (r_\alpha - r'_\alpha)(r_\beta - r'_\beta) \right), \tag{25}$$

$$\langle u_\alpha \partial_n \partial_k u_\beta \rangle = -\langle \partial_n u_\alpha \partial'_k u'_\beta \rangle, \tag{26}$$

$$\partial'_k \langle u_\alpha u'_\beta \rangle = -(r'_k - r_k)\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(r'_\beta - r_\beta)\delta_{\alpha k} + \frac{1}{4}(r'_\alpha - r_\alpha)\delta_{\beta k}, \tag{27}$$

$$\langle \partial_n u_\alpha \partial'_k u'_\beta \rangle = \delta_{nk}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha n}\delta_{\beta k} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha k}\delta_{\beta n}. \tag{28}$$

Используя их, преобразуем (24)

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_{pq}\delta_{ij} - \frac{1}{4}\delta_{pi}\delta_{qj} - \frac{1}{4}\delta_{pj}\delta_{qi} \right) F_{pq} - \left(\delta_{nj} x_k - \frac{1}{4}\delta_{kn} x_j - \frac{1}{4}\delta_{kj} x_n \right) \partial_n F_{ik} - \\
&\quad - \left(\delta_{ik} x_n - \frac{1}{4}\delta_{ni} x_k - \frac{1}{4}\delta_{nk} x_i \right) \partial_k F_{nj} - \left(\frac{1}{2} v_0^2 \delta_{nk} - \frac{1}{2} x^2 \delta_{nk} + \frac{1}{4} x_n x_k \right) \partial_n \partial_k F_{ij} = \\
&\quad = \left(\delta_{ij} F_{pq} - \frac{1}{2} F_{ij} \right) - \left(x_k \partial_j F_{ik} - \frac{1}{4} x_n \partial_n F_{ij} \right) - \left(x_n \partial_i F_{nj} - \frac{1}{4} x_k \partial_k F_{ij} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{v_0^2}{2} \Delta - \frac{1}{2} r^2 \Delta + \frac{1}{4} x_\alpha x_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \right) F_{ij} = \\
&\quad = \left(\delta_{ij} F_{qq} - \frac{1}{2} F_{ij} \right) - x_k \partial_j F_{ik} - x_k \partial_i F_{kj} + \left(\frac{1}{2}(r\nabla) + \frac{1}{2} r^2 \Delta - \frac{1}{4} x_\alpha x_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \right) F_{ij}
\end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, мы выделили линейную часть по ϵ и можем переписать (17) :

$$F(r_1, r_2, t) = \prod_i \left(1 + \epsilon \hat{L}(t_i) \right) F(r_1, r_2, 0) = T \exp \left(\int_0^t d\tau \hat{L}(\tau) \right) F(r_1, r_2, 0), \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
\left(\hat{L}(t, r_1, r_2) F \right)_{ij} &= \left(\delta_{ij} F_{qq} - \frac{1}{2} F_{ij} \right) - x_k \partial_j F_{ik} - x_k \partial_i F_{kj} + \\
&+ \left(\frac{1}{2}(r\nabla) + \frac{1}{2} r^2 \Delta - \frac{1}{4} x_\alpha x_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \right) F_{ij} + (\kappa\Delta_1 + \kappa\Delta_2) F_{ij} + \langle A_{jq} \rangle F_{iq} + \langle A_{ip} \rangle F_{pj}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Равенство (30) эквивалентно уравнению $\partial_t F = \hat{L}F$ или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa\Delta\right) F_{ij} = \langle A_{jq}\rangle F_{iq} + \langle A_{ip}\rangle F_{pj} + \\ + \delta_{ij}F_{qq} - \frac{1}{2}F_{ij} - x_k\partial_j F_{ik} - x_k\partial_i F_{kj} + \left(\frac{1}{2}(r\nabla) + \frac{1}{2}r^2\Delta - \frac{1}{4}x_\alpha x_\beta \partial_\alpha\partial_\beta\right) F_{ij}. \quad (32)$$

Матрица $\langle A_{ij}\rangle = \partial_j\langle u_i\rangle - \delta_{ij}\partial_n\langle u_n\rangle$ определяется только сдвиговой компонентой течения

$$\langle A\rangle = \begin{pmatrix} -sy\partial_x & s & 0 \\ 0 & -sy\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -sy\partial_x \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$(\partial_t - 2\kappa\Delta)\, F_{ij} = -2sy\partial_x F_{ij} + sF_{iy}\delta_{jx} + sF_{yj}\delta_{ix} + \\ + \frac{1}{\tau}\left(\delta_{ij}\,\mathrm{Sp}\,F - \frac{1}{2}F_{ij} - x_k\partial_j F_{ik} - x_k\partial_i F_{kj} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(r\nabla)F_{ij} + \frac{1}{2}r^2\Delta F_{ij} - \frac{1}{4}x_\alpha x_\beta\partial_\alpha\partial_\beta F_{ij}\right) \quad (34)$$

Получили замкнутое уравнение на коррелятор магнитного поля, уже не содержащее стохастических величин.

Теперь рассмотрим изотропное течение, для которого $s = 0$. В этом случае $\langle A\rangle$ обращается в 0 и можно получить замкнутое уравнение на след коррелятора. Возьмем след от обеих частей (22).

$$H = \mathrm{Sp}\,F_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa\Delta\right) H(r,t) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(r\nabla) + \frac{1}{2}r^2\Delta - \frac{1}{4}x_\alpha x_\beta\partial_\alpha\partial_\beta\right) H(r,t)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa\Delta\right) H(r,t) = \frac{5}{2}H + \frac{3}{2}rH' + \frac{1}{4}r^2H'' \quad (35)$$

Полученное уравнение совпадает с приведенным в [3], для случая когда $\xi = 2$ $D = \frac{1}{8}$

3 Решение без учета флуктуаций.

Опустим в правой части (34) слагаемые, связанные с флуктуационной компонентой течения, а из всех компонент F_{ij} оставить только F_{xx} и F_{xy} — остальные малы из-за сильного шира. Тогда (34) сведется к следующей системе уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa\Delta\right) F_{xx} = -2sy\partial_x F_{xx} + sF_{xy}, \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa\Delta\right) F_{xy} = -2sy\partial_x F_{xy}. \quad (37)$$

Пусть изначально поле локализовано в пятне размером L. Зададим следующие начальные условия, удовлетворяющие условию бездивергентности магнитного поля

$$F_{ij}|_{t=0} = (\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\Delta)e^{-r^2/2L^2} \quad (38)$$

$$F_{xy}|_{t=0} = \partial_x\partial_y e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2L^2}} = \frac{xy}{L^4}e^{-r^2/2L^2} \quad (39)$$

$$F_{xx}|_{t=0} = -(\partial_y^2 + \partial_z^2)e^{-r^2/2L^2} = \frac{-y^2 - z^2 + 2L^2}{L^4}e^{-r^2/2L^2} \quad (40)$$

Если пренебречь диффузией, то

$$F_{xy} = f(x - 2sty, y, z) \tag{41}$$

С учетом начального условия находим:

$$F_{xy} = \frac{(x-2sty)y}{L^4} \exp\left[-\frac{(x-2sty)^2 + y^2 + z^2}{2L^2}\right] \tag{42}$$

Будем искать F_{xx} в таком виде:

$$F_{xx} = g(x, y, z, t) \exp\left[-\frac{(x-2sty)^2 + y^2 + z^2}{2L^2}\right] \tag{43}$$

Подставляем в (36) и в начальное условие:

$$\begin{cases} (\partial_t + 2sy\partial_x)g = s\frac{(x-2sty)y}{L^4}, \\ g(t=0) = \frac{-y^2 - z^2 + 2L^2}{L^4} \end{cases} \tag{44}$$

Получаем решение:

$$g = \frac{sty(x-2sty) + 2L^2 - y^2 - z^2}{L^4}. \tag{45}$$

Итак, F_{xx} без учета диффузии:

$$F_{xx} = \frac{sty(x-2sty) + 2L^2 - y^2 - z^2}{L^4} \exp\left[-\frac{(x-2sty)^2 + y^2 + z^2}{2L^2}\right]. \tag{46}$$

Теперь включим диффузию. Для решение системы (37) перейдем в Фурье-представление.

$$F_{xx}(x, y, z, t) = \int d^3k \exp[ik_x x + ik_y y + ik_z z]\tilde{f}(k_x, k_y, k_z, t), \tag{47}$$

$$F_{xy}(x, y, z, t) = \int d^3k \exp[ik_x x + ik_y y + ik_z z]\tilde{g}(k_x, k_y, k_z, t). \tag{48}$$

Вычислим Фурье-образы начальных условий:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{xy}(t=0, \vec{k}) &= \int d^3r \frac{xy}{L^4} e^{-r^2/2L^2 - i\vec{k}\vec{r}} = -\frac{1}{L^4}\frac{\partial^2}{\partial k_x \partial k_y} \int d^3r e^{-r^2/2L^2 - i\vec{k}\vec{r}} = \\ &= -\frac{(2\pi)^{3/2}}{L}\frac{\partial^2}{\partial k_x \partial k_y} e^{-L^2k^2/2} = -(2\pi)^{3/2} L^3 k_x k_y e^{-L^2k^2/2}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{xx}(t=0, \vec{k}) &= \int d^3r \frac{2L^2 - y^2 - z^2}{L^4} e^{-r^2/2L^2 - i\vec{k}\vec{r}} = \\ &= (2\pi)^{3/2} L^3 \left(\frac{2}{L^2} + \frac{\partial^2_{k_y} + \partial^2_{k_z}}{L^4}\right) e^{-k^2L^2/2} = (2\pi)^{3/2}\left(L + L^3(k_y^2 + k_z^2)\right) e^{-k^2L^2/2} \end{aligned} \tag{50}$$

Уравнение (37) на F_{xy} в Фурье-представлении имеет вид:

$$(\partial_t + 2\kappa k^2)\tilde{g} = 2sk_x \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_y}. \tag{51}$$

Поделим обе части на g.

$$(\partial_t - 2sk_x\partial_{k_y}) \ln \tilde{g} = -2\kappa k^2 \tag{52}$$

Общий вид решения

$$\ln \tilde{g} = h(k_y + 2sk_x t, k_x, k_z) + \frac{\kappa}{s}(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x), \tag{53}$$

где h — произвольная функция. Переходим обратно в координатное представление:

$$F_{xy}(x,y,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp\left[i\vec{k}\vec{r} + \frac{\kappa}{s}(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x)\right] C(k_x, k_y + 2sk_x t, k_z) \tag{54}$$

Положим в последнем равенстве $t = 0$ и найдем C, зная Фурье-образ начальных условий $\tilde{F}_{xy}|_{t=0}$

$$C(k_x,k_y,k_z) = \exp\left\{-\frac{\kappa}{s}\left(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x\right)\right\}\tilde{F}_{xy} =$$
$$= -(2\pi)^{3/2} k_x k_y L^3 \exp\{-k^2L^2/2 - \frac{\kappa}{s}\left(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x\right)\} \tag{55}$$

Поскольку C зависит от k_y и t только в комбинации $k_y + 2stk_x$, то зависимость C от времени определяется однозначно. Подставляем в (54)

$$F_{xy}(x,y,z,t) = -L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} k_x(k_y + 2stk_x) \exp\left(i\vec{k}\vec{r} + \frac{\kappa}{s}\left[(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(k_x^2 + (k_y+2stk_x)^2 + k_z^2\right)L^2/2 - \frac{\kappa}{s}(k_y+2stk_x)(k_x + (k_y+2stk_x)^2/3k_x + k_z^2/k_x)\right]\right) =$$
$$= L^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2st\frac{\partial}{\partial x}\right)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left[i\vec{k}\vec{r} - \left(k_x^2 + (k_y+2stk_x)^2 + k_z^2\right)L^2/2 - \kappa\left(2tk^2 + \frac{8}{3}s^2t^3k_x^2 + 4st^2k_xk_y\right)\right] =$$
$$= L^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2st\frac{\partial}{\partial x}\right)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^T M\vec{k} - i\vec{k}\vec{r}},, \tag{56}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} (1+4s^2t^2)L^2 + 4\kappa t + \frac{16}{3}s^2t^3\kappa & 2stL^2 + 4st^2\kappa & 0 \\ 2stL^2 + 4st^2\kappa & L^2 + 4\kappa t & 0 \\ 0 & 0 & L^2 + 4\kappa t \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Обозначим $R^2 = L^2 + 4\kappa t$

$$\det M = R^2\left(R^4 + \frac{16}{3}s^2t^3\kappa R^2 - 16s^2t^4\kappa^2\right) \tag{58}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} R^2 & -2stL^2 - 4st^2\kappa & 0 \\ -2stL^2 - 4st^2\kappa & R^2 + 4s^2t^2L^2 + \frac{16}{3}s^2t^2\kappa & 0 \\ 0 & 0 & \det M/R^4 \end{pmatrix} \frac{R^2}{\det M} \tag{59}$$

Трехмерный гауссов интеграл (56) берем согласно известной формуле:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^T M\vec{k} - i\vec{k}\vec{r}} = (\det M)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{r}^T M^{-1}\vec{r}\right). \tag{60}$$

Итак, для F_{xy} предэкспонента равна

$$L^3 \frac{M_{xy}^{-1} + (M_{yy}^{-1}y + M_{xy}^{-1}x)(M_{xx}^{-1}x + M_{xy}^{-1}y) + 2st\left(M_{xx}^{-1} + (M_{xx}^{-1}x + M_{xy}^{-1}y)^2\right)}{R\sqrt{R^4 + \frac{16}{3}s^2t^3\kappa R^2 - 16s^2t^4\kappa^2}}, \tag{61}$$

а показатель степени

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{R^4x^2 + \left(R^4 + 4R^2s^2t^2L^2\right)y^2 - 2xy\left(2stL^2 + 4st^2\kappa\right)}{R^2\left(R^4 + \frac{16}{3}s^2t^3\kappa R^2 - 16s^2t^4\kappa^2\right)} + z^2/R^2\right] \tag{62}$$

Найдем теперь F_{xx}. Перепишем (37) в Фурье-представлении, при этом в правую часть войдет найденный выше Фурье-образ F_{xy}:

$$(\partial_t + 2\kappa k^2)f = 2sk_x\partial_{k_y} f - (2\pi)^{3/2} sL^3 k_x(k_y + 2stk_x)\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{k}^T M\vec{k}\right) \tag{63}$$

Общее решение имеет вид

$$\tilde{f} = \exp\left[\frac{\kappa}{s}\left(k_x k_y + k_y^3/3k_x + k_z^2 k_y/k_x\right)\right] C\left(k_x, k_y + 2sk_x t, k_z\right) + p\left(\vec{k}, t\right), \tag{64}$$

где C — произвольная функция, а p — частное решение неоднородного уравнение. Для того, чтобы найти p, перейдем в частотное представление и будем искать $\tilde{p}(\vec{k},\omega)$

$$(-i\omega + 2\kappa k^2)\tilde{p} = 2sk_x\partial_{k_y}\tilde{p} + \eta(\vec{k},\omega), \tag{65}$$

где введено обозначение:

$$\eta = -(2\pi)^{3/2}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}sL^3k_x(k_y+2stk_x)\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{k}^T M(t)\vec{k}\right). \tag{66}$$

Пишем частное решение (65)

$$p(\omega,\vec{k}) = -\int\limits_0^{k_y} dk_y''\frac{\eta(\omega,k'')}{2sk_x}\exp\left[\int\limits_{k_y''}^{k_y} dk_y'\frac{-i\omega + 2\kappa {k'}^2}{2sk_x}\right] \tag{67}$$

Переходим обратно от частотного представления к временному

$$p(t,\vec{k}) = -\frac{1}{2sk_x}\int\limits_0^{k_y} dk_y'\eta\left(t+\frac{k_y-k_y'}{2sk_x},\vec{k}'\right)\exp\left[\frac{\kappa}{s}\frac{k_x^2k_y + k_y^3/3 + k_z^2k_y - {k_x'}^2k_y' - {k_y'}^3/3 - {k_z'}^2k_y'}{k_x'}\right] \tag{68}$$

Осталось найти неизвестную функцию C, определяемую начальными условиями. Для этого положим $t=0$ в (64) и учтем условие (50)

$$\begin{aligned}C(\vec{k}) = \frac{1}{2sk_x}\int\limits_0^{k_y} dk_y'\eta\left(\frac{k_y-k_y'}{2sk_x},\vec{k}'\right)\exp\left[-\frac{\kappa}{s}\left(k_xk_y' + \frac{{k_y'}^3}{3k_x} + \frac{k_y'k_z^2}{k_x}\right)\right] + \\ + (2\pi)^{3/2}(L + L^3(k_x^2+k_z^2))\exp\left[-\frac{\kappa}{s}\left(k_xk_y + \frac{k_y^3}{3k_x} + \frac{k_yk_z^2}{k_x}\right)\right]\end{aligned} \tag{69}$$

Зная $C(\vec{k})$ при $t=0$, получаем зависимость от времени, заменяя k_y на $k_y + 2sk_xt$.

Итак, получили интегральное представление для F_{xx}:

$$F_{xx}(\vec{r},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ikr}\left(\exp\left[\frac{\kappa}{s}\left(k_xk_y + k_y^3/3k_x + k_z^2k_y/k_x\right)\right]C(k_x,k_y+2sk_xt,k_z) + p(\vec{k},t)\right) \tag{70}$$

где $p\left(\vec{k},t\right)$ и $C\left(\vec{k}\right)$ даются формулами (68) и (69) соответственно.

4 Инкремент в отсутствие диффузии.

В этом разделе мы учтем флуктуационную компоненту течения и численно найдем инкремент роста магнитного поля на больших временах. Запишем, используя (34), уравнения на F_{xx} и F_{xy}. Пренебрежем диффузией и членами, не содержащими $x\partial_y$, $x^2\partial_y^2$ или множителя s. Перейдем к переменным ξ,η

$$\begin{cases}\eta = \ln x,\\ y = \xi x.\end{cases} \tag{71}$$

Производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases}\partial_y = \frac{1}{x}\partial_\xi,\\ \partial_x = \partial_{\tilde{x}} - \frac{y}{x^2}\partial_\xi,\\ \partial_\eta = x\partial_x.\end{cases} \tag{72}$$

$$\begin{cases} \partial_t F = -s\xi\partial_\eta F + s\xi^2\partial_\xi F + sG + \frac{1}{\tau}\partial_\xi^2 F, \\ \partial_t G = -s\xi\partial_\eta G + s\xi^2\partial_\xi G + \frac{1}{\tau}\partial_\xi^2 G - \frac{2}{\tau}\partial_\xi F, \end{cases} \tag{73}$$

где $F_{xy} = G$, $F_{xx} = F$. Изменим масштаб по t и ξ:

$$\begin{cases} t \to \frac{t}{(s^2/\tau)^{1/3}}, \\ \xi \to \frac{\xi}{(s\tau)^{1/3}}, \\ G \to \frac{G}{(s\tau)^{1/3}}. \end{cases} \tag{74}$$

Теперь в системе не осталось внешних параметров

$$\begin{cases} \partial_t F = -\xi\partial_\eta F + \xi^2\partial_\xi F + G + \partial_\xi^2 F, \\ \partial_t G = -\xi\partial_\eta G + \xi^2\partial_\xi G + \partial_\xi^2 G - 2\partial_\xi F. \end{cases} \tag{75}$$

Сделаем Фурье-преобразование по η

$$\tilde{F}(k,\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp(-ik\eta) F(\eta,\xi,t) \tag{76}$$

Тогда $\partial_\eta \to ik$. Когда k лежит на верхней мнимой полуоси, система записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial_t F = \xi q F + \xi^2\partial_\xi F + \partial_\xi^2 F + G \\ \partial_t G = \xi q G + \xi^2\partial_\xi G + \partial_\xi^2 G - 2\partial_\xi F \end{cases} \tag{77}$$

где $q > 0$.

Найдем асимптотики F: при $\xi \to \infty$ в правой части работают второе и третье слагаемые, они уравновешивают друг друга, когда

$$F \sim \exp\{-\xi^3/3\}. \tag{78}$$

При $\xi \to -\infty$ убывание степенное:

$$F \sim |\xi|^{-q}. \tag{79}$$

Пусть начальное условие в x, y-представлении имело вид $F_0(x,y) = \exp[-(x^2+y^2)]$. Перепишем его в координатах k, ξ

$$\tilde{F}_0(k,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left[-ik\eta - (1+\xi^2)e^{2\eta}\right] = \frac{1}{2}(1+\xi^2)^{ik/2} \int\limits_0^{\infty} dz z^{-ik/2-1} e^{-z} = \\ = \frac{1}{2}(1+\xi^2)^{ik/2}\Gamma(-ik/2) \tag{80}$$

Полученное выражение имеет полюса при $k = -2ni$, $n > 0$, в том числе и при k=0. Этот полюс связан с тем, что исходная корреляционная функция является конечной в 0, и соответственно подынтегральная функция $\exp\left[-ik\eta - (1+\xi^2)e^{2\eta}\right]$ стремится к константе на $-\infty$.

Поскольку временная эволюция каждой Фурье-гармоники происходит независимо, то

$$\tilde{F}(k,\xi,t) = \sum_n f_n(k,\xi)\exp[\gamma_n(k)t] \tag{81}$$

На больших временах выживает гармоника с максимальным при данном k инкрементом $\gamma(k)$. Тогда

$$F(t,\eta,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k,\xi)\exp[\gamma(k)t + ik\eta] \tag{82}$$

Это выражение содержит множитель $\Gamma(-ik/2)$, включенный в $f(k,\xi)$, поэтому оно тоже имеет полюс при $k=0$. Покажем, что его нужно обходить сверху. Действительно, раз существование полюса не связанно с конкретным видом функции, то правило обхода должно быть универсальным для функций с заданными асимптотиками. Пусть, например, $f(x)=\theta(-x)$, и Фурье-образ равен

$$\tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{0} dk \exp[-ikx]. \tag{83}$$

Этот интеграл сходится на верхней мнимой полуоси, аналитически продолжаем его оттуда

$$\tilde{f}(k) = i/k \tag{84}$$

Как и предполагалось, Фурье-образ имеет полюс при $k=0$. Теперь сделаем обратное преобразование и обойдем его сверху, убедимся в том, что получается снова $\theta(-x)$.

$$f(x) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi k} e^{ikx} \tag{85}$$

При $x>0$ замыкаем контур интегрирования вверх и получаем 0, а при $x<0$ замыкаем вниз и получаем 1, что и требовалось.

5 Численное нахождение инкремента.

Поскольку система (77) не содержит буквенных параметров задачи (s,τ), то поведение F, G в новых переменных универсально и его удобно исследовать численно при разных значениях k. Интерес представляет инкремент роста поля как функция k, лежащего на мнимой оси.

На отрезке $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$ зададим какие-то начальные условия $F(\xi, t=0)$, $G(\xi, t=0)$, локализованные вблизи $\xi=0$ и запустим эволюцию во времени от 0 до t_{max}. Первоначально симметричный профиль деформируется в соотвествии с асимптотиками (79), (78).

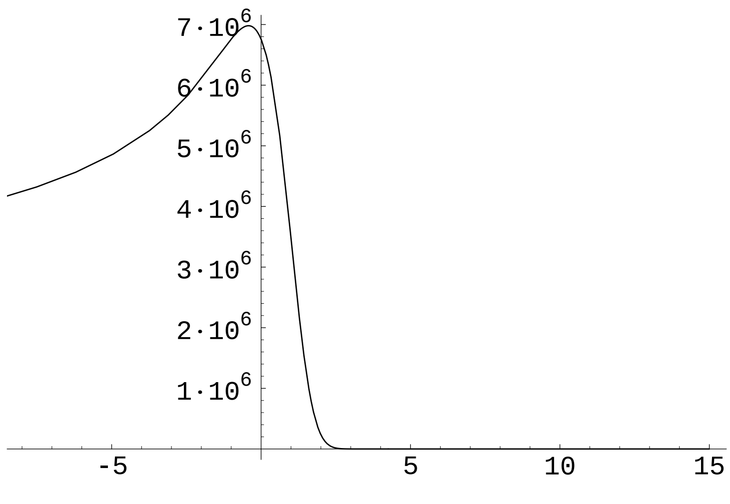

Рис. 1: Установившийся профиль $F(\xi)$.

Аналитическое решение системы предполагает четыре гранусловия: стремление обеих искомых функций к нулю на обеих бесконечностях. При численном счете условия накладываются на границах отрезка $\pm\xi_{max}$:

$$F|_{\xi=\xi_{max}} = 0, G|_{\xi=\xi_{max}} = 0, \tag{86}$$

$$\xi_{max}\frac{F'}{F}\Big|_{\xi=-\xi_{max}} = q, \xi_{max}\frac{G'}{G}\Big|_{\xi=-\xi_{max}} = q \tag{87}$$

Последнее условие связано с медленным убыванием функциии на левой бесконечности.

Поскольку на больших временах зависимость решения от времени определяется экспонентой с самым большим при данном q показателем $\gamma_{max}(q)$, то мы можем найти его таким образом

$$\gamma_{max}(q) = \ln F(\xi, q, t_{max})/t_{max} \tag{88}$$

При этом нужно взять достаточно большое t_{max}, при котором график $\ln F(\xi, q, t)/t$ уже вышел на плато.

Зная $\gamma(k)$, можем найти реальный инкремент роста коррелятора и его пространственную структуру, взяв интеграл (82). В окрестности начала координат $f(k, \xi) \sim \Phi(\xi)/ik$. Учитывая это, перепишем интеграл (82)

$$F(t, \eta, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \Phi(\xi) \exp[\gamma(k)t - \ln(-ik) + ik\eta] \tag{89}$$

При больших временах этот интеграл можно взять методом перевала: найдем минимум вещественной части показателя на верхней мнимой полуоси.

$$\gamma'(q^*)t - \eta = 1/q^*. \tag{90}$$

Поскольку t велико, то q^* лежит близко к точке минимума инкремента. Полюс $k = 0$ обходим сверху, значит можно протянуть контур через эту точку. Действительная часть показателя имеет минимум вдоль мнимой оси, в перпендикулярном направлении, вдоль которого протянут контур — максимум. Итак, в главном приближении инкремент роста поля равен $\gamma(q^*)$.

6 Заключение.

В работе выведено уравнение на парный коррелятор магнитного поля в турбулентном течении с сильным сдвигом. Это уравнение решено без учета флуктуаций в диффузионном и бездиффузионном случаях. Получена буквенная зависимость инкремента роста поля от силы шума и параметра сдвига s, проведено численное моделирование обезразмеренной системы уравнений на компоненты корреляционного тензора. В дальнейшем планируется довести до конца численное моделирование системы (77), получить точный вид кривой $\gamma(q)$, откуда будет следовать точное значение инкремента роста коррелятора.

Список литературы

[1] Kraichnan, R. H., Phys. Fluids 1968, 11, 945

[2] Kazantsev, A. P. 1968, JETP, 26, 1031

[3] Vergassola Phys. Rev. E 53, R3021 - R3024 (1996)

[4] G. Falkovich, K. Gawedzki and M. Vergassola Rev. Mod. Phys. 73, 913 - 975 (2001)