

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный университет)

Бакалаврская диссертация

**Динамическая магнитная восприимчивость
спинового льда вблизи критической точки**

Студент 628 гр. Штык А.В.
Научный руководитель:
профессор Фейгельман М.В.

Москва, 2010г.

Содержание

1	Введение	2
1.1	Общие сведения о спиновом льде	2
1.2	Основное состояние	3
1.3	Элементарные возбуждения	4
1.4	Фазовый переход в [111] поле	6
2	Восприимчивость	8
2.1	Восприимчивость спинового льда в отсутствие магнитного поля	8
2.2	[111] поле. Вириальное разложение	9
2.3	Критическая точка. Свободная энергия и теория среднего поля	11
2.4	Ренорм-групповая процедура	13
2.5	Постоянная Γ	18
3	Заключение	20
4	Список литературы	21

1 Введение

1.1 Общие сведения о спиновом льде

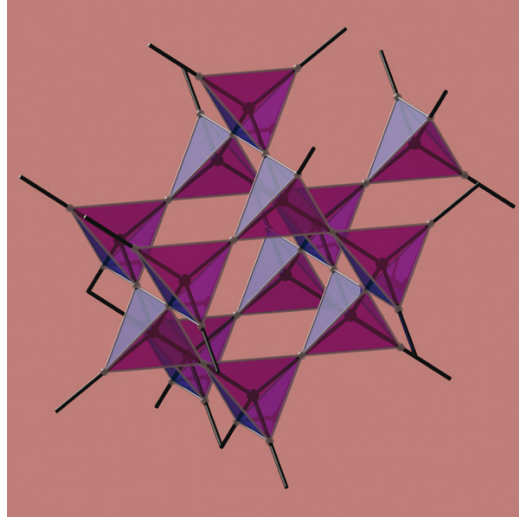


Рис. 1: Решетка пироклора(состоящая из тетраэдров) и дуальная к ней решетка алмаза.

Спиновый лед([4]) это материал в котором магнитные моменты расположены на узлах решетки пироклора. Эти моменты, за счет присутствия сильной одноосной анизотропии, вынуждены располагаться вдоль локальных осей(ребра решетки алмаза на рис. 1), и, как следствие, их можно считать Изинговскими. В этой системе имеет место обменное взаимодействие с ближайшими соседями и дальнедействующее дипольное:

$$H = \frac{J}{3} \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + D a^3 \sum_{\langle ij \rangle} \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} - \frac{3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{|\mathbf{r}_{ij}|^5} \right] S_i S_j \quad (1.1)$$

Где \mathbf{e}_i - единичные векторы вдоль локальных осей, J - величина обменного взаимодействия, а $D = (\mu_1^2/a^3)$ - дипольного. Расстояния между спинами измеряются в единицах ребра решетки пироклора a . Для титаната диспрозия $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$, например,

$$\mu_1 \approx 10\mu_B, \quad a \approx 3.54\text{\AA}, \quad J \approx -3.72\text{K}, \quad D \approx 1.41\text{K}.$$

В работе [9], на основе моделирования методом Монте-Карло, обсуждается наличие обменного взаимодействия с соседями второго и третьего порядков.

1.2 Основное состояние

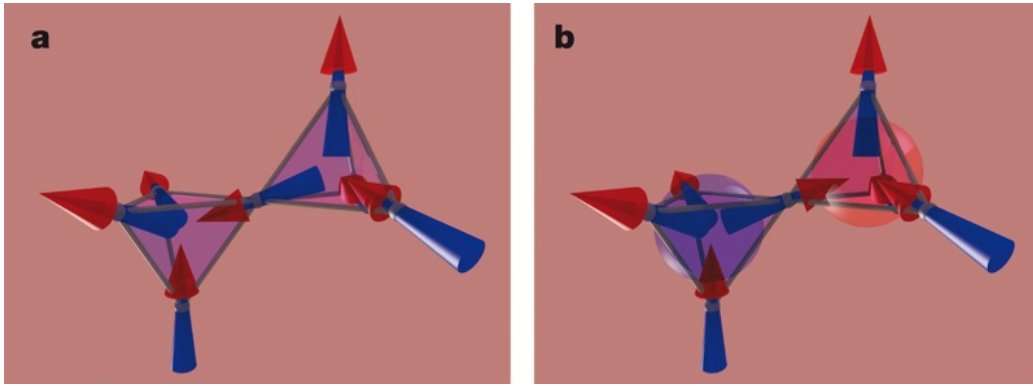


Рис. 2: Иллюстрация правил льда(а) и их нарушения посредством переворота одного спина(б)

Короткодействующее взаимодействие приводит к так называемым правилам льда, - два спина входят в ячейку, два выходят(Рис. 2), причем таких состояний макроскопически много. Число таких состояний можно оценить используя приближение Полинга.

Тетраэдр имеет всего 16 возможных конфигураций, из них 6 удовлетворяют правилам льда. Тогда число состояний, реализующих основное состояние(определяемое правилами льда) можно оценить как $(6/16)^{N_{tetr}} \cdot (2)^{N_{spin}}$, где N_{tetr} число ячеек-тетраэдров а N_{spin} - число спинов. Учитывая, что $N_{spin} = 2N_{tetr}$, получим на одну ячейку энтропию

$$(S_0)_{th.} \approx \ln(3/2) \approx 0,41$$

Это значение хорошо согласуется с экспериментальным результатом([4,15])

$$(S_0)_{exp.} \approx 0,45$$

1.3 Элементарные возбуждения

Рассмотрим состояние, удовлетворяющее правилам льда. На первый взгляд, элементарным возбуждением является состояние после переворота одного спина. В нем присутствуют две ячейки, нарушающие правило льда, вида "3-in, 1-out" и "1-in, 3-out" (Рис. 2b). Но на самом деле, если ограничиться лишь короткодействующим взаимодействием (формирующим правила льда), мы можем, посредством дальнейшего переворота спинов, разнести дефекты не затрачивая на это энергии. Учет дальнедействующей части дипольного взаимодействия приведет лишь к появлению конечного барьера.

Посмотрим на ситуацию следующим образом: представим магнитные моменты в виде гантелей из положительного и отрицательного магнитных зарядов ([3]). Тогда конфигурации "3-in, 1-out" будет соответствовать положительный монополь а "1-in, 3-out" отрицательный (с зарядами $\pm 2\mu_1/a_d$, где a_d - ребро решетки алмаза), причем между ними будет иметь место кулоновское взаимодействие

$$E = \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

Реальная ситуация отличается лишь наличием мультипольного взаимодействия (квадрупольного и выше), исчезающего на больших расстояниях. Энергетическое взаимодействие действительно будет кулоновским, но также будет иметь место особое, энтропийное, взаимодействие.

Основное состояние обладает энтропией S_0 , оценка которой дана в пункте 2.1. Рассмотрим дефект в некоторой ячейке (как было указано, второй из пары можно безболезненно унести на бесконечность), - его наличие частично упорядочивает окружающее пространство, поскольку он является истоком (стоком) поля намагниченности. В наиболее вероятных конфигурациях (заряд расположен в центре системы координат)

$$\mathbf{M} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \text{div} \mathbf{M} = \delta(\mathbf{r})$$

На больших расстояниях, где индуцированная намагниченность мала:

$$S_1 = S_0 - \alpha \mathbf{M}^2$$

Изменение свободной энергии:

$$\Delta(\mathcal{F}_S)_1 = -T\Delta S = T\alpha\mathbf{M}^2$$

Для большого количества дефектов намагниченность будет суперпозицией полей индуцированных каждым из монополей $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$. Тогда

$$\Delta\mathcal{F}_S = T\alpha\mathbf{M}^2 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = \rho \quad (1.3)$$

где ρ – плотность "магнитного" заряда. Следовательно между монополями возникает энтропийное взаимодействие

$$F_S = \frac{\alpha T}{2\pi} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

Таким образом, элементарными возбуждениями в спиновом льде, на фоне бесконечнократно вырожденного основного состояния, являются квазичастицы несущие положительный или отрицательный заряд и взаимодействующие на больших расстояниях по закону Кулона:

$$F = \left(1 + \frac{\alpha T}{2\pi}\right) \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r}, \quad Q_i = \pm 2 \frac{\mu}{a_d}$$

1.4 Фазовый переход в $[111]$ поле

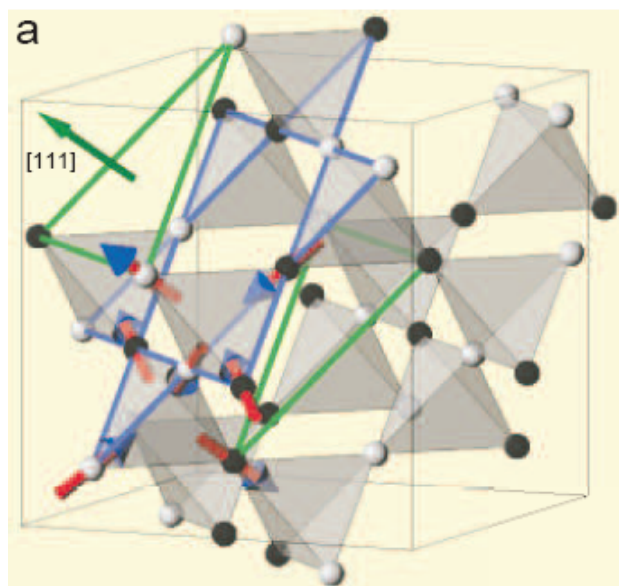


Рис. 3: Зеленым выделена треугольная решетка, синим – кагоме

Обратим внимание, что решетку пирохлора можно представить в виде чередующихся двумерных треугольных и кагоме решеток. Тогда в достаточно сильном магнитном поле, направленном по оси $[111]$ ориентация спинов на треугольных решетках будет predetermined, в то время как фрустрация кагоме решеток сохранится (кагоме лед). Очевидно, что в совсем сильных полях все спины будут сориентированы по полю, в смысле положительной проекции на его направление (упорядоченная фаза). Будет ли иметь место фазовый переход?

Экспериментально, при низких температурах, действительно был обнаружен фазовый переход первого рода вида жидкость-пар. Обратим внимание, что в фрустрированной фазе монополей экспоненциально мало (нарушение правил льда требует конечной энергии), в то время как в упорядоченной фазе их количество экспоненциально близко к максимальному.

При низких температурах, в главном приближении, в фрустрированной фазе кагоме решетки можно считать независимыми.

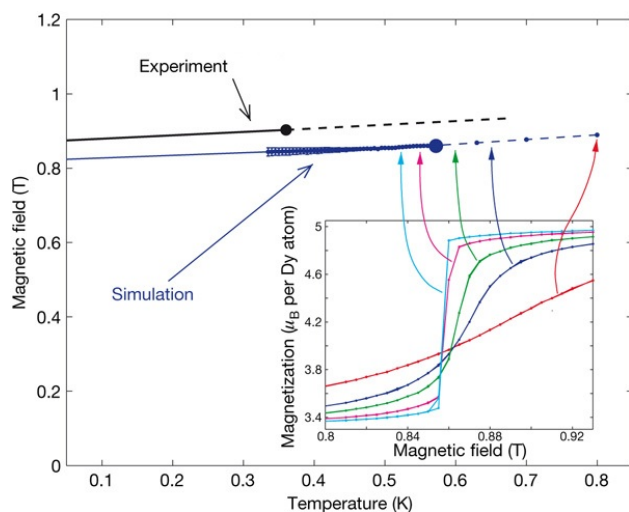


Рис. 4: Фазовый переход в [111] поле. Здесь указаны также результаты моделирования методом Монте-Карло([1])

Задачу о вычислении энтропии такой системы можно отобразить на задачу о димерах, которая является точно решаемой. Энтропия льда кагоме, в расчете на спин([12],[13],[14]):

$$S_{th.}^{kag.} \approx 0.081, \quad S_{exp.}^{kag.} \approx 0.078$$

2 Восприимчивость

2.1 Восприимчивость спинового льда в отсутствие магнитного поля

Рассмотрим спиновый лед в отсутствие поля. Из явного вида гамильтониана (1.1) следует, что для нарушения правил льда необходимо затратить энергию

$$E_{min} = \frac{2}{3}(J + 5D) \approx 2.22K$$

в расчете на тетраэдр, и при низких температурах $T \ll 2.22K$, число монополей будет экспоненциально мало. Нарушениями вида "4-in" и "4-out" мы пренебрегаем, в силу большей энергетической стоимости. Тогда динамика происходящих в системе процессов будет полностью определяться конфигурацией зарядов на решетке. Следовательно, в такой системе можно говорить о "магнитопроводности", — упорядоченное движение монополей соответствует переносу введенного заряда. Но при этом существенным является следующий факт: в равновесии сила, действующая на монополь со стороны внешнего магнитного поля, уравновешивается действием со стороны возникающей намагниченности. Рассмотрим релаксацию системы при малых отклонениях спинового льда от равновесия

$$\dot{\mathbf{M}} = -\lambda(\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq})$$

В окрестности же ненамагниченного состояния $\mathbf{M}_{eq} = \chi_0 \mathbf{H}$ и

$$\dot{\mathbf{M}} = -\lambda(\mathbf{M} - \chi_0 \mathbf{H})$$

Откуда следует выражение для восприимчивости ([2])

$$\chi_\omega = \frac{1}{\chi_0^{-1} - i(\lambda\chi_0)^{-1}\omega} \quad (2.1)$$

Если поле включается внезапно, то

$$\mathbf{M}(t) = \chi_0 \mathbf{H}(1 - \exp[-\lambda t])$$

т.е. при малых временах $t \ll \lambda^{-1}$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{H}, \quad \sigma = \lambda \chi_0 \quad (2.2)$$

Именно эта часть релаксации полностью аналогична электропроводимости (далее же развивается возвращающая сила противодействующая действию внешнего поля). Как раз она наблюдалась в работе [6], где спиновый лед рассматривали как "магнитолит" и применяли к нему теорию электролитов Онзагера. Одним из результатов последней является измерение заряда монополя и сравнение полученного значения с предсказанным теорией.

Вернемся теперь к выражению для восприимчивости. Используя результаты измерений действительной и мнимой частей восприимчивости приведенные в статье [10] можно получить оценку (которая понадобится нам в дальнейшем)

$$\chi_0(T = 1.8\text{K}) \approx .2, \quad \sigma(T = 1.8\text{K}) \sim 10^2 s^{-1} \quad (2.3)$$

Мы видим, что согласно приведенным рассуждениям, при частотах $\omega \gg \chi_0^{-1} \sigma$ восприимчивость имеет вид соответствующий проводимости. Возникает предположение о том, что частотная зависимость в критической точке не изменится, и, поскольку статическая восприимчивость в критической точке обращается в бесконечность, мы получим

$$\chi \sim \frac{i}{\omega}$$

2.2 [111] поле. Вириальное разложение

Как мы уже обсуждали, решетка пирохлора представима в виде чередующихся плоских треугольных и кагоме решеток. В окрестности рассматриваемого фазового перехода спины на треугольных решетках направлены по полю и вероятностью их переворота мы пренебрегаем. На кагоме решетках же состояние спинов в одной фазе соответствует кагоме льду (выполнение правил льда при учете предопределенной конфигурации треугольных решеток), а во второй все моменты направлены по полю (в указанном ранее, в пункте 1.4, смысле). Тогда состояние спинового льда в упорядоченной фазе удобно описывать

указанием перевернутых спинов на кагоме решетках. Таким образом, мы можем говорить о взаимодействующем газе частиц на решетке.

Вспоминая гамильтониан системы (2.1), получаем, что энергия частицы, составляющей такой газ (т.е. затрачиваемая на переворот одного спина),

$$E_0 = -\frac{4}{3}J - 2Da^3 \sum_{0i} \left[\frac{\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{r}_{0i}|^3} - \frac{3(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{r}_{0i})(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}_{0i})}{|\mathbf{r}_{0i}|^5} \right] S_i + \frac{2}{3}\mu_1 H$$

где суммирование проводится по всем спинам и спины на подрешетке кагоме $S_i = 1$, а на треугольной $S_i = -1$. Энергия взаимодействия между ними

$$U_{ij} = \begin{cases} (4/3)(J + 5D), & \text{ij - ближайшие соседи} \\ 4Da^3 \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} - \frac{3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{|\mathbf{r}_{ij}|^5} \right], & \text{в ином случае} \end{cases}$$

На узле решетки может находиться не более одной частицы. Мы будем считать, что количество частиц может быть произвольным и моделировать указанное условие отталкиванием частиц $U_{ii} = \infty$. Тогда следуя книге [8], получим

$$\Omega = -TN_0 \sum_{l=0}^{\infty} b_l \zeta^l$$

Где N_0 – число узлов кагоме решеток, b_l – так называемые групповые интегралы (в данном случае это скорее суммы) и

$$\zeta = \exp\left[\frac{\mu - E_0}{T}\right]$$

Учитывая члены вплоть до третьего порядка по n , получим свободную энергию такого газа

$$F = TN_0[-1 - n - b_2 n^2 - (b_3 - 2b_2^2)n^3 + \frac{E_0}{T}n + n \ln n]$$

$$b_2 = \frac{1}{2!} \sum_i f_{0i}, \quad \text{где } f_{ij} = \exp\left[-\frac{U_{ij}}{T}\right] - 1$$

$$b_3 = \frac{1}{3!} \sum_i \sum_j [\sum \Pi f_{mn}] = \frac{1}{3!} \sum_i \sum_j [f_{0i}f_{ij}f_{j0} + f_{0i}f_{0j} + f_{i0}f_{ij} + f_{0i}f_{0j}]$$

Положение критической точки будет определяться условиями

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial n^3} = 0$$

и численный расчет величин E_0, b_2, b_3 дает

$$T_c = 0.85\text{K}, \quad H_c = 1.37\text{T} \quad (2.4)$$

Плотность частиц в критической точке $n_c = 0.14 \ll 1$

$$F = TN_0 \left[const + \left(4 \frac{T - T_c}{T_c} - 30 \frac{H - H_c}{H_c} \right) (n - .14) + \frac{30}{2!} \frac{T - T_c}{T_c} (n - .14)^2 + \right. \\ \left. \frac{40}{3!} \frac{T - T_c}{T_c} (n - .14)^3 + \frac{700}{4!} (n - .14)^4 \right] \quad (2.5)$$

при этом оценка последнего члена проведена при учете лишь непроницаемости частиц. Также, связь концентрации n и намагниченности M имеет вид

$$M = (N_0)_V \left(\frac{1}{3} \mu_1 + \frac{2}{3} \mu_1 n \right) \quad (2.6)$$

2.3 Критическая точка. Свободная энергия и теория среднего поля

При наблюдаемом фазовом переходе имеется скачок намагниченности. Поэтому, как обычно, вблизи крит. точки можно было бы выбрать в качестве параметра порядка намагниченность по оси [111](оси z) и свободную энергию в виде

$$\mathcal{F} = \int dV [c\varphi + \frac{1}{2}\varphi(a + \hat{b})\varphi + \frac{d}{3!}\varphi^3 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \varphi H], \quad \hat{b} = bk^2 = -b\Delta$$

где $\varphi = M - M_c$ – отклонение намагниченности от значения в крит. точке. Но это было бы недостаточным. В системе имеется сильное

диполь-дипольное взаимодействие, и, по аналогии со статьей [1], следует положить

$$\hat{b} = b_1 k_{\perp}^2 + b_2 k_z^2 + \mu x^2$$

Где $x = (k_z/k)$. При дальнейшем рассмотрении будут возникать логарифмические расходимости, возникающие из областей $k, x \rightarrow 0$. В этих областях, следовательно, $k_z \ll k, \sqrt{(\mu/b_1)}x$. Учитывая также, что $b_1 \sim b_2$, отбросим слагаемое $b_2 k_z^2$ и положим $b_1 k_{\perp}^2 = b k^2$ (просто переобозначили)

Заметим, что величины c, a, b, d, λ - функции только температуры и не зависят от поля. Кубический член в разложении можно устранить сдвигом переменной $m = m - (d/\lambda)$. Вспоминая также, что в критической точке параметры a и d обращаются в нуль, и полагая $a, d \sim (T - T_c)$, получаем:

$$\mathcal{F} = \int dV [\frac{1}{2} \varphi(a + \hat{b}) \varphi + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \varphi(H - c)]$$

Учитывая, что $h^* = H - c = h - \gamma t$, где h и t отклонения поля и температуры от критических:

$$\mathcal{F} = \int dV [\frac{1}{2} \varphi(a + \hat{b}) \varphi + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \varphi h^*] \quad (2.7)$$

Далее звездочку у h^* будем опускать, подразумевая, что это эффективное поле.

Используя (3.5) и (3.6) мы получаем оценки

$$\alpha = \frac{da}{dT} \sim 10 \text{K}^{-1}, \quad \lambda \sim 100 \text{\AA}^3 \cdot \text{K}^{-1}, \quad \gamma \sim 1 \text{T} \cdot \text{K}^{-1} \quad (2.8)$$

Постоянные же b и μ ([1]) можно оценить как

$$b \sim J_{eff} a^{-2} \cdot ((2/3)\mu_1(N_0)_V)^{-2} \sim (J + 5D) a^{-2} \cdot ((2/3)\mu_1(N_0)_V)^{-2} \sim 10 \text{\AA}^2 \quad (2.9)$$

$$\mu \sim (4\pi\mu_1^2/v_0^2) \cdot ((2/3)\mu_1(N_0)_V)^{-2} \sim 100$$

где множитель $((2/3)\mu_1(N_0)_V)^{-1}$ отвечает за связь концентрации и намагниченности, пункт 2.2

Рассмотрим теперь приближение среднего поля, полагая динамику системы чисто релаксационной

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \varphi h \right]$$

$$\partial_t \varphi = -\Gamma^{-1} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi}$$

Т.е.(при малых h)

$$\partial_t \varphi = -\Gamma^{-1}(a\varphi - h)$$

$$\chi = \frac{1}{a - i\Gamma\omega}, \quad a = \alpha(T - T_c) \quad (2.10)$$

Следовательно, в рамках приближения среднего поля, восприимчивость имеет именно такой вид, как предполагалось (ниже точки перехода $a \rightarrow (1/2)|a|$). Возникает вопрос: к чему приведет учет флуктуаций?

2.4 Ренорм-групповая процедура

Следуя книге [5], введем вспомогательное поле p и эффективное действие

$$\mathcal{I} = \int dt dV [\Gamma p \partial_t \varphi + ap\varphi + p\hat{b}\varphi + \frac{\lambda}{6} p\varphi^3 - ph + iT\Gamma p^2] \quad (2.11)$$

Также нам понадобятся корреляционные функции

$$G(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$$

$$F(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \varphi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$$

Произведем элементарный шаг ренорм-групповой процедуры, разделяя поля φ и p на быструю и медленную составляющие

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_f$$

$$p = p_s + p_f$$

$$\mathcal{I}(\varphi_s + \varphi_f, p_s + p_f) = \mathcal{I}(\varphi_s, p_s) + \mathcal{I}(\varphi_f, p_f) + I_{int}$$

Действие, описывающее медленные переменные, по определению есть

$$\exp[i\mathcal{I}'(\varphi_s, p_s)] = \int \mathcal{D}\varphi_f \mathcal{D}p_f \exp[i\mathcal{I}(\varphi_s + \varphi_f, p_s + p_f)]$$

Т.к. однопетлевое приближение подробно рассмотрено в статье [1], мы приведем лишь результат:

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = -\frac{3T}{16\pi\sqrt{b^3\mu}}\lambda^2, \quad \frac{da}{d\xi} = -\frac{T}{16\pi\sqrt{b^3\mu}}\lambda a, \quad \xi = \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2 + (\mu/b)x^2} \quad (2.12)$$

постоянные Γ , b , μ в нем не перенормируются. Перенормировка оканчивается, когда $bk^2 + \mu x^2 \sim |a + i\Gamma\omega|$ ([1],[5]) Тогда решения этих уравнений с логарифмической точностью есть

$$g = \frac{g_0}{1 + g_0\xi}, \quad a = \frac{a_0}{(1 + g_0\xi)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.13)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{(a/b) + k^2 + (\mu/b)x^2 + (\Gamma/b)\omega}$$

где мы ввели инвариантный заряд

$$g = \frac{3T\lambda}{16\pi\sqrt{b^3\mu}} \quad (2.14)$$

При этом, учитывая оценки (2.8) и (2.9), имеем, что

$$g_0 \sim 10^{-2} \quad (2.15)$$

Двухпетлевое приближение мы рассмотрим более подробно. Для него([5]) можно получить

$$\Delta b = \frac{\lambda^2}{3 \cdot 2^4 T} \int dV (G_f^{(0)}(\mathbf{r}))^3 \rho^2 \quad (2.16)$$

$$\Delta \Gamma = \frac{\lambda^2}{12T} \int dt d^3r (F_f^{(0)}(t, r))^3 \quad (2.17)$$

Где $G_f^{(0)}(\mathbf{r}) = F_f^{(0)}(t = 0, \mathbf{r})$ - корреляционная функция соответствующая квадратической части свободной энергии(т.е. статическая). Уравнения ренорм-группы для постоянных a и λ не изменяются.

Приступим к вычислению перенормировки Γ :

$$\begin{aligned} F_f^{(0)}(t, r) &= \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \frac{2T\Gamma}{\Gamma^2\omega^2 + (bk^2 + \mu x^2)^2} \exp[-i\omega t + i\mathbf{kr}] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{T}{bk^2 + \mu x^2} \exp[-\frac{|t|}{\Gamma}(bk^2 + \mu x^2) + i\mathbf{kr}] \end{aligned}$$

Нас интересует область $k, x \rightarrow 0$. Тогда $\mathbf{kr} \approx z k x + \rho k \cos \varphi$

$$F_f^{(0)}(t, r) = \int \frac{k^2 dk dx d\varphi}{(2\pi)^3} \frac{T}{bk^2 + \mu x^2} e^{-\frac{|t|}{\Gamma}(bk^2 + \mu x^2) + izkx + i\rho k \cos \varphi} \quad (2.18)$$

Сделаем замену переменных $k = (1/\sqrt{|z|})(\mu/b)^{\frac{1}{4}}q$, $x = (1/\sqrt{|z|})(b/\mu)^{\frac{1}{4}}\xi$

$$= \frac{T}{8\pi^3 b |z|} \int \frac{q^2 dq d\xi d\varphi}{q^2 + \xi^2} \exp[-\frac{\sqrt{b\mu}|t|}{\Gamma|z|}(q^2 + \xi^2) + iq\xi + i\frac{\rho}{\sqrt{|z|}}\left(\frac{\mu}{b}\right)^{\frac{1}{4}}q \cos \varphi]$$

Вообще говоря в этом интеграле имеется обрезка по импульсам $\Lambda_1 < k^2 + (\mu/b)x^2 < \Lambda_2$, временно забудем о ней. Тогда

$$\int \frac{q^2 dq d\xi d\varphi}{q^2 + \xi^2} \exp[-\frac{\sqrt{b\mu}|t|}{\Gamma|z|}(q^2 + \xi^2) + iq\xi + i\frac{\rho}{\sqrt{|z|}}\left(\frac{\mu}{b}\right)^{\frac{1}{4}}q \cos \varphi]$$

$$= f\left(\frac{\Gamma|z|}{\sqrt{\mu b}|t|}, \left(\frac{b}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{|z|}}{\rho}\right),$$

$$f(s, p) = \int_{q>0} \frac{q^2 dq d\xi d\varphi}{q^2 + \xi^2} \exp[-\frac{1}{s}(q^2 + \xi^2) + i\frac{q}{p} \cos \varphi + iq\xi]$$

$$\int d^3r dt (F_f^{(0)}(t, \mathbf{r}))^3 = \int dz d^2\rho dt \left(\frac{T}{8\pi^3 b}\right)^3 \frac{1}{|z|^3} f^3\left(\frac{\Gamma|z|}{\sqrt{\mu b}|t|}, \left(\frac{b}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{|z|}}{\rho}\right)$$

$$= \frac{T^3 \Gamma}{64 \pi^8 b^3 \mu} \int_{z>0} \frac{dz}{z} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dp ds}{p^3 s^2} f^3(s, p)$$

Теперь же следует вспомнить об опущенной обрезке. Вспоминая выражение (2.18), можно видеть, что ей соответствует $\sqrt{\mu/b} \Lambda_2^{-2} < z < \sqrt{\mu/b} \Lambda_1^{-2}$

В результате мы получаем ренорм-групповое уравнение для Γ :

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{CT^2 \lambda^2}{3 \cdot 2^7 \pi^8 b^3 \mu} \Gamma \quad (2.19)$$

$$C = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dp ds}{p^3 s^2} f^3(s, p), \quad \Delta\xi = \ln \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$$

$$f(s, p) = \int_{q>0} \frac{q^2 dq d\xi d\varphi}{q^2 + \xi^2} \exp\left[-\frac{1}{s}(q^2 + \xi^2) + i\frac{q}{p} \cos \varphi + iq\xi\right]$$

Перейдем теперь к постоянной b . Действуя полностью аналогично вычислению $\Delta\Gamma$, получим

$$\frac{db}{d\xi} = \frac{\tilde{C} T^2 \lambda^2}{3 \cdot 2^{10} \pi^8 b^3 \mu} b$$

$$\tilde{C} = \int_0^\infty \frac{ds}{s^5} g^3(s) = \frac{2^3 \pi^6}{3^2}$$

$$g(s) = \int_{q>0} \frac{q^2 dq d\xi d\varphi}{q^2 + \xi^2} \exp[iq\xi + i\frac{q}{s} \cos \varphi]$$

То есть

$$\frac{db}{d\xi} = \frac{T^2 \lambda^2}{3^3 2^7 \pi^2 b^3 \mu} b \quad (2.20)$$

Следовательно

$$\frac{da}{d\xi} = -\frac{1}{3} ga, \quad \frac{dg}{d\xi} = -g^2 \left[1 + \frac{2}{3^4} g\right]$$

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{2C}{3^3\pi^6}g^2\Gamma, \quad \frac{db}{d\xi} = \frac{2^2}{3^5}g^2b$$

Их решение, учитывая что g мало:

$$g = \frac{g_0}{1 + g_0\xi}, \quad a = \frac{a_0}{(1 + g_0\xi)^{\frac{1}{3}}}$$

$$b = b_0 \exp\left[\frac{4}{3^5}g_0\left(1 - \frac{1}{1 + g_0\xi}\right)\right], \quad \Gamma = \Gamma_0 \exp\left[\frac{2C}{3^3\pi^6}g_0\left(1 - \frac{1}{1 + g_0\xi}\right)\right]$$

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{b\Lambda^2}{a + bk^2 + \mu x^2 + \Gamma\omega}$$

Численная оценка неизвестной постоянной $C \sim 10^3$. Тогда максимальная перенормировка b и Γ :

$$b = b_0 \exp[10^{-4}], \quad \Gamma \approx \Gamma_0 \exp[10^{-3}]$$

т.е. они перенормируются слабо и их перенормировкой мы пренебрегаем.

Вспоминая([5]), что функция $G(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ описывает отклик системы на внешнее воздействие, получаем восприимчивость спинового льда:

$$\chi = \frac{1}{a(k, x, \omega) + bk^2 + \mu x^2 - i\Gamma\omega} \quad (2.21)$$

Если же поле однородно, то

$$\chi = \frac{1}{a - i\Gamma\omega}, \quad a(T) = \frac{\alpha(T - T_c)}{\left(1 + \frac{1}{2}g_0 \ln \frac{\Lambda}{\alpha|T - T_c| + \Gamma\omega}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.22)$$

Пусть теперь температура равна критической, но имеется отклонение поля от его критического значения. Теперь перенормировку параметров будет уже определять поле, а не температура, и намагниченность следует определять из уравнений([1])

$$\frac{1}{6}\lambda(m)\varphi_0^3 - h = 0$$

$$m = \frac{1}{2}\lambda(m)\varphi_0^2, \quad \lambda(m) = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{1}{2}g_0 \ln \frac{\Lambda}{(m/b)}}$$

Решение этих уравнений с логарифмической точностью есть

$$\varphi_0 = \left(\frac{6}{\lambda_0} h \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{2} g_0 \ln \frac{b\Lambda}{(\lambda_0 h^2)^{\frac{1}{3}}} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\chi = \left(\frac{9}{2} \lambda_0 h^2 \right)^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{2} g_0 \ln \frac{\Lambda}{(b\lambda_0 h^2)^{\frac{1}{3}}} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (2.23)$$

2.5 Постоянная Γ

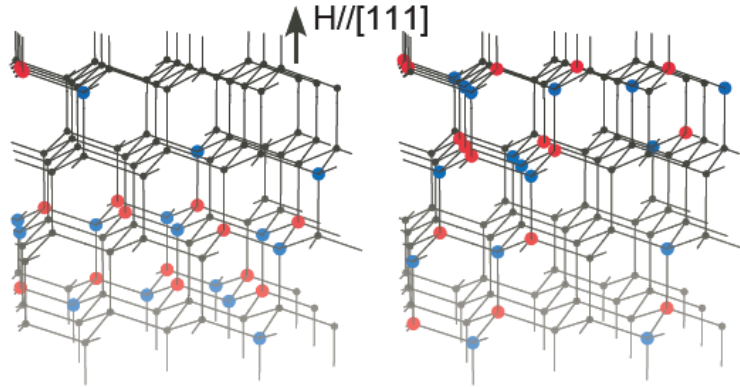


Рис. 5: Результат моделирования методом Монте-Карло([11]). Положительный монополи изображены красным, отрицательные – синим. Изображено их положение в два различных момента времени, – видно различие для положительных и отрицательных дефектов в пределах одной решетки кагоме, – одни занимают более высокое положение, а вторые, – более низкое

Как упоминалось, динамика спинового льда при низких температурах определяется монополями. В обзоре [4] указано, что для отдельного момента, ближайшие состояния, отличные от полностью сориентированных вдоль локальной оси, находятся на расстоянии $\approx 300\text{K}$. Тогда можно предположить, что температурная зависимость вероятности туннелирования монополя на соседний узел(переворота

соответствующего спина) слабо зависит от температуры. Следовательно, главная температурная зависимость магнитопроводимости(пока монополей все еще мало)

$$\sigma \sim \exp \left[-\frac{E_m}{T} \right], \quad E_m \approx \frac{2}{3}(J + 5D)$$

Т.е. магнитопроводимость спинового льда(s.i. \Leftrightarrow spin ice) при $T = T_c \approx 0.35\text{K}$

$$\sigma_{s.i.} \sim \sigma_{s.i.}(T = 1.8\text{K}) \exp \left[-E_m \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T} \right) \right] \sim 10^{-2} s^{-1} \quad (2.24)$$

Перейдем теперь к кагоме льду. Первым отличием является то, что энергия монополей вдали от критической точки модифицируется

$$E_m^{(H)} = E_m - \frac{1}{3}\mu_1 H$$

Вторым,— тот факт, что монополи различных знаков располагаются на "своих" подрешетках,— движение зарядов ограничено одной из решеток кагоме(ориентация спинов на треугольных решетках предопределена), при этом они могут находиться ниже или выше ее(рис. 5). Количество монополей на не своих решетках меньше на фактор $\sim \exp \left[-\frac{\mu H}{3T} \right]$, т.е. вблизи крит. точки $\sim 10^{-3}$. Мы будем считать, что вероятность туннелирования, при включении поля, существенно не меняется. Но этот вопрос не является очевидным и требует дальнейшего исследования, — вполне возможно, что монополь сразу будет туннелировать через одну ячейку(что равносильно перевороту двух спинов).

Третьим, — энтропийное взаимодействие в этом случае приводит к *двумерному* закону Кулона. Тем не менее, это взаимодействие не приводит к образованию пар зарядов, а лишь модифицирует концентрацию монополей([7]).

Если придерживаться высказанного предположения, то проводимость(k.i. \Leftrightarrow kagome ice), учитывая, что концентрация монополей вблизи крит. точки ~ 1

$$\sigma_{k.i.}(T = T_c, H = H_c) \sim \sigma_{s.i.}(T = T_c) \exp \left[\frac{E_m}{T_c} \right] \sim 10^2 s^{-1} \quad (2.25)$$

Тогда постоянная Γ вблизи крит. точки:

$$\Gamma \sim (\sigma_{k.i.}(T = T_c, H = H_c))^{-1} \sim 10^{-2} s \quad (2.26)$$

Причем это значение является нижней оценкой.

3 Заключение

В этой работе была вычислена восприимчивость спинового льда вблизи критической точки

$$\chi = \frac{1}{a - i\Gamma\omega}, \quad a(T) = \frac{\alpha(T - T_c)}{\left(1 + \frac{1}{2}g_0 \ln \frac{b\Lambda^2}{\alpha|T - T_c| + \Gamma\omega}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\alpha = \frac{da}{dT} \sim 10\text{K}^{-1}, \quad \Gamma \sim 10^{-2} s, \quad b \sim 10\text{\AA}^2, \quad \Lambda \sim 1\text{\AA}^{-1}, \quad g_0 \sim 10^{-2}$$

Это значит, что время релаксации в окрестности крит. точки

$$\tau = \chi_0 \Gamma \sim \frac{\Gamma}{\alpha(T - T_c)} \left(1 + \frac{1}{2}g_0 \ln \frac{b\Lambda^2}{\alpha|T - T_c|}\right)^{\frac{1}{3}}$$

при этом, как и в случае одноосного сегнетоэлектрика([1]), возникают логарифмические отклонения от закона $(T - T_c)^{-1}$. Следует указать также, что в этом случае упорядоченного движения монополей вдоль поля не возникает. Как было указано в пункте 2.5, движение зарядов ограничено решетками кагоме и переместиться с одной на другую они не могут, – их движение вдоль поля жестко ограничено. Намагниченность по оси [111] при этом полностью определяется плотностью монополей(пункт 2.2).

4 Список литературы

- [1] А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ 56, 2087 (1969)
- [2] И. А. Рыжкин, ЖЭТФ 128, 559 (2005)
- [3] C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi, Nature 451, 42-45 (2008)
- [4] Spin Ice, by Michel J.P. Gingras (arXiv:0903.2772, 2009)
- [5] Флуктуационные эффекты в макрофизике, В. В. Лебедев
- [6] S. T. Bramwell, S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran, and T. Fennell, Nature 461, 956-960 (2009)
- [7] Theory of the [111] magnetization plateau in spin ice, by R. Moessner and S. L. Sondhi (arXiv:cond-mat/0303210)
- [8] Статистическая физика, Р. Кубо
- [9] J. P. C. Ruff, R. G. Melko, M. J. P. Gingras, Phys. Rev. Lett. 95, 097202 (2005)
- [10] K. Matsuhira, Y. Hinatsu, T. Sakakibara, J. Phys.: Condens. Matter 13 (2001) L737-L746
- [11] Observation of Magnetic Monopoles by H. Kadowaki, N. Doi, Y. Aoki, Y. Tabata, T. J. Sato, J. W. Lynn, K. matsuhira and Z. Hiroi, J. Phys. Soc. Jpn. 78 (2009) 103706
- [12] Z. Hiroi, K. Matsuhira, S. Takagi, T. Tayama, and T. Sakakibara, cond-mat/0211326
- [13] R. Moessner and S. L. Sondhi, Phys. Rev. B 63, 224401 (2001)
- [14] M. Udagawa, M. Ogata and Z. Hiroi, J. Phys. Soc. Jpn. 71, 2365 (2002)
- [15] X. Ke, R. S. Freitas, B. G. Ueland, G. C. Lau, M. L. Dahlberg, R. J. Cava, R. Moessner, P. Schiffer, Phys. Rev. Lett. 99 137203 (2007)

Все иллюстрации взяты из нижеприведенных статей.