

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра  
**"Гибридный нановолновод."**

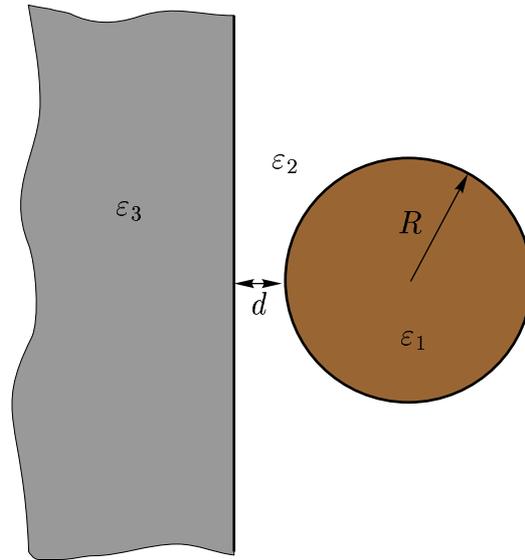
Студент 728 гр. Белан С.А.

Научный руководитель: член-корр. РАН, Лебедев В.В.

Москва 2011г.

## 1. Введение.

Большой практический интерес представляет создание волноводов, позволяющих локализовать передачу электромагнитной энергии на масштабе существенно меньшем соответствующей длины волны в вакууме. Наиболее перспективным кандидатом на преодоление дифракционного предела являются устройства, использующие поверхностные плазмоны. Однако на практике большинство подобных волноводов обеспечивают локализацию не намного меньшую той, что могут создать традиционные диэлектрические оптоволоконна. Причина заключается в больших тепловых потерях, обусловленных наличием металла, обеспечивающего распространение плазмонной моды. Новый подход к этой проблеме состоит в интеграции диэлектрического волновода с плазмонным. Устройство состоит из диэлектрического волновода, отделённого от поверхности металла нанопрослойком прозрачного диэлектрика (рис. 1). Возбуждаемая плазмонная мода оказывается сосредоточенной главным образом в объёме зазора, что обеспечивает желаемую локализацию в двух измерениях, при низких потерях [1-2]. Усиление поля в зазоре достигается за счёт большого контраста диэлектрических проницаемостей в силу непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции на границе сред.



Целью данной работы является поиск дисперсионного соотношения связанных мод в такой системе. Параметризовав электромагнитное поле его продольными компонентами, мы получим на них двумерное уравнение Гельмгольца. Полагая, что применимо квазистационарное приближение, найдём поля нулевого порядка, решив в биполярных координатах уравнение Лапласа. Затем, поставив граничные условия, покажем невозможность распространения собственных мод в электростатическом пределе, откуда следует вывод о необходимости рассмотрения поправок первого порядка по запаздыванию к продольным компонентам. Эти поправки найдём в рамках теории возмущений, воспользовавшись точно решаемой задачей о собственных модах оптоволоконна. Частота электромагнитной волны предполагается много меньшей плазменной частоты металла, поэтому последний мы будем считать идеальным, что отразится в соответствующем выборе функций нулевого приближения. Рассмотрев первую дипольную моду, поставим граничные условия на компоненты электромагнитного поля, поправленные с учётом запаздывания, и найдём дисперсию.

## 2. Постановка задачи.

Рассмотрим диэлектрический цилиндр радиусом  $R$  с большой диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ , расположенный на расстоянии  $d \ll R$  от металлического полупространства. Промежуточная область заполнена материалом с малой диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Исследуем распространение электромагнитных волн в такой системе с целью определения дисперсионного соотношения для собственных связанных мод.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в диэлектрике:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Продольное направление волновода выберем в качестве оси  $z$ . В волне, бегущей вдоль оси  $z$ , зависимость всех компонент поля от координаты  $z$  даётся множителем  $e^{ikz}$ . Магнитную проницаемость всех сред будем считать равной единице. Поскольку  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  и для монохроматической волны  $\partial_t \vec{H} = -i\omega \vec{H}$ ,  $\partial_t \vec{E} = -i\omega \vec{E}$ , то

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon \frac{i\omega}{c} \vec{E}. \quad (2)$$

Компоненты  $x$  и  $y$  уравнений (1) и (2) дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y &= \frac{i\omega}{c} H_x, \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ikE_x &= \frac{i\omega}{c} H_y, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - ikH_y &= -\varepsilon \frac{i\omega}{c} E_x, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} - ikH_x &= \varepsilon \frac{i\omega}{c} E_y, \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$E_x = \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (3)$$

$$H_x = -\varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (4)$$

где  $\chi^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ .

То есть все поперечные составляющие электромагнитного поля могут быть выражены через продольные компоненты  $E_z$  и  $H_z$ . На последний получаем следующие уравнения:

$$\Delta_2 E_z + \chi^2 E_z = 0. \quad (5)$$

$$\Delta_2 H_z + \chi^2 H_z = 0. \quad (6)$$

В ходе нашего основного рассмотрения мы будем полагать, что справедливо квазистационарное приближение. Данный факт выражается в выполнении условия  $\chi^2 R d \ll$

1. В этом случае второе слагаемое в уравнение Гельмгольца можно рассматривать как возмущение оператора Лапласа и в нулевом приближении продольные компоненты поля должны удовлетворять двумерному уравнению:

$$\Delta_2 E_z^{(0)} = 0.$$

$$\Delta_2 H_z^{(0)} = 0.$$

### 3. Нулевое приближение.

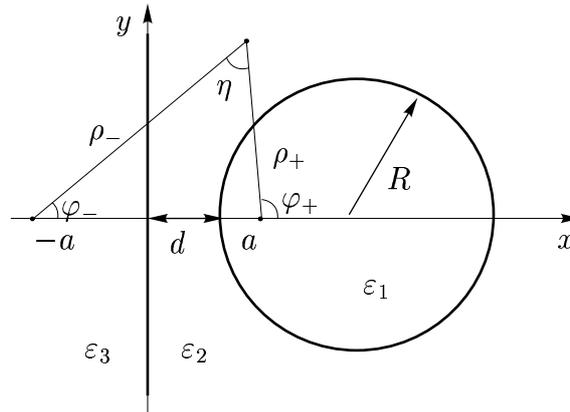


Рис. 2

Уравнение Лапласа, в силу геометрии задачи, рационально решать в биполярной системе координат  $(\xi, \eta)$ , связанной с декартовой конформным отображением[3]. Масштабная координата  $\xi$  равна логарифму отношения расстояний от рассматриваемой точки плоскости до двух выбранных, называемых полюсами(рис. 2). Угловая координата  $\eta$  представляет собой угол под которым виден отрезок, соединяющий полюсы, из рассматриваемой точки. Связь с декартовыми координатами даётся следующими формулами перехода:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Запишем оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)$$

Таким образом получаем уравнение:

$$\frac{(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0.$$

Решения будем искать в виде  $\Phi = R(\xi) \cdot Y(\eta)$ . После подстановки имеем:

$$R \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + Y \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = 0.$$

Значит

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} / Y = -\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} / R = \text{const}.$$

Обозначив указанную константу через  $-n^2$ , находим набор собственных функций  $e^{\pm n\xi} \sin \eta$  и  $e^{\pm n\xi} \cos \eta$ . Из условия  $2\pi$  - периодичности угловой части заключаем, что  $n$  целое.

На основе этого результата несложно найти поле в системе в электростатическом пределе. Параметр  $a$  (положение фокусов) выберем так, чтобы границы раздела являлись изолиниями новой системы координат:

$$a = \sqrt{d(2R + d)}.$$

Тогда линии раздела задаются условиями:

$$0 \leq \eta < 2\pi, \quad \xi = 0.$$

$$0 \leq \eta < 2\pi, \quad \xi = \ln \frac{a - d}{a + d}.$$

Из соображений симметрии и ограниченности электростатического потенциала  $\Phi(\xi, \eta)$  находим:

$$\Phi_1 = A_1 e^{n\xi} \cos n\eta,$$

$$\Phi_2 = (A_2 e^{n\xi} + A_3 e^{-n\xi}) \cos n\eta,$$

$$\Phi_3 = A_4 e^{-n\xi} \cos n\eta.$$

Далее запишем граничные условия:

$$\Phi_1(\xi_{12}) = \Phi_2(\xi_{12}), \quad \Phi_2(\xi_{23}) = \Phi_3(\xi_{23}),$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi_{12}} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi_{12}}, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi_{23}} = \varepsilon_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi_{23}}.$$

Условием существования нетривиального решения относительно неизвестных констант является равенство нулю детерминанта матрицы полученной системы уравнений. Для моды  $n = 1$  получаем:

$$\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 = -\frac{a^2 + d^2}{2ad} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \varepsilon_2.$$

$$\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 = -\frac{R + d}{\sqrt{d(2R + d)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \varepsilon_2.$$

Предполагаемые значения проницаемостей  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_2 = 1$  и  $\varepsilon_3 = -100$ . Отсюда легко сделать заключение, что система поддерживает электростатические моды только в случае когда знаки диэлектрических проницаемостей цилиндра и внешней области противоположны.

Далее, положив  $\varepsilon_3 \rightarrow -\infty$ , перейдем к случаю идеального металла, что эквивалентно задаче о двух одинаковых близкорасположенных диэлектрических волноводах при условии обнуления касательной составляющей электрического поля на оси симметрии. На основе найденного набора решений уравнения Лапласа, запишем продольные компоненты электромагнитного поля в нулевом приближении:

$$E_z^{(0)in} = A_1 e^{-\xi} \cos \eta, \quad E_z^{(0)out} = A_2 \text{sh } \xi \cos \eta, \quad (7)$$

$$H_z^{(0)in} = B_1 e^\xi \sin \eta, \quad H_z^{(0)out} = B_2 \operatorname{ch} \xi \sin \eta. \quad (8)$$

Данное решение соответствует моде  $n = 1$  и уже учитывает граничные условия на поверхности металла (равенство нулю касательной составляющей электрического поля). Нормальные составляющие при этом выражаются следующим образом:

$$E_\xi = \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial \eta},$$

$$H_\xi = \varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi}.$$

Если мы теперь потребуем выполнения граничных условий на поверхности цилиндра, то, занулив детерминант матрицы полученной системы уравнений, снова придём к найденному выше уловию:

$$\varepsilon_1 = -\frac{R+d}{\sqrt{d(2R+d)}} \varepsilon_2,$$

или, поскольку  $d \ll R$ ,

$$\varepsilon_1 \simeq -\sqrt{\frac{R}{2d}} \varepsilon_2.$$

Таким образом, в электростатическом пределе наша система не поддерживает распространение связанных собственных мод.

#### 4. Теория возмущений.

Необходимо учесть поправки следующего порядка малости в уравнениях (5)-(6):

$$\Delta_2 E_z^{(1)} = \chi^2 E_z^{(0)}, \quad (9)$$

$$\Delta_2 H_z^{(1)} = \chi^2 H_z^{(0)}. \quad (10)$$

В биполярных координатах:

$$\Delta_{\xi\eta} E_z^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{a^2 \chi^2}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} E_z^{(0)}(\xi, \eta),$$

$$\Delta_{\xi\eta} H_z^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{a^2 \chi^2}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} H_z^{(0)}(\xi, \eta).$$

Решить данные уравнения в таком виде проблематично. Более полезным оказывается сделать следующее. Запишем функции, описывающие найденные выше поля нулевого приближения (7)-(8), в следующем виде:

$$E_z^{(0)in} = A_1 a \frac{\cos \varphi_-}{\rho_-}, \quad E_z^{(0)out} = A_2 a \left( \frac{\cos \varphi_+}{\rho_+} + \frac{\cos \varphi_-}{\rho_-} \right).$$

$$H_z^{(0)in} = B_1 a \frac{\sin \varphi_-}{\rho_-}, \quad H_z^{(0)out} = B_2 a \left( \frac{\sin \varphi_+}{\rho_+} + \frac{\sin \varphi_-}{\rho_-} \right)$$

Для дальнейшего существенным является тот факт, что данные выражения с точностью до трансляции вдоль оси абсцисс совпадают с имеющими место в задаче об отдельном оптоволокне, аналитическое решение которой мы знаем. Таким образом, формально уравнения для членов ряда теории возмущений имеют один и тот же вид, а следовательно то же самое мы можем сказать и об их решениях. Подробней это показано в приложении А.

## 5. Дисперсия.

Основным результатом вышеизложенного рассмотрения является тот факт, что решения уравнений (9)-(10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_z^{(1)in} &= -\frac{1}{2}A_1a\chi^2\rho_- \ln\chi\rho_- \cdot \cos\varphi_-, \\
 E_z^{(1)out} &= \frac{1}{2}A_2a\kappa^2(\rho_- \ln\kappa\rho_- \cdot \cos\varphi_- + \rho_+ \ln\kappa\rho_+ \cdot \cos\varphi_+), \\
 H_z^{(1)in} &= -\frac{1}{2}A_1a\chi^2\rho_- \ln\chi\rho_- \cdot \sin\varphi_-, \\
 H_z^{(1)out} &= \frac{1}{2}B_2a\kappa^2(\rho_- \ln\kappa\rho_- \cdot \sin\varphi_- + \rho_+ \ln\kappa\rho_+ \cdot \sin\varphi_+),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi^2 &= \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \\
 \kappa^2 &= k^2 - \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2}.
 \end{aligned}$$

Данные функции могут быть разложены по системе угловых собственных функций мод электростатической задачи. Поскольку мы ищем поправку к моде  $n = 1$ , то из полученных рядов следует выбрать первые члены. Это позволит нам удовлетворить граничным условиям. В итоге запишем:

$$\begin{aligned}
 E_z^{out} &= E_z^{(0)out} + F(\xi) \cos\eta, \\
 H_z^{out} &= H_z^{(0)out} + G(\xi) \sin\eta,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E_z^{(1)}(\xi, \eta) \cos\eta d\eta, \\
 G(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_z^{(1)}(\xi, \eta) \sin\eta d\eta.
 \end{aligned}$$

Во внутренней области можно ограничиться нулевым приближением для составляющих электромагнитного поля. Оправданность этого утверждения мы увидим в дальнейшем, когда покажем выполнение условия  $\kappa \ll \chi$ .

В интересующем нас случае ширина зазора мала  $d \ll R$ . Тогда границе цилиндра соответствует значение масштабной координаты

$$\xi_0 = \ln \frac{\sqrt{d(2R+d)} - d}{\sqrt{d(2R+d)} + d} \approx \sqrt{\frac{2d}{R}} \ll 1,$$

и при вычислении интегралов в ответе мы оставим только те члены, которые не обращаются в нуль при  $\xi \rightarrow 0$ . С логарифмической точностью находим:

$$F(\xi) = \frac{a^2 \kappa^2}{2\pi} A_2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} \ln \frac{2a^2 \kappa^2}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} + \xi \right) \cos\eta d\eta =$$

$$= a^2 \kappa^2 A_2 (e^{-\xi} \ln 2a^2 \kappa^2 - \ln 2\xi^2),$$

$$G(\xi) = \frac{a^2 \kappa^2}{2\pi} B_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \ln \frac{2a^2 \kappa^2}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} d\eta = a^2 \kappa^2 B_2 e^{-\xi} \ln 2a^2 \kappa^2.$$

Таким образом, продольные компоненты электромагнитного поля в области внешнего диэлектрика с учётом запаздывающих поправок имеют вид:

$$E_z^{out} = A_2 (\operatorname{sh} \xi + a^2 \kappa^2 (e^{-\xi} \ln 2a^2 \kappa^2 - \ln 2\xi^2)) \cos \eta,$$

$$H_z^{out} = B_2 (\operatorname{ch} \xi + a^2 \kappa^2 e^{-\xi} \ln 2a^2 \kappa^2) \sin \eta.$$

В матрице системы уравнений, полученных при записи граничных условий, можно выделить часть  $M_0$ , соответствующую полям нулевого приближения и  $\delta M$ , связанную с поправками за счёт запаздывания. Дисперсионное уравнение представляет собой условие равенства нулю детерминанта этой матрицы:

$$\det(M_0 + \delta M) = 0.$$

Разложим выражение в левой части по элементам матрицы  $\delta M$ :

$$\det(M_0 + \delta M) = \det M_0 + \sum_{ij} \frac{\partial(\det M_0)}{\partial m_{ij}} \delta m_{ij}.$$

Используя разложение детерминанта по строке, получим, что

$$\frac{\partial(\det M_0)}{\partial m_{ij}} = (-1)^{i+j} N_i^j$$

где  $N_i^j$  - дополнительный минор элемента  $m_{ij}$ .

Выразив миноры через элементы обратной матрицы

$$m_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{N_j^i}{\det M_0},$$

окончательно получим:

$$\det(M_0 + \delta M) = \det M_0 + \det M_0 \cdot m_{ji}^{-1} \delta m_{ij} = \det M_0 (1 + m_{ji}^{-1} \delta m_{ij})$$

Таким образом, дисперсионное соотношение:

$$1 + \operatorname{Tr}(M_0^{-1} \delta M) = 0. \quad (11)$$

Производя вычисления, находим:

$$\kappa \simeq \frac{1}{\sqrt{Rd}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_1 \xi_0 + \varepsilon_2) c^2}{8\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) Rd \omega^2}\right) \quad (12)$$

где  $\xi_0 \simeq \sqrt{2d/R}$ .

## 6. Заключение.

В квазистационарном пределе получено дисперсионное соотношение (12) дипольной моды гибридного волновода в приближении идеально проводящего металла. Полученный результат аналогичен известному соотношению (17) для фундаментальной моды цилиндрического оптоволокна. Значение предэкспоненциального множителя может быть определено путём учёта членов более высокого порядка малости в выражениях для компонент поля. Разработанный в ходе исследования метод теории возмущений пригоден для широкого класса задач, в которых уравнение Гельмгольца не может быть решено точно. В частности возможно непосредственное применение к проблеме распространения электромагнитных волн в системе двух близкорасположенных диэлектрических волноводов в квазистационарном пределе[4].

Аналитически решена задача о плазмонной моде в плоском трёхслойном волноводе, который представляет собой простейший пример гибридной схемы. Показан эффект исчезновения связанной моды при слишком больших значениях толщины прослойки (18).

### Приложение А. Цилиндрический волновод.

Задача о распространении связанных мод в цилиндрическом диэлектрическом волноводе радиусом  $R$  имеет точное аналитическое решение поскольку уравнение Гельмгольца в полярных координатах допускает разделение переменных[5]. Переписав (5) в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \chi^2 E_z = 0,$$

после подстановки  $E_z(r, \varphi) = E_z(r)Y(\varphi)$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \left( \chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 \varphi} + n^2 Y &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения:

$$Y(\varphi) = Ae^{in\varphi} + Be^{-in\varphi}.$$

Из очевидного условия однозначности полученной функции следует, что  $n \in Z$ . Таким образом уравнение на радиальную часть функции  $E_z$  имеет вид:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial E_z}{\partial r} + (\chi_1^2 r^2 - n^2) E_z &= 0, \text{ при } r < R \\ r^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial E_z}{\partial r} + (\chi_2^2 r^2 - n^2) E_z &= 0, \text{ при } r > R \end{aligned}$$

Выполнив в первом уравнении замену переменной  $\zeta = \chi r$ , имеем:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 E_z^{in}}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial E_z^{in}}{\partial \zeta} + (\zeta^2 - n^2) E_z^{in} = 0,$$

Данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение Бесселя с целочисленным параметром  $n$ . Решение внутри цилиндра:

$$E_z^{in}(r) = A_1 \cdot J_n(\chi_1 r). \quad (13)$$

где  $J_n$  - функция Бесселя первого рода.

В случае связанной моды необходимо во внешней области положить  $\chi_2^2 = -\kappa^2 < 0$ . Тогда, получив после замены  $\zeta = \kappa r$  модифицированное уравнение Бесселя,

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 E_z^{out}}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial E_z^{out}}{\partial \zeta} - (\zeta^2 + n^2) E_z^{out} = 0,$$

выпишем в качестве его решения экспоненциально затухающую на бесконечности функцию Макдональда:

$$E_z^{out}(r) = A_2 \cdot K_n(\kappa r). \quad (14)$$

Аналогичный результат получается для компоненты поля  $H_z$ .

В квазиэлектростатическом пределе  $\kappa R \ll 1$ ,  $\chi R \ll 1$  для моды  $n = 1$ :

$$E_z^{in}(r, \varphi) \simeq A_1 \left( \frac{\chi r}{2} + \frac{(\chi r)^3}{16} \right) \cos \varphi, \quad (15)$$

$$E_z^{out}(r, \varphi) \simeq A_2 \left( \frac{1}{\kappa r} + \frac{1}{2} \kappa r \ln \kappa r \right) \cos \varphi. \quad (16)$$

Первые члены разложения в ряд Тейлора представляют собой просто соответствующие электростатические решения. Вторые слагаемые, таким образом, есть решения уравнения (9) на следующую поправку в ряде теории возмущений. Но, как мы можем видеть приближение нулевого порядка во внешней области для цилиндрического волновода совпадает нулевым приближением в нашей основной задаче, а значит и поправки следующего порядка имеют одну и ту же форму.

На основе сказанного понятно, что существует два эквивалентных подхода к вопросу о поиске дисперсионного соотношения мод отдельного оптоволокна и любого волновода вообще в квазистационарном пределе. Во-первых, получив точное решение волнового уравнения, можно найти в явном виде дисперсионное соотношение и затем выполнить разложение в ряд исходя из условия  $\chi R \ll 1$ . Другой способ заключается в том, чтобы воспользовавшись теорией возмущений, найти несколько членов разложения точного решения и затем, поставив граничные условия, получить дисперсию. Поскольку разделение переменных в уравнении Гельмгольца зачастую не представляется возможным (как в нашей основной задаче), именно второй подход является наиболее плодотворным.

На примере оптоволокна получим следующее. После нахождения явных выражений (13)-(14) для продольных компонент поля необходимо учесть граничные условия. Касательные к границе раздела составляющие электромагнитного поля складывается из найденных компонент  $E_z$  и  $H_z$ , параллельных оси симметрии, и ортогональных этой оси членов. Согласно формулам (3)-(4):

$$E_{\tau\perp} = \frac{ik}{\chi^2} \frac{1}{R} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}.$$

$$H_{\tau\perp} = -\varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{ik}{\chi^2} \frac{1}{R} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Для составляющих электромагнитного поля нормальных границе раздела имеем:

$$E_n = \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{1}{R} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

$$H_n = \varepsilon \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{1}{R} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{ik}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}.$$

Для монохроматических волн из условия на касательные компоненты в совокупности с уравнениями Максвелла следует условие непрерывности соответствующих нормальных составляющих. Поэтому полная система уравнений на неизвестные амплитуды выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_1 J_n(\chi R) &= A_2 K_n(\kappa R). \\
A_3 J_n(\chi R) &= A_4 K_n(\kappa R). \\
-A_1 \frac{kn}{\chi^2 R} J_n(\chi R) + A_3 \frac{i\omega}{c\chi^2} J'_n(\chi R) &= A_2 \frac{kn}{\kappa^2 R} K_n(\kappa R) - A_4 \frac{i\omega}{c\kappa^2} K'_n(\kappa R). \\
-A_1 \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\chi^2} J'_n(\chi R) - A_3 \frac{kn}{\chi^2 R} J_n(\chi R) &= A_2 \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\kappa^2} K'_n(\kappa R) + A_4 \frac{kn}{\kappa^2 R} K_n(\kappa R).
\end{aligned}$$

Приравниваем нулю детерминант матрицы этой системы:

$$\begin{aligned}
&\left( \varepsilon_1 \kappa \frac{J'_n(\chi R)}{J_n(\chi R)} - \varepsilon_2 \chi \frac{K'_n(\kappa R)}{K_n(\kappa R)} \right) \left( \kappa \frac{J'_n(\chi R)}{J_n(\chi R)} - \chi \frac{K'_n(\kappa R)}{K_n(\kappa R)} \right) - \\
&\quad - \frac{n^2 k^2 \omega^2}{R^2 c^2 \chi^2 \kappa^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Выполняя разложение функций Бесселя в ряд, для фундаментальной моды  $n = 1$ , не имеющей частоты отсечки, с точностью до предэкспоненциального множителя находим:

$$\kappa \simeq \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)c^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\omega^2 R^2}\right), \quad (17)$$

где  $\kappa = \sqrt{k^2 - \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2}}$ .

Такой же результат получаем, поставив граничные условия на уже разложенные функции (15)-(16).

### Приложение В. Плоский трёхслойный волновод.

Полезно также исследовать распространение плазмонных мод в плоском трёхслойном волноводе, являющимся простейшим примером гибридной схемы (рис. 3). Описанный выше метод теории возмущений работает только в квазистационарном пределе и в том виде, в котором был использован в данной работе, использует предположение об идеальности металла. Таким образом он не даёт верного представления о картине происходящего в случае малых длин волн. Между тем условие  $d \ll R$  позволяет нам использовать приближение трёхслойной модели в том случае когда процесс распространения электромагнитной волны имеет существенно неквазистационарный характер.

Будем считать, что  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3 < 0$ . Толщина диэлектрической прослойки равна  $d$ . Дисперсионное соотношение имеет два корня, соответствующих ТЕ и ТМ-волнам соответственно:

$$\begin{aligned}
e^{2d\kappa_2} &= \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\kappa_2 - \kappa_3)}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)}, \\
e^{2d\kappa_2} &= \frac{(\varepsilon_2 \kappa_1 - \varepsilon_1 \kappa_2)(\varepsilon_2 \kappa_3 - \varepsilon_3 \kappa_2)}{(\varepsilon_2 \kappa_1 + \varepsilon_1 \kappa_2)(\varepsilon_3 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_3)}.
\end{aligned}$$

Первое решение не имеет смысла, так как правая часть отрицательна для рассматриваемой нами задачи. Значит дисперсия связанных мод задаётся вторым соотношением и в системе может распространяться только ТМ-волна. Важно отметить, что поперечная компонента электрического поля в этой волне нормальна границам раздела сред, что ведёт к усилению поля в объёме прослойки за счёт большого скачка диэлектрической проницаемости.

При  $d \rightarrow 0$  найденная дисперсия переходит в известный результат для SPP:

$$\varepsilon_3 \kappa_1 + \varepsilon_1 \kappa_3 = 0,$$

а значит при достаточно малой толщине зазора дисперсионное соотношение не сильно отличается от имеющего место для обычного поверхностного плазмона на границе металл-диэлектрик.

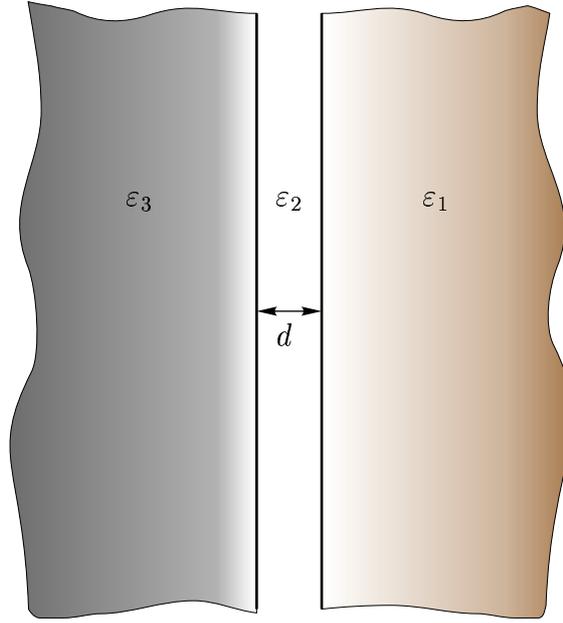


Рис. 3

Заметим, что при заданной частоте решение пропадает при некоторой критической толщине диэлектрического слоя. Эта толщина определяется из условия  $\kappa_1 = 0$ :

$$e^{2\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} d_c \omega} = \frac{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}}{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}}.$$

В пределе  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll \varepsilon_3$  находим:

$$d_c \simeq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sqrt{|\varepsilon_3|} \omega}. \quad (18)$$

Таким образом, наличие дополнительного слоя прозрачного диэлектрика малой толщины  $d \ll d_c$  не сильно влияет на дисперсионное соотношение поверхностного плазмона и при этом приводит к значительному усилению поля в пограничном слое в сравнении с обычным SPP.

### Список литературы

1. *Oulton, R. F., Sorger, V. J., Genov, D. A., Pile, D. F. P., Zhang X.* A hybrid plasmonic waveguide for subwavelength confinement and long-range propagation.. *Nat. Phot.* 2, 495–500 (2008).
2. *Volker J. Sorger, Ziliang Ye, Rupert F. Oulton, Yuan Wang, Guy Bartal, Xiaobo Yin, Xiang Zhang.* Experimental demonstration of low-loss optical waveguiding at deep sub-wavelength scales. *Nat. Comm.*(2011).
3. *P. M. Morse and H. Feshbach.* *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill, New York(1953).
4. *Almeida, V. R., Xu, Q., Barrios, C. A., Lipson, M.* Guiding and confining light in void nanostructure. *Opt. Lett.* 29, 1209–1211 (2004)..
5. *Д. Маркузе.* *Оптические волноводы.* Москва(1974).