

Федеральное агенство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Квантовая метрология напряжения.

Студент 728 гр. Крайнов Лев Олегович

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Лесовик Г.Б.

Черноголовка 2011 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	2
3	Метрологическая схема	3
	Описание	3
	Определение фазы	3
	Измерение напряжения	5
	Точность	5
4	Коррекция ошибок в фазе	6
5	Повышение чувствительности при помощи ГЦХ состояний	8
6	Еще один алгоритм оценки фазы	9
7	Схема с шумами	10
8	Заключение	11
A	Приложение. Код коррекции Шора	12

1 Введение

Квантовая метрология - раздел метрологии, занимающийся измерениями с использованием квантовых состояний. Исторически он вырос из квантовой информатики, вследствие попыток (заметим, успешных) получить увеличение точности по сравнению с классическими измерениями, аналогичное ускорению алгоритмов квантовой информатики по сравнению с классическими. Обычное увеличение точности порядка корня из числа раз измерения системы или времени измерения.

Когда мы определяем неизвестную физическую величину квантовой системы, мы обычно готовим зонд, приводим его во взаимодействие с системой и измеряем его. Если физический механизм, который определяет динамику системы, известен, мы можем определить эту величину по изменению состояния зонда до и после взаимодействия. Так как квантовые состояния редко различимы, часто имеет место статистичность такого определения. Чтобы уменьшить неопределенность такого измерения, мы можем использовать N одинаковых зондов, получить N результатов и усреднить их. Из центральной предельной теоремы при $N \gg 1$ получаем оценку для точности такого среднего - $\frac{\Delta}{\sqrt{N}}$, где Δ^2 - дисперсия результата измерения одного зонда. Данная точность называется стандартным квантовым пределом или пределом дробового шума. Такая точность достигается в большинстве классических измерительных приборов и интереса не представляет. Если же использовать те же N зондов, добавив квантовых эффектов (такие как запутывание или сжатие), более высокая точность может быть достигнута с упоминавшимся выше улучшением в $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Т.е. точность будет порядка $\frac{1}{N}$, что называется пределом Гейзенберга и считается абсолютным пределом точности. Аналогично, точности $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ и $\sim \frac{1}{t}$ в зависимости от времени измерения t называются так же. Нас в этой работе будет интересовать построение вольтметра с использованием квантовых состояний, позволяющего преодолеть стандартный квантовый предел.

2 Постановка задачи

Нашей задачей является изучения схемы вольтметра, построенной на зарядовых кубитах [4]. При этом необходимо, чтобы точность такого вольтметра соответствовала пределу Гейзенберга. Известно, что время когерентности таких кубитов относительно мало, поэтому для повышения точности необходимо придумать способ повышать время когерентности, то есть исправлять возникающие ошибки. Существующие методы типа спинового эха предполагают повороты на π на окружностях сферы Блоха и поэтому не годятся.

Точность - понятие относительное, поэтому следует сравнить точность, предположительно достигаемую при помощи такого квантового вольтметра и точность уже имеющихся классических приборов. Наиболее точные из существующих и наиболее распространенные в точных измерениях - вольтметры на СКВИДах, использующие чувствительность последних к магнитному полю. С таким вольтметром мы и проведем сравнение.

Следует отметить, что не все способы запутать кубиты доступны на данный момент, но мы не будем это учитывать.

3 Метрологическая схема

Описание

Рассмотрим кубиты, которые взаимодействуют с внешним полем. Будем считать, что они постоянно находятся в состоянии $|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle$, φ - фаза кубита.

$$\hat{H} = H_x \hat{\sigma}^x + H_y \hat{\sigma}^y + H_z \hat{\sigma}^z \quad (1)$$

Поле H_z - эффективное "магнитное" поле, которое мы желаем измерять.

Стоит подчеркнуть, что измеряемое поле зависит исключительно от природы кубита. Достаточно, чтобы можно было заставить кубит взаимодействовать с данным полем, например для простого спина $\frac{1}{2}$ такое поле будет магнитным. По сути таким способом может измеряться величина всего что угодно, что может попасть в последний член эффективного гамильтониана кубита (1). Для корректной работы схемы необходимо, чтобы влиянием первых двух членов можно было пренебречь.

Суть схемы состоит в приведении кубита во взаимодействие с внешним полем и превращении значения внешнего поля в фазу кубита $\varphi = \frac{1}{\hbar} \int_0^t H_z dt$. Далее эта фаза определяется с помощью квантового преобразования Фурье(КПФ).

Все описываемые ниже реализации этого преобразования требуют возможности получения кубитов с фазами $\varphi 2^j$. Этого можно добиваться меняя время измерения t и меняя чувствительность кубита к внешнему полю.

Определение фазы

В качестве алгоритма определения фазы данный алгоритм впервые описан в работе [2]. Также его удобно использовать для подсчета пролетающих частиц [4]. Для начала опишем в общих чертах квантовое преобразование Фурье, на котором алгоритм основан.

КПФ над гильбертовым пространством размерности N - линейный оператор, переводящий N базисных состояний $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$ в их суперпозиции:

$$\hat{F}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i j k / N} |k\rangle \quad (2)$$

Введем двоичное представление произвольного числа $j < K$ в виде $j = j_1 j_2 \dots j_K = j_1 2^{K-1} + j_2 2^{K-2} + \dots + j_K 2^0$. Дробь будем записывать аналогично: $\frac{j}{2^K} = 0.j_1 \dots j_K$. Когда мы имеем K кубитов и $N = 2^K$ естественным выбором нумерации состояний будет $|n\rangle = |n_1\rangle_1 |n_2\rangle_2 \dots |n_K\rangle_K$. В таком случае удастся записать результирующие векторы в виде тензорного произведения. Несложно убедиться, что

$$\hat{F}|j_1 j_2 \dots j_K\rangle = \frac{1}{2^{K/2}} (|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_K} |1\rangle) (|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{K-1} j_K} |1\rangle) \dots (|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \dots j_K} |1\rangle), \quad (3)$$

А так же в том, что КПФ унитарно $\hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{1}$ Рассмотрим регистр из K незапутанных кубитов, причем на j -м кубите каким-то образом удалось получить фазу $\varphi_j = \varphi 2^{j-1}$.

Введем число $x = \varphi 2^K$. Если $x \in \mathbb{Z}$, то нетрудно видеть, что такое состояние кубитов будет просто образом преобразования Фурье от состояния $|x\rangle$

$$|\Psi(x)\rangle = \prod_{j=1}^K |\Psi_j(x)\rangle = \prod_{j=1}^K \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2^j}} |1\rangle \right) = \hat{F}|x\rangle \quad (4)$$

Если теперь к этому состоянию применить обратное КПФ, то в случае целого x мы сразу получим $|x\rangle$, после чего можно одновременным измерением кубитов получить двоичную запись x . Примененное в таком виде КПФ обычно называется алгоритмом оценки фаз Шора-Клеве и др.[1]

Для произвольных x определим $|x\rangle$:

$$|x\rangle = \hat{F}^{-1}|\Psi(x)\rangle \quad (5)$$

Для целых x определение будет совпадать с вышеописанными состояниями. Также ясно, что вышеописанный регистр из K кубитов будет в состоянии $\hat{F}|x\rangle$, когда кубиты получают фазы φ_j . Соответственно, если мы применим обратное КПФ, и произведем измерение число $n = n_1 \dots n_K$ получится с вероятностью:

$$P(n|x) = |\langle n|x\rangle|^2 = |\langle n|\hat{F}^{-1}|\Psi(x)\rangle|^2 = |\langle \hat{F}(n)|\Psi(x)\rangle|^2 \quad (6)$$

$$P(n|x) = \frac{1}{2^K} \prod_{j=1}^K \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi(n-x)}{2^j}\right) \right) = \frac{1}{2^{2K}} \frac{\sin^2(\pi(x-n))}{\sin^2 \frac{2\pi(x-n)}{2^{K+1}}} \quad (7)$$

В случае если $x \in \mathbb{Z}$, $P(n|x) = 0$ для всех $n \neq x$ и $P(x|x) = 1$, то есть алгоритм в таких случаях всегда выдает точное значение.

Когда $|x-n| \notin \mathbb{Z}$

$$P(n|x) \leq \frac{1}{\pi^2(x-n)^2} \quad (8)$$

То есть даже при нецелом x наиболее вероятны исходы n близкие к x .

Теперь опишем алгоритм Моска.

Мы опять возвращаемся к регистру кубитов в состоянии $|\Psi(x)\rangle$, полученному некоторым образом. Будем производить с кубитами следующие операции, начиная с младшего $j = K$ кубита:

- 1) Проводим измерение σ_j^z . Результат, 0 или 1, записываем в n_j .
- 2) Изменяем фазу остальных кубитов с номерами $i = j-1, \dots, 1$ на $\frac{2\pi n_j}{2^i}$
- 3) Переходим к следующему кубиту.

Нетрудно сообразить, что вероятность получить 1 на j -м кубите будет

$$P(n_j = 1) = (\langle 0| + e^{\pi i} \langle 1|) (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{2x-x}{2^j}} \langle 1|). \quad (9)$$

Результатом такой операции будет набор нулей и единичек $(n_1 \dots n_K)$ который будет представлять собой оцифрованное значение фазы φ . В этом смысле данная операция аналогична классическому АЦП (аналого-цифровой преобразователь).

Следовательно, для ошибки в j -м кубите $|x-n| \geq 2^{j-1}$ имеем $P(n|x) < 2^{2j}$.

Следует отметить, что экспоненциальная точность установки фаз кубитов необязательна, достаточно чтобы каждый бит n_j определялся верно с вероятностью $1 - \varepsilon$. Для произвольных x данное условие будет условием того, что вероятность $P(n_j = 1|x)$ отклоняется от (9) не более, чем на ε . В терминах точности установки $\phi_{id}^j = \phi 2^j$ это значит, что можно допускать отклонения $\frac{\phi_{real}^j - \phi_{id}^j}{\phi_{id}^j} < \varepsilon$

Измерение напряжения

Как уже было упомянуто, измеряемое "магнитное" поле зависит от природы кубита. Если кубит - электрон в двух квантовых точках, то с его помощью можно измерять напряжение. Данная схема уже была предложена в работе [4].

К одной из ям прикладывается напряжение $V(t)$, и эффективный гамильтониан кубита становится

$$\hat{H}(t) = \delta_1(t)\hat{\sigma}^z + \Delta(t)\hat{\sigma}^x \quad (10)$$

Тут $\delta_1(t) = eV(t)$ - разность энергий между уровнями в ямах, Δ - экспоненциально малое перекрытие между уровнями. Ввиду экспоненциальной малости последним членом можно пренебречь (всегда можно повысить барьер). Далее получаем цифровое приближение значения $\frac{eVt}{2\pi\hbar}$, где t - время измерения на старшем кубите $j = K$.

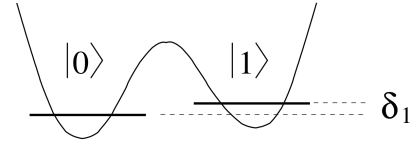


Рис. 1: Эффективный потенциал для зарядового кубита.

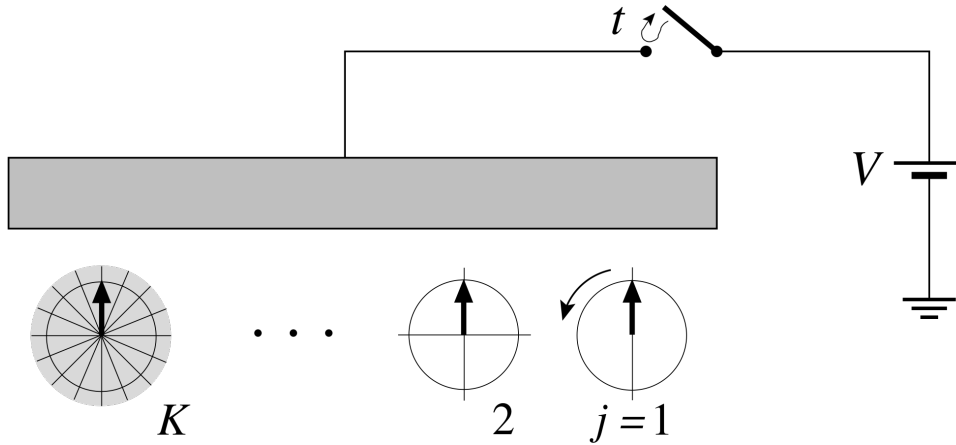


Рис. 2: Схема измерения напряжения

Точность

Реализация каждого алгоритма требует ресурсов. В данной схеме ресурсами являются время измерения и количество кубитов. Характеристики полезности - обеспечиваемая точность и вероятность, с которой эта точность обеспечивается.

Из (8) следует, что если добавить $\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ кубитов с номерами $1, 0, \dots, -\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, то вероятность верного значения кубита с номером $j = 1$ будет больше $1 - \varepsilon$. Следовательно, если мы желаем получать точность ν с вероятностью ошибки меньше ε , нам понадобится $M(\nu, \varepsilon) = \lceil \log_2 \frac{1}{\nu} \rceil - \lceil \log_2 \varepsilon \rceil$ кубитов.

Как уже указывалось выше, геометрическая прогрессия фаз кубитов может реализовываться чувствительностью и геометрической прогрессией времен измерения. То есть, если удалось организовать геометрическую прогрессию чувствительности K

кубитов к полю, то можно провести их измерение одновременно. Вследствие принципа неопределенности время измерения t , необходимое для достижения заданной точности ν будет:

$$\frac{\delta V}{V} = \nu \sim \frac{\hbar}{eVt} \quad (11)$$

То есть такая схема позволяет получать предел Гейзенберга.

Если удвоение фазы обеспечивается при помощи удвоения времени воздействия, то можно обойтись последовательным измерением одного кубита M раз с временами $2^{K-1}\tau, 2^{K-2}\tau, \dots, \tau$, это приведет лишь к двукратному увеличению длительности по сравнению с параллельным измерением.

Схема с разными временами также позволяет в идеале получать предел Гейзенберга. Точность δV связана с временем измерения как:

$$\frac{\delta V}{V} = \nu = \frac{\tau}{\varepsilon t} \quad (12)$$

Напряжение не должно быть слишком большим, иначе старший кубит тоже провернется:

$$V < V_{max} = \frac{\pi\hbar}{e\tau} \quad (13)$$

Тут τ - время измерения старшего кубита. При этом нам необходимо, чтобы старший кубит выдал правильное значение с вероятностью больше чем $1 - \varepsilon$. Следовательно, $\tau = \frac{\hbar\varepsilon}{eV_{max}}$. Получаем:

$$\frac{\delta V}{V} \sim \frac{\hbar}{eVt} \quad et\delta V \sim \hbar \quad (14)$$

Пока что совершенно неучтены флуктуации напряжения V и не принято в рассмотрение малое время когерентности зарядовых кубитов $\tau \sim 7$ нс.

Для сравнения, наиболее точные вольтметры на СКВИДах позволяют достигать уровни шума около $\sigma = 1$ пВ/ $\sqrt{\Gamma}$ ц [6]. Отсюда получаем, что предложенная схема вольтметра "догонит" по точности вольтметр на СКВИДе при времени измерения $t \sim \left(\frac{\hbar}{e\sigma}\right)^2 \sim 1$ мкс. Но при этом обычное время измерения для вольтметра на СКВИДе порядка 1с, в то время как скорость работы вольтметра на кубитах ограничена временами инициализации и считывания, которые уже сейчас делают меньше, чем 0.1нс на зарядовых кубитах.[3] Положив вероятность ошибки $\varepsilon = 0.01$, находим, что даже с двойной проверкой такой вольтметр сможет определять напряжение с точностью порядка 0.1мВ с частотой порядка 10ГГц.

4 Коррекция ошибок в фазе

Так как реализации кубитов обладают довольно маленькими временами когерентности, точность измерения, начиная с некоторого времени измерения, начинает определяться ошибками в фазе. Оценкой для такого момента будет $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx \varepsilon \rightarrow t \approx \varepsilon\tau$. Поскольку точность обратно пропорциональна времени измерения получаем, что чем надежнее мы желаем получать результат, тем меньше будет его точность - $\varepsilon\nu \sim 1$.

Взаимодействие между измеряемым полем и кубитами в нашей модели сводится к унитарному оператору поворота фазы на каждом из кубитов:

$$\hat{U} = \prod_j \hat{U}_j(\phi + \delta\varphi_j) \quad (15)$$

Поэтому нужно придумать способ бороться с ошибками $\delta\varphi$ унитарного оператора $\hat{U}(\phi) = e^{i(\phi+\delta\varphi)\sigma^z/2}$ для какого-то неизвестного ϕ . Это представляется довольно сложной задачей, поэтому для начала рассмотрим действие оператора ошибки на случайную фазу $\hat{X} = e^{i\delta\varphi\sigma^z/2}$, $z = e^{i\delta\varphi}$ на произвольное состояние $|\psi\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$:

$$\hat{X}|\psi\rangle = \frac{1+z}{2}(\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle) + \frac{1-z}{2}(\alpha'|0\rangle - \beta'|1\rangle) = \frac{1+z}{2}\hat{I}|\psi\rangle + \frac{1-z}{2}\hat{Z}|\psi\rangle,$$

где \hat{I} - тождественный оператор, \hat{Z} - оператор изменения фазы на π . В базисе $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ это будут, соответственно, тождественный оператор и оператор смены битов. Из разложения оператора ошибки видно, что состояние кубита после действия ошибки является суперпозицией исходного состояния и состояния со сдвигом фазы на π , причем вес сдвинутого состояния имеет тот же порядок малости, что и сдвиг фазы.

Будем работать в вышеупомянутом базисе и сделаем обычную кодировку тремя битами $|+\rangle \rightarrow |+++\rangle$, $|-\rangle \rightarrow |--\rangle$, состояние будет выглядеть так:

$$|\psi\rangle = \alpha|+++\rangle + \beta|--\rangle$$

На каждый из битов ошибки будут действовать независимо, введем для каждого бита параметр $x_j = \frac{1-e^{i\delta\varphi_j}}{2}$, $|x_j| = \sin \delta\varphi_j$, $|1-x_j| = \cos \delta\varphi_j$

После действия ошибки:

$$\hat{X}|\psi\rangle = \left[\left(\alpha(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) + \beta x_1 x_2 x_3 \right) |+++\rangle + \left(\beta(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) + \right. \right. \quad (16)$$

$$\left. + \alpha x_1 x_2 x_3 \right) |--\rangle \right] + \left[\left(\alpha(1-x_1)(1-x_2)x_3 + \beta x_1 x_2 (1-x_3) \right) |++-\rangle + \right. \quad (17)$$

$$\left. + \left(\beta(1-x_1)(1-x_2)x_3 + \alpha x_1 x_2 (1-x_3) \right) |--+\rangle \right] + \dots \quad (18)$$

Дальше будут члены подобные тому, что во вторых квадратных скобках, который соответствует ошибке на третьем кубите, будут лишь номера у j меняться. Применим синдромное измерение к этому состоянию - 4 пары проекторов:

$$\hat{M}_0 = |+++\rangle\langle+++\rangle + |--\rangle\langle--\rangle \quad (19)$$

$$\hat{M}_1 = |--+\rangle\langle--+\rangle + |++-\rangle\langle++-\rangle \quad (20)$$

$$\dots \quad (21)$$

Если результат измерения - 0, то волновая функция после него будет

$$|\psi\rangle_0 = A\left(\alpha(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) + \beta x_1 x_2 x_3\right)|+++ \rangle + A\left(\beta(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) + \alpha x_1 x_2 x_3\right)|--- \rangle \quad (22)$$

A - константа нормировки.

В случае результата измерения 1-3 волновые функции опять будут получаться друг из друга перестановкой битов и индексов в выражении. Приведем функцию для результата 3 после коррекции данного кода ошибки (поворот на π третьего кубита):

$$|\psi\rangle_3 = A\left(\alpha(1-x_1)(1-x_2)x_3 + \beta x_1 x_2(1-x_3)\right)|+++ \rangle + \quad (23)$$

$$+ A\left(\beta(1-x_1)(1-x_2)x_3 + \alpha x_1 x_2(1-x_3)\right)|--- \rangle \quad (24)$$

Это и есть результат этого алгоритма коррекции ошибок.

Если сдвиг фазы произошел только на первом кубите, то $x_2 = x_3 = 0$ и состояние восстанавливается точно.

Рассмотрим случай малых ошибок $|x_j| \ll 1$

Когда на одном кубите происходит ошибка, его состояние превращается в $|\psi\rangle = (\alpha(1-x) + \beta x|+\rangle) + (\beta(1-x)|+\rangle + \alpha x)|-\rangle$. При малых x видно, что в общем случае состояние "испорчено" на $|x|$.

Синдромное измерение выдает результаты 0, 1-3 с вероятностями приблизительно $1 - 3\sigma^2$, σ^2 соответственно, где $\sigma \ll 1$ - дисперсия распределения фазы.

То есть с вероятностью, отличающейся от единицы на величину второго порядка малости выпадает результат 0, который соответствует состоянию, "испорченному" на величину $|x|^3$, и с вероятностью второго порядка малости выпадает результат 1-3 с той же степенью "испорченности", которая была бы без исправления ошибок.

Следовательно, когда нам известно значение ϕ для оператора с ошибкой $\hat{U}(\phi + \delta\phi) = e^{i(\phi + \delta\phi)\sigma^z/2}$ (что, по сути, то же самое, что и $\phi = 0$) мы можем эффективно подавить ошибки. Возможность же эффективного подавления ошибок оператора поворота вблизи некоторой неизвестной, то есть любой, фазы представляется удивительной и маловероятной. Заметим, что алгоритм коррекции Шора(см. приложение А) также не срабатывает, это связано с тем, что представленный выше алгоритм является практически упрощенной его версией.

5 Повышение чувствительности при помощи ГЦХ состояний

В предыдущей главе мы использовали состояния $\alpha|+++ \rangle + \beta|--- \rangle$. Если положить $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\beta = 1/\sqrt{2}$ и переобозначить $+, -$ на 0,1 получим GHZ₃ состояние:

$$|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}) \quad (25)$$

Применим к данному состоянию оператор поворота фазы $\hat{U}(\phi) = e^{i(\phi)\sigma^z/2}$:

$$\hat{U}|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes N} + e^{iN\phi}|1\rangle^{\otimes N}) \quad (26)$$

Видно, что для N кубитов "фаза" этого состояния изменилась на $N\phi$. Осталось только распутать кубиты, получив кубит с фазой $N\phi$. Это достигается путем применения $N - 1$ CNOT гейтов (gate) к парам кубитов $(1,2), (1,3), \dots, (1,N)$. Матрица преобразования CNOT:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Соответственно, после таких гейтов состояние $|0\rangle^{\otimes N} \rightarrow |0\rangle^{\otimes N}$, а состояние $|1\rangle^{\otimes N} \rightarrow |1\rangle|0\rangle^{\otimes(N-1)}$. Конечным состоянием будет:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{iN\phi}|1\rangle) \otimes |0\rangle^{\otimes(N-1)} \quad (28)$$

Цель достигнута. Таким образом ГЦХ состояния позволяют добиваться N -кратного увеличения чувствительности за N кубитов.

6 Еще один алгоритм оценки фазы

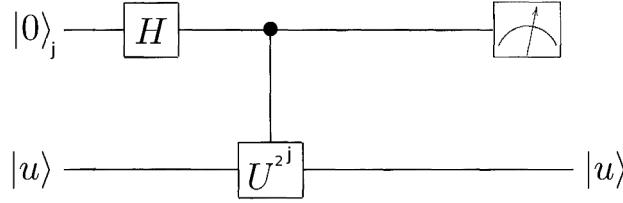


Рис. 3: Квантовая сеть (circuit) для j -го кубита.

Похожий способ оценивать фазу кубита был ранее придуман Китаевым[5]. Он также опирается на КПФ. Операции над кубитами производятся независимо, а увеличение вероятности правильного ответа на каждом из них носит статистический характер. На рисунке показана квантовая сеть операций, производимых над одним кубитом.

Состояние $|u\rangle$ является собственным для оператора $\hat{U}|u\rangle = e^{i2\pi\phi}|u\rangle$.

Во время взаимодействия между состояниями фаза кубита меняется на $e^{2\pi i\phi 2^j}$.

Перед измерением состояние j -го кубита будет: $|\psi\rangle = \frac{1}{2}((1 - e^{2\pi i\phi_j})|0\rangle + (1 + e^{2\pi i\phi_j})|1\rangle)$. Измеряется σ^y , соответственно результату 1 будет соответствовать $\phi_j = 2^j\phi = 1/4$ с вероятностью $p = \sin^2 \pi(\phi_j + 1/4)$, результату -1 - $\phi_j = \frac{3}{4}$ с вероятностью $q = \cos^2 \pi(\phi_j + 1/4)$. Далее производится такое количество $N(\varepsilon)$ измерений, чтобы с вероятностью $1 - \varepsilon$ определить один из двух отрезков $[0,0.5], [0.5,1]$, в котором лежит ϕ_j .

Воспользуемся законом больших чисел, чтобы определить, каков будет порядок необходимого количества измерений $N(\varepsilon)$.

Пускай доля выпавших единичек за N измерений - x Поскольку имеется серия испытаний Бернулли, имеем формулу:

$$P[|x - p| > \delta] < 2e^{-c(p,\delta)\delta^2 N} = \varepsilon \quad (29)$$

$$N \sim \frac{1}{c(p,\delta)\delta^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (30)$$

Для определения ϕ_j по значениям синуса и косинуса с точностью до $\pm \frac{1}{8}$, нужно взять $\delta \approx \frac{\pi^2}{6} 4 \approx \frac{1}{7}$.

Константа $c(\phi_j, \delta)$ расходуется при $\phi_j \in 1/4, 3/4$ и минимальна при $\phi_j \in \{0, 0.5\}$. Тогда выберем $a(\delta) = \frac{1}{c(0,\delta)}$.

То есть если мы собираемся определять фазу с точностью ν по алгоритму Китаева, то количество измерений кубитов будет:

$$N_{tot} \sim \frac{a(\delta)}{\delta^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\nu} \quad (31)$$

в отличие от описанной схемы Моска, где

$$N_{tot} \approx \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{1}{\nu} \quad (32)$$

Схемы различаются в том, что алгоритму Китаева безразлично, в каком порядке находить биты двоичного разложения фазы $\phi = 0.n_1 n_2 \dots n_K$ (опять аналогично классическому АЦП). Можно переставить порядок их получения любым образом, и результат не изменится. В схеме Моска же значение j -го бита может быть определено только после $(j-1)$ -го. Отсюда и берется выигрыш в производительности.

7 Схема с шумами

Рассмотрим схему с поочередным измерением одного кубита с временами воздействия поля $t, t/2, t/4, \dots$. Введем в рассмотрение флуктуации электрического поля. Будем считать, что на каждом кубите имеется шум, вызванный отклонениями этого поля от их среднего значения. Среднее значение переданной фазы для j -го кубита будет $\frac{2\pi i x}{2^j}$. Тогда на j -м кубите состояние после контакта с проводом будет:

$$|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x_j}{2^j}} |1\rangle \right) \quad (33)$$

Тут x_j - случайные величины распределенные нормально со средним x и дисперсией Δ . Следует отметить, что можно сделать Δ_j независимым от номера кубита, несмотря на то, что с возрастанием номера время измерения убывает. В схеме измерения напряжения это делается наложением фильтра, обрезающего частоты $f > \frac{1}{t}$, где t - максимальное время измерения кубита.

Вероятность получить n на выходе после схемы Моска будет:

$$P(n|x_1, \dots, x_j) = \frac{1}{2^{2N}} \left| \prod_{j=1}^N \left(1 + e^{\frac{2\pi i (x_j - n)}{2^j}} \right) \right|^2 = \frac{1}{2^{2N}} \prod_{j=1}^N P_j P_j^* \quad (34)$$

При усреднении по шумам для разных j интегралы расщепляются, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \int (1 + e^{\frac{2\pi i(x_j-n)}{2^j}})(1 + e^{\frac{2\pi i(-x_j+n)}{2^j}}) e^{-\frac{(x_j-x)^2}{2\Delta^2}} dx_j = 2 + 2 \cos \frac{2\pi(x-n)}{2^j} e^{-\frac{2\pi^2\Delta^2}{4^j}} \quad (35)$$

$$P(n|x) = \frac{1}{2^N} \prod_{j=1}^N \left(1 + \cos \frac{2\pi(x-n)}{2^j} e^{-\frac{2\pi^2\Delta^2}{4^j}} \right) \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что при $\Delta \ll 1$ данное произведение отличается от безшумового варианта на величину, пропорциональную Δ^2 .

Теперь рассмотрим вариант когда $\Delta \sim 2^b$ для некоторого целого $b < N$. Поскольку шумовой множитель достаточно резко зависит от номера кубита будем считать, что $e^{-\frac{2\pi^2\Delta^2}{4^j}}$ приблизительно равно 0 для всех кубитов с номерами $j < b$ и 1 для остальных.

$$P(n|x) = \frac{1}{2^N} \prod_{j=b}^N \left(1 + \cos \frac{2\pi(x-n)}{2^j} \right) = \frac{1}{2^{2N-b+1}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi(x-n)}{2^b}}{\sin^2 \frac{2\pi(x-n)}{2^{N+1}}} \quad (37)$$

Если $|x-n| \ll 2^{b-1}$:

$$P(n|x) \approx \frac{1}{2^{b-1}} \quad (38)$$

Что соответствует тому, что $b-1$ первый кубиты теряют полезность и теперь оставшимся старшим кубитам соответствует полоса значений шириной 2^{b-1} , содержащая x .

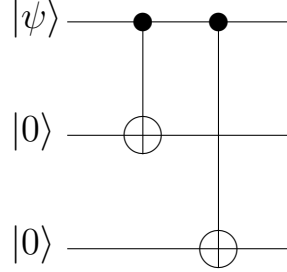
8 Заключение

Целью данной работы было изучение точности, достигаемой вольтметром на зарядовых кубитах по схеме, предложенной Лесовиком и др. Мы показали, что данная схема в принципе позволяет достигать Гейзенберговский предел, но вследствие фазовых ошибок точность обрезается на относительно малых временах. Попытки придумать алгоритм коррекции таких ошибок не увенчались успехом. Небольшая точность данного вольтметра компенсируется его быстродействием. Был получен результат, что флуктуации напряжения не разрушают всю схему целиком, а лишь значения тех кубитов, точность которых меньше среднего отклонения флуктуации - $\nu < \Delta$.

А Приложение. Код коррекции Шора

Для начала рассмотрим алгоритм кодирования кубитов в случае, когда возможен только переворот одного из кубитов, то есть с некоторой вероятностью на один или менее кубит действует оператор $\hat{\sigma}^x$.

Данный алгоритм основан на операции CNOT:



$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора взята в базисе $|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |111\rangle, |110\rangle, |101\rangle$. Процесс кодирования заключается в следующем:

- 1) На трехкубитное состояние $(a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle$ действуем оператором \hat{C} , получается $a|000\rangle + b|111\rangle$.
- 2) Кубиты подвергаются ошибке - перевороту. Мы ограничиваемся случаем, когда может перевернуться либо один либо ни одного кубита.
- 3) Опять действуем \hat{C} на кубиты.

Легко видеть, что $\hat{C}^2 = 1$, следовательно, если ошибки не произошло, то конечное состояние будет равно исходному - $(a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|0\rangle$.

Переворот произошел на втором кубите:

$$\hat{C}(a|010\rangle + b|101\rangle) = a|010\rangle + b|110\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|1\rangle|0\rangle \quad (39)$$

Понятно, что случай переворота третьего кубита получается просто переобозначением второго и третьего, следовательно конечным состоянием будет $(a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle|1\rangle$. Теперь переворот на первом кубите:

$$\hat{C}(a|100\rangle + b|011\rangle) = a|111\rangle + b|011\rangle = (a|1\rangle + b|0\rangle)|1\rangle|1\rangle \quad (40)$$

В итоге получилось, что для каждой из возможных ошибок у нас по одному состоянию пары дополнительных кубитов, которое можно определить одним измерением. Заметим, что в данном случае. То есть вместо измерительных операторов (19) можно было применить оператор \hat{C} и получились бы композиции состояний $|\psi\rangle_i$ (см (22)) с соответствующим образом взвешенными амплитудами.

Следовательно, аналогичным образом будет работать схема устранения ошибок в фазе на π , если провести замены $\sigma^z \leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}\sigma^z}$, $(|0\rangle, |1\rangle) \leftrightarrow (|+\rangle, |-\rangle)$.

Код коррекции Шора заключается в комбинировании этих двух алгоритмов. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ кодируются следующим образом:

$$|0\rangle \rightarrow |0_S\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) (|000\rangle + |111\rangle) (|000\rangle + |111\rangle) \quad (41)$$

$$|1\rangle \rightarrow |1_S\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle - |111\rangle) (|000\rangle - |111\rangle) (|000\rangle - |111\rangle) \quad (42)$$

Несложно видеть аналогию между алгоритмами коррекции ошибок переворота ку-

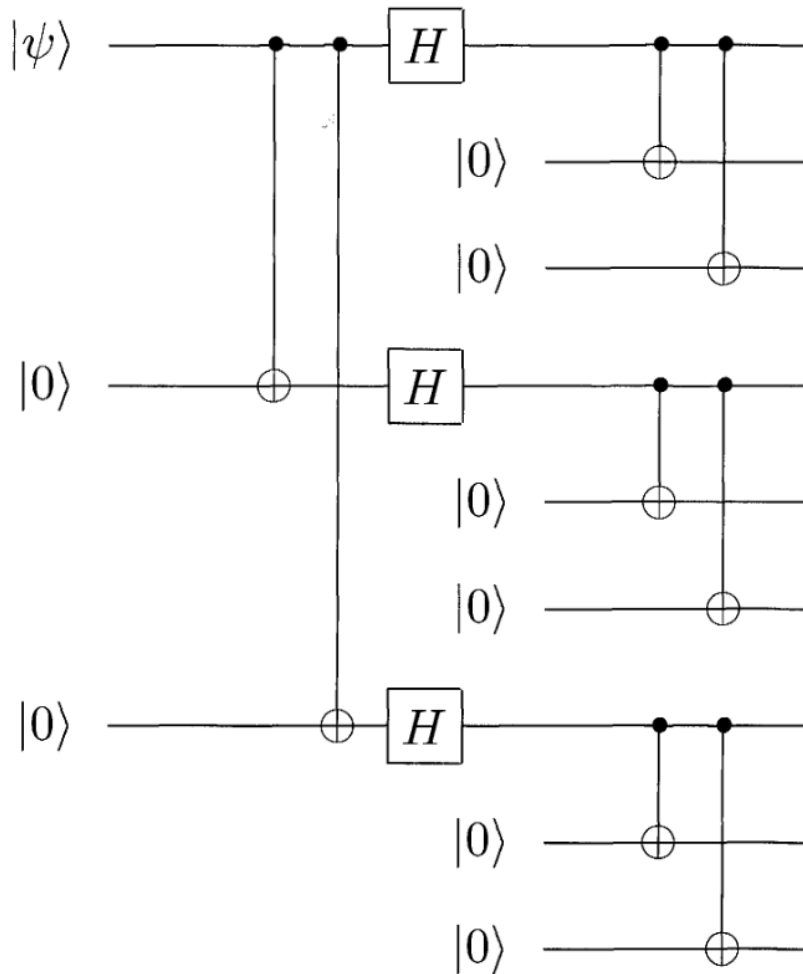


Рис. 4: Квантовая сеть кодирования Шора.

бита и поворота фазы кубита на π : в каждой из троек 1-3, 4-6, 7-9 каждый кубит входит одинаковым образом, и каждая тройка тоже входит одинаковым образом, то есть от перестановок кубитов в этих тройках состояния $|0_S\rangle$, $|1_S\rangle$ не изменятся.

Именно эта перестановочность лежит в основе определения факта ошибки. Фактически происходит применение правила большинства. Сначала определяется, не произошла ли в каком-либо из кубитов ошибка переворота путем попарного сравнения кубитов. Попарное сравнение достигается измерением наблюдаемой величины

$\sigma_i^z \sigma_j^z$. Такие 6 измерений редуцируют количество кубитных состояний до трех, после чего определяется, произошло ли поворота фазы на π . Опять идут в дело попарные наблюдаемые, на этот раз $\sigma_i^x \sigma_j^x$.

Нетрудно убедиться, что аналогично рассмотрению, приведенному в пункте "Коррекция ошибок в фазе" алгоритм коррекции срабатывает при любой ошибке на одном из кубитов[1]. При одновременной ошибке на двух кубитах алгоритм уже не работает, но вероятность такой ошибки имеет второй порядок малости по вероятности ошибки на кубите, таким образом достигается эффективное подавление ошибок.

Список литературы

- [1] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).
- [2] Michele Mosca. *Quantum Computer Algorithms*. PhD Thesis. Wolfson College. University of Oxford. (1995)
- [3] Christoph Kreisbeck, Franz J. Kaiser, and Sigmund Kohler Phase readout of a charge qubit capacitively coupled to an open double quantum dot Phys. Rev. B **81**, 125404 (2010)
- [4] M. V. Suslov, G. B. Lesovik, G. Blatter Quantum Abacus for counting and factorizing numbers arXiv.org:1011.3646
- [5] A.Yu. Kitaev Quantum measurements and the Abelian Stabilizer Problem arXiv:quant-ph/9511026
- [6] Luc Saury Realization of a DC SQUID picovoltmeter Precision Electromagnetic Measurements Digest, . . . , IEEE (2000)