Московский Физико-Технический Институт

Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
на степень бакалавра
студента 4 курса
Мухаметжанова Б.С.

Аналитические свойства конформного блока и АГТ-соответствие

Научный руководитель
Белавин А.А.

Москва 2011

Содержание

1 Введение

До недавнего времени конформная теория поля и $N = 2$ суперсимметричная теория Янга-Миллса представляли собой две отдельные, хотя и исключительно интересные области науки. Интерес к ним проявляли в частности потому, что в этих теориях удаётся получить множество точных результатов [2], [3]. Относительно недавно же оказалось, что между этими теориями имеется замечательная связь [1]. Она заключается в том, что конформные блоки (с помощью которых строятся корреляторы) в 2D конформной теории поля могут быть точно выражены через статистическую сумму в 4D калибровочной теории поля с расширенной суперсимметрией $N = 2$. Причём эта статистическая сумма была вычислена ранее Некрасовым [4].

В данной работе мы используем это соответствие для изучения аналитических свойств конформного блока. Во второй части приводится краткий обзор основных понятий конформной теории поля и вводятся необходимые для дальнейшего обозначения. Далее, в третьей части, изучаются аналитические свойства конформного блока со стороны конформной теории поля и формулируется основная задача данной работы в конкретном виде. В четвёртой части формулируется АГТ-соответствие. И наконец в пятой части приводится вычисление основной цели данной работы - нормы логарифмических примарных полей. Так же в Приложении даны необходимые определения функций, с помощью которых строится Некрасовская статистическая сумма.

2 Конформная теория поля

Основными объектами в конформной теории поля являются корреляционные функции локальных полей $A_i(x)$

$$\langle A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle \tag{1}$$

Предпологается что эта функция является вещественно-аналитической функцией любой из переменных x_i в $R^2\backslash\{x_j, j\neq i\}$, однозначна в этой области и принимает значения в C. Поскольку линейные свойства сохраняют это свойство, поля A_i можно считать элементами некоторого векторного пространства $\mathcal{A}$. Предпологается что $\mathcal{A}$ - бесконечномерное пространство, допускающее введение счётного базиса $\{A_j, j=0,1,\dots\}$.
Другое сильное предположение состоит в том, что пространство $\mathcal{A}$ образует алгебру относительно операторных разложений [9]. А именно произведение любых базисных векторов $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ можно следующим образом разложить по базису $\{A_j\}$

$$A_i(x_1)A_j(x_2) = \sum_k C_{ij}^k(x_1,x_2)A_k(x_2), \tag{2}$$

где $C_{ij}^k(x_1,x_2)$ - числовые функции, называемые структурными функциями операторной алгебры. Как известно генераторы конформной симметрии образуют алгебру Вирассоро

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m}, \tag{3}$$

где центральны заряд c - является параметром теории. Все поля входящие в теорию классифицируются по неприводимым представлениям этой алгебры. А именно неприводимые представления алгебры Вирассоро строятся следующим образом. Во-первых имеются так называемые примарные поля ϕ_Δ, обладающие свойствами

$$L_n\phi_\Delta = 0, \qquad n>0 \tag{4}$$

$$L_0\phi_\Delta = \Delta\phi_\Delta, \tag{5}$$

где Δ - называется аномальной размерностью данного оператора. Далее действием генераторов $\{L_{-n}|n>0\}$ строится модуль Верма над примарным полем

$$V_\Delta = \{L_{-n_1}L_{-n_2}\dots\phi_\Delta | n_1\leq n_2\leq\dots\} \tag{6}$$

Представления V_Δ являются неприводимыми за исключением некоторых специальных случаев, о которых будет сказано ниже. Заметим так же что в силу коммутационных соотношений вектора $(L_{-n_1}L_{-n_2}\dots)\phi_\Delta$ являются собственными векторами для L_0

$$L_0(L_{-n_1}L_{-n_2}\dots)\phi_\Delta = (\Delta+\sum n_i)(L_{-n_1}L_{-n_2}\dots)\phi_\Delta \tag{7}$$

Говорят что некоторый вектор из представления V_Δ лежит на N - ом уровне, если он является собственным для L_0 с собственным значением $(\Delta+N)$

Конформная инвариантность, а именно инвариантность относительно действия генераторов алгебры Вирассоро, накладывает жёсткие ограничения на операторное разложение примарных полей. В частности инвариантность операторного разложения относительно действия L_0 и L_1 позволяет установить зависимость функций $C_{ij}^k(x_1, x_2)$ от x_1, x_2 для операторного разложения примарных полей

$$\phi_1(x)\phi_2(0) = \sum_p C_{12}^p x^{\Delta_p - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{n_1, n_2, \ldots} \beta_{12}^{p,(n)} x^{\sum n_i} (L_{-n_1} L_{-n_2} \ldots)\phi_p(0), \tag{8}$$

где C_{12}^p численные коэффициенты, а внутренняя сумма идёт по упорядоченным наборам $\{n_1 \leq n_2 \leq \ldots\}$. Здесь внутренняя сумма представляет собой вклад неприводимого представления V_{Δ_p}. Если разложить вклад от одного неприводимого представления по уровням

$$|\Psi_\Delta\rangle = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \beta_{12}^{p,(n)} x^{\sum n_i} (L_{-n_1} L_{-n_2} \ldots)|\phi_p(0)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} x^N |N, \Delta_p\rangle, \tag{9}$$

то инвариантность операторного разложения (8) относительно действия L_k при $k > 0$ выражается следующими уравнениями

$$L_k \mid N, \Delta_p\rangle = (\Delta_p + k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k) \mid N - k, \Delta_p\rangle. \tag{10}$$

Эти уравнения носят реккурентный характер, позволяя вычислить $|\Psi_\Delta >$ последовательно уровень за уровнем. Следующие функции играют ключевую роль в конформной теории поля, поскольку через них выражается 4-х точечный коррелятор

$$\mathcal{F}(c, \Delta_p, \Delta_1, \Delta_2|x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_N x^N \langle N, \Delta_p | N, \Delta_p\rangle \tag{11}$$

Поскольку в дальнейшем мы будем изучать вклад в операторное разложение только одного представления, то положим для краткости $\Delta_p = \Delta$. Так же в дальнейшем нам понадобится следующий факт. Выберем на уровне N какой-нибудь базис $\{|N, k >, k = 1, 2, \ldots\}$. Тогда, как было показано в [12]

$$\det\langle k \mid l\rangle = \prod_{\substack{m,n \\ m,n \leq N}} (\Delta - \Delta_{mn})^{P(N-mn)} \tag{12}$$

где $P(N)$ - колличество упорядоченных наборов $0 < k_1 \leq k_2 \leq \ldots$ с постоянной суммой $\sum k_i = N$, а сопряжённые операторы из алгебры Вирассоро определены как

$$L_{-n}^+ = L_n \tag{13}$$

Остановимся теперь подробнее на так называемых вырожденных представлениях. Выше уже упоминалось о том что не всякое представление (6) является неприводимым. Действительно, рассмотрим представление с примарным полем ϕ_Δ. В принципе всегда имеется

такая возможность, что на N-ом уровне данного представления найдётся вектор χ_N, являющийся линейой комбинацией векторов вида (6), который будет удовлетворять условиям (4) и (5). При этом χ_N тоже будет являться примарным полем и из него тоже будет расти своё представление. В этом случае оказывается что представление с примарным полем ϕ_Δ распадается на два подпредставления и, следовательно, не является неприводимым. Если эта ситуация реализуется, то примарное поле ϕ_Δ называется вырожденным, а вектор χ_N называется сингулярным. Известно что такая ситуация возможна тогда и только тогда, когда аномальная размерность Δ примарного поля "предка"имеет специальный вид, о котором сказано ниже.
Введём следующую параметризацию центрального заряда c и аномальной размерности Δ

$$c = 1 + 6(b + b^{-1})^2, \qquad Q = b + b^{-1}, \qquad \Delta(a) = a(Q - a) \tag{14}$$

Тогда все вырожденные поля нумеруются двумя натуральными числами n, m, а их размерности даются следующими формулами

$$a_{mn} = \frac{(1-m)b^{-1} + (1-n)b}{2}, \qquad \Delta_{mn} = \Delta(a_{mn}) \tag{15}$$

Так же бывает полезно использовать "λ-параметризацию"вместо "a - параметризации"

$$a = \frac{Q}{2} - \lambda, \qquad \Delta_\lambda = \frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \tag{16}$$

$$\lambda_{mn} = \frac{mb^{-1} + nb}{2}, \qquad \Delta_{mn} = \Delta(\lambda_{mn}) \tag{17}$$

3 Аналитические свойства конформного блока

Здесь мы обсудим аналитические свойства конформного блока как функции промежуточной размерности Δ. А именно выясним положение полюсов конформного блока и частично фиксируем значения вычетов в этих полюсах. Исходя из конформной инвариантности вычеты удаётся фиксировать с точностью до некоторых коэффициентов r_{mn}, о которых будет сказно ниже. Вычисление этих множителей r_{mn} с помощью AGT соответствия и будет являться нашей основной задачей.

3.1 Полюсы векторов цепочки

Во-первых выясним свойства векторов $|N, \Delta\rangle$, то есть вклада в конформный блок от N-го уровня. Выберем на N-ом уровне базис $|\, l\rangle$ в виде

$$|\, l\rangle = (L_{-l_1} L_{-l_2} \dots) \,|\, \Delta\rangle, \qquad l_1 \le l_2 \le \dots, \qquad \sum l_i = N \tag{18}$$

Рассмотрим вклад N-го уровня в операторное разложение

$$| N, \Delta\rangle = \sum_l \beta(N, l) \mid l\rangle \tag{19}$$

Обозначим через $\gamma(N, k)$ проекцию $| N, \Delta\rangle$ на базисный вектор $| k\rangle$

$$\gamma(N, k) = \langle k \mid N, \Delta\rangle, \tag{20}$$

тогда используя (10) можно получить

$$\gamma(N, k) = \prod_{q=1}^{|k|}(\Delta + (\Delta_1 - 1)k_q - \Delta_2 + \sum_{p=q}^{N} k_p) \tag{21}$$

где $|k|$-длина разбиения $\{k_1, k_2, \dots\}$ Таким образом для достаточно общих Δ_1 и Δ_2 функция $\gamma(N, k)$ не имеет полюсов при $\Delta = \Delta_{mn}$. С другой стороны

$$\langle k \mid N, \Delta\rangle = \sum_l \beta(N, l)\langle k \mid l\rangle \tag{22}$$

Обращая последнее равенство и учитывая (20) и (21), получаем коэффициенты разложения вектора $|N, \Delta\rangle$ по базису

$$\beta(N, l) = \sum_k \langle k \mid l\rangle^{-1}\gamma(N, k) \tag{23}$$

Таким образом функция $\beta(N, k)$ и следовательно $\mid N, \Delta\rangle$ имеют полюсы первого порядка при $\Delta = \Delta_{mn}$, так как детерминант Каца (12) на N-ом уровне имеет нуль первого порядка при таких Δ. В силу выражения для конформного блока (11) понятно что конформный блок будет иметь полюса при тех же самых значениях $\Delta = \Delta_{mn}$.

Теперь рассмотрим конкретный полюс $\Delta = \Delta_{mn}$. Отдельно рассмотрим вклад в конформный блок от уровня $N = mn$

3.2 Вектора цепочки на уровне $N = mn$

Пусть D_{mn} — оператор, действием которого на примарное поле получается сингулярный вектор $| \Delta_{mn}\rangle$. Например

$$D_{12} = L_{-1}^2 + b^2 L_{-2} \tag{24}$$

Кроме того выберем нормировку

$$D_{mn} = (L_{-1}^{mn} + \dots) \tag{25}$$

Заметим что

$$\langle l \mid D_{mn} \mid \Delta\rangle \sim (\Delta - \Delta_{mn}), \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{26}$$

Действительно, предположим что

$$\langle l \mid D_{mn} \mid \Delta\rangle \sim (\Delta - \Delta_{mn})^s, \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{27}$$

тогда если мы возьмём $D_{mn} \mid \Delta\rangle$ в качестве первого базисного вектора на N-ом уровне, то получим следующее выражение для детерминанта $det\langle l|k\rangle$

$$det\langle l|k\rangle = det\begin{pmatrix} (\Delta - \Delta_{mn})^s & \dots & (\Delta - \Delta_{mn})^s \\ \vdots & \dots & \dots \\ (\Delta - \Delta_{mn})^s & \dots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn},$$

где только элементы первой строки и первого столбца пропрциональны $(\Delta - \Delta_{mn})^s$. Следовательно детерминант $det\langle l|k\rangle \sim (\Delta - \Delta_{mn})^s$. С другой стороны $det\langle l|k\rangle$ - есть детерминант Каца и мы знаем явное выражение для него (12). Если положить в этом выражении $N = mn$, то видим что детерминант Каца имеет нули первого порядка при $\Delta = \Delta_{mn}$. Следовательно $s = 1$ и (26) верно. Теперь мы можем написать полюсную часть вектора $\mid N = mn; \Delta\rangle$ в следующем виде

$$\mid N = mn, \Delta\rangle \to \frac{X_{mn} D_{mn} \mid \Delta\rangle + \mid v\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{28}$$

где $\mid v\rangle$ —вектор на N-ом уровне, ортогональный $D_{mn} \mid \Delta\rangle$, то есть мы просто разложили полюсную часть по базису, выделив вклад вектора $D_{mn} \mid \Delta\rangle$. Умножим обе части последнего уравнения на $\langle k \mid$. В левой части уравнения получаем $\gamma(N,k)$

$$\gamma(N,k) \to \frac{X_{mn}\langle k \mid D_{mn} \mid \Delta\rangle + \langle k \mid v\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}} \tag{29}$$

Как было упомянуто выше, $\gamma(N,k)$ не имеет полюсов при $\Delta = \Delta_{mn}$. Таким образом и правая часть не должна иметь полюсов при таких Δ. Первое слагаемое в правой части не имеет полюсов в силу (26). В то время как второе слагаемое не имеет полюсов в Δ_{mn} только при $\mid v\rangle = 0$. Таким образом

$$\mid N = mn, \Delta\rangle \to \frac{X_{mn} D_{mn} \mid \Delta\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{30}$$

3.3 Вектора цепочки на уровне $N \geq mn$

Рассмотрим теперь вклады более высоких уровней. Предположим, аналогично случаю $N = mn$, что

$$| N \geq mn, \Delta\rangle \to \frac{Q_{mn}(N,\Delta)D_{mn} \mid \Delta\rangle + \mid v\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{31}$$

где $Q_{mn}(N,\Delta)$ — оператор порядка $(N - mn)$. Например

$$Q_{mn}(mn+1,\Delta) = aL_{-1} \tag{32}$$
$$Q_{mn}(mn+2,\Delta) = bL_{-1}^2 + dL_{-2} \tag{33}$$

Как и в (26) можно показать что

$$\langle k \mid Q_{mn}(N,\Delta)D_{mn} \mid \Delta\rangle \sim (\Delta - \Delta_{mn}) \tag{34}$$

Например на уровне $N = mn + 1$ нужно взять в качестве первого базисного вектора $L_{-1}D_{mn}|\Delta\rangle$ и опять использовать выражение для детерминанта Каца (12). На уровне $N = mn + 2$ нужно взять в качестве двух первых базисных векторов $L_{-1}^2 D_{mn}|\Delta\rangle$ и $L_{-2}D_{mn}|\Delta\rangle$. Аналогичную процедуру можно произвести и на следующих уровнях. Таким образом приходим к (34). Далее находим, аналогично случаю $N = mn$, что $|v\rangle = 0$, то есть

$$| N \geq mn, \Delta\rangle \to \frac{Q_{mn}(N,\Delta)D_{mn} \mid \Delta\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{35}$$

Определим оператор $Q(N,\Delta)$

$$| N, \Delta\rangle = Q(N,\Delta) \mid \Delta\rangle \tag{36}$$

То есть при помощи оператора $Q(N,\Delta)$ мы получаем из примарного поля $|\Delta\rangle$ вклад N-го уровня в операторное разложение. Тогда из уравнения (10) на вектора цепочки $\mid N,\Delta\rangle$ получаем уравнение для оператора $Q(N,\Delta)$

$$L_k Q(N,\Delta)|\Delta\rangle = (\Delta + k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k)Q(N-k,\Delta)|\Delta\rangle \tag{37}$$

Покажем что

$$Q_{mn}(N,\Delta) = X_{mn}Q(N - mn, \Delta_{mn} + mn) \tag{38}$$

Действительно, заменяя в (10) вектор $\mid N,\Delta\rangle$ на (35) и оставляя только сингулярный член разложения по $(\Delta - \Delta_{mn})$, получим

$$L_k Q_{mn}(N,\Delta) \mid \Delta_{mn} + mn\rangle = \tag{39}$$
$$= \Big((\Delta_{mn} + mn) + k\Delta_1 - \Delta_2 + (N - mn) - k)Q_{mn}(N-k,\Delta\Big) \mid \Delta_{mn} + mn\rangle \tag{40}$$

Следовательно $Q_{mn}(N,\Delta) \mid \Delta_{mn} + mn\rangle$ удовлетворяет уравнению (37). Таким образом

$$Q_{mn}(N,\Delta) = \alpha_{mn}Q(N - mn, \Delta_{mn} + mn) \tag{41}$$

Если $N = mn$ то $Q_{mn}(N,\Delta) = X_{mn}$ и кроме того $Q(N - mn, \Delta_{mn} + mn) = 1$. Таким образом $\alpha_{mn} = X_{mn}$ и следовательно (38) верно.

3.4 Реккурентное соотношение для конформного блока

Теперь, после изучения вкладов $|N,\Delta\rangle$ в операторное разложение векторов различных уровней, вернёмся к описанию аналитических свойств конформных блоков. Заменяя в определении конформного блока $|\ N,\Delta\rangle$ согласно (35), получаем поведение конформного при $\Delta\to\Delta_{mn}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\Delta)\to x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}\sum_{N\geq mn}^{\infty}x^N\frac{X_{mn}(\Delta_1,\Delta_2)X_{mn}(\Delta_3,\Delta_4)}{(\Delta-\Delta_{mn})^2}\times\\ \times\langle\Delta|(Q(N-mn,\Delta_{mn}+mn)D_{mn})^+Q(N-mn,\Delta_{mn}+mn)D_{mn}|\Delta\rangle\end{aligned}\tag{42}$$

Здесь мы вспомнили что $|N,\Delta\rangle$ кроме прочего зависит от внешних размерностей Δ_1,Δ_2 или Δ_3,Δ_4. Поэтому у X_{mn} появились соответствующие аргументы. Далее используя

$$\begin{aligned}\langle\Delta|(Q(N-mn,\Delta_{mn}+mn)D_{mn})^+Q(N-mn,\Delta_{mn}+mn)D_{mn}|\Delta\rangle=\\ =\langle N-mn|N-mn\rangle\langle\Delta|D^+_{mn}D_{mn}|\Delta\rangle\end{aligned}\tag{43}$$

а так же используя свойство (26) в более конкретной форме

$$\langle\Delta|D^+_{mn}D_{mn}|\Delta\rangle=r_{mn}(\Delta-\Delta_{mn}),\qquad\Delta\to\Delta_{mn}\tag{44}$$

находим что конформный блок имеет полюса первого порядка

$$\mathcal{F}(x,\Delta)\to x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}\sum_{N\geq mn}^{\infty}x^N\frac{X_{mn}(\Delta_1,\Delta_2)X_{mn}(\Delta_3,\Delta_4)r_{mn}}{\Delta-\Delta_{mn}}\langle N-mn|N-mn\rangle\qquad\Delta\to\Delta_{mn}\tag{45}$$

Коэффициенты r_{mn} так же называют нормами логарифмических примарных полей. Последнее соотношение может быть переписано в более удобном виде

$$\mathcal{F}(x,\Delta)\to\sum_{N=0}^{\infty}\frac{X_{mn}(\Delta_1,\Delta_2)X_{mn}(\Delta_3,\Delta_4)r_{mn}}{\Delta-\Delta_{mn}}\mathcal{F}(x,\Delta+mn),\qquad\Delta\to\Delta_{mn}\tag{46}$$

3.5 Вычисление X_{mn}

Используя конформную инвариантность удаётся так же вычислить множители X_{mn} в реккурентном соотношении для конформных блоков (46).

Рассмотрим трёхточечную корреляционну функцию. Как известно, её зависимость от координат фиксируется инвариантностью относительно малой конформной группы

$$\langle\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)\rangle=\frac{C_{123}}{z_{12}^{\Delta_{12}}z_{13}^{\Delta_{13}}z_{23}^{\Delta_{23}}},\tag{47}$$

где C_{123} - некоторая постоянная. Пусть $\Phi_{mn}(z)$ - вырожденное поле. Тогда имеем

$$\langle\Phi_{mn}(z)\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2)\rangle = \frac{C_{mn}}{(z-z_1)^{\Delta_{mn}+\Delta_1-\Delta_2}(z-z_2)^{\Delta_{mn}+\Delta_2-\Delta_1}(z_1-z_2)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{mn}}} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} &\langle D_{mn}\Phi_{mn}(z)\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2)\rangle = & (49)\\ &= \frac{B_{mn}}{(z-z_1)^{\Delta_{mn}+mn+\Delta_1-\Delta_2}(z-z_2)^{\Delta_{mn}+mn+\Delta_2-\Delta_1}(z_{12})^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{mn}-mn}} = \\ &= D_{mn}\langle\Phi_{mn}(z)\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2)\rangle, & (50)\end{aligned}$$

где D_{mn} - по прежнему оператор, действием которого на примарное поле получается вырожденное поле. Поскольку D_{mn} можно представить в виде дифференциального оператора порядка mn, то ясно что

$$B_{mn} = C_{mn}P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2), \tag{51}$$

где $P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)$ является полиномом от λ_1 и λ_2 степени mn. По прежнему λ-параметризация аномальных размерностей определена в(16). Далее воспользуемся следующим фактом

$$\Phi_{mn}\Phi_a = \sum_{\substack{|r|\le m-1\\|s|\le n-1}}[\Phi_{a+\lambda_{rs}}], \qquad r = m-1, m-3..., \qquad s = n-1, n-3... \tag{52}$$

Даноое соотношение является формальной записью того факта, что в операторное разложение полей Φ_{mn} и Φ_a дают вклад только представления, соответствующие примарным полям размерности $\Delta_{a+\lambda_{rs}}$.

Теперь если применить последнее соотношение в уравнении (48), то можно увидеть что из-за ортонормированности двухточечной корреляционной функции при ненулевых C_{mn} необходимо

$$\Delta_1 = \Delta_{\lambda_1} = \Delta_a \tag{53}$$
$$\Delta_2 = \Delta_{\lambda_2} = \Delta_{a+\lambda_{rs}} \tag{54}$$

и следовательно

$$\lambda_1 \pm \lambda_2 = \lambda_{rs} \tag{55}$$

В то же время, поскольку поле Φ_{mn} - вырожденное, то можно положить $D_{mn}\Phi_{mn} = 0$. И следовательно можно считать что $B_{mn} = 0$. Таким образом согласно (51) полином $P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)$ имеет нули при выполнении (55)

$$P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2) = \prod_{r,s}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{rs})(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_{rs}) \tag{56}$$

Теперь опять рассмотрим трёхточечный коррелятор с сингулярным вектором и произведём в нём операторное разложение (положим для удобства $z_1 = 1$, $z_2 = 0$)

$$\langle D_{mn}\Phi_\Delta(z)\Phi_1(1)\Phi_2(0)\rangle = \langle D_{mn}\Phi_\Delta \sum_p C_{12}^p \sum_{N=0}^{\infty} |N\rangle = C_{12}^\Delta \langle D_{mn}\Phi_\Delta|N = mn\rangle \tag{57}$$

С другой стороны

$$\langle D_{mn}\Phi_\Delta(z)\Phi_1(1)\Phi_2(0)\rangle = P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)\langle\Phi_\Delta\Phi_1\Phi_2\rangle = C_{12}^\Delta P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{58}$$

Приравнивая правые части (57) и (58) получаем

$$\langle D_{mn}\Phi_\Delta|N = mn, \Delta\rangle = P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{59}$$

Заменяя здесь $|N = mn, \Delta\rangle$ согласно (30) и используя (44) получаем

$$\frac{X_{mn}\langle\Delta|D_{mn}^+ D_{mn}|\Delta\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}} = X_{mn}r_{mn} = P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{60}$$

откуда находим коэффициенты X_{mn}

$$X_{mn} = \frac{1}{r_{mn}}P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{61}$$

С учётом последнего выражения для X_{mn} вектора цепочки приобретают вид

$$|N = mn, \Delta\rangle \to \frac{P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)D_{mn}|\Delta\rangle}{r_{mn}(\Delta - \Delta_{mn})}, \qquad \Delta \to \Delta_{mn}, \tag{62}$$

а для конформного блока получаем

$$\mathcal{F}(x,\Delta) \to \sum_{N=0}^{\infty} \frac{P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)P_{mn}(\lambda_3,\lambda_4)}{r_{mn}(\Delta - \Delta_{mn})}\mathcal{F}(x,\Delta + mn), \qquad \Delta \to \Delta_{mn} \tag{63}$$

Таким образом, используя конформную симметрию, удаётся найти все полюса конформного блока, как функции аномальной размерности Δ, и почти полностью зафиксировать вычеты в этих полюсах. Единственными неизвестными нам объектами на данный момент являются лишь коэффициенты r_{mn}. Вычисление этих коэффициентов и является нашей главной задачей. Мы вычислим их исходя не из конформной теории поля, а используя так называемое АГТ-соответствие (речь о котором пойдёт ниже) между двумерной конформной теорией поля и четырёхмерной теорией Янга-Миллса.

4 АГТ-соответствие

Относительно недавно была выдвинута гипотеза [1] о соответствии между $2D$ конформной теорией поля и $N=2$ суперсимметричной теорией Янга-Миллса. Она заключается в том, что конформный блок $\mathcal{F}(x,\Delta,\Delta_i)$ может быть выражен через статистическую сумму в $4D$ $N=2$ суперсиммтеричной теории Янга-Миллса. Эта статистическая сумма, после ругуляризации, параметризуемой двумя параметрами ϵ_1, ϵ_2, может быть вычислена точно [4], [5] методом локализации. Гипотеза о таком соответствии впоследствии широко изучалась и была проверена в ряде частных случаев. Мы не будем приводить здесь вычисления этой статистической суммы. Скажем лишь что она вычисляется методом перевала, когда функциональный интеграл высаживается на классические решения с конечным действием, т.е. на инстантоны [6], [7], [8]. Это квазиклассическое вычисление оказывается точным. Здесь мы только выпишем окончательные формулы, через которые выражается четырёхточечный конформный блок.

Как и прежде мы опользуем параметризацию центрального заряда

$$c = 1 + 6Q^2, \qquad Q = \frac{1}{b} + b \tag{64}$$

а так же параметризацию аномальных размерностей

$$\Delta_i = \frac{Q^2}{4} - \lambda_i^2, \qquad \Delta = \frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \tag{65}$$

Конформный блок зависит от шести параметров: проективного инварианта q, четырёх внешних размерностей Δ_i и промежуточной размерности Δ. Соответственно в λ - параметризации имеем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(q, \lambda_i, \lambda) \tag{66}$$

Как и прежде конформный блок выражается через ветора цепочки

$$\mathcal{F}^V(q,\lambda_i,\lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \langle N, \lambda_1, \lambda_2 | N, \lambda_3, \lambda_4 \rangle q^N \tag{67}$$

Конформный блок $\mathcal{F}^V(q,\lambda_i,\lambda)$ отличается от $\mathcal{F}(q,\lambda_i,\lambda)$ отстутствием множителя $q^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}$. Содержание АГТ-соответствия заключается в следующем равенстве

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q,\lambda_1,\lambda_3)\mathcal{F}^V(q,\lambda_i,\lambda) = Z_{inst}^{U(2),N_f=4}(q,\vec{a},\mu_i) \tag{68}$$

где

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q,\lambda_1,\lambda_3,c) = (1-q)^{2(\frac{Q}{2}+\lambda_1)(\frac{Q}{2}-\lambda_3)} \equiv (1-q)^{\beta} \tag{69}$$

а функция $Z_{inst}^{U(2),N_f=4}(q,\vec{a},\mu_i)$ является инстантонной частью статистической суммы, вычисленной в $4D$ $N=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса. При этом подразумевается следующее отождествление параметров

$$\mu_1 \equiv \frac{Q}{2}-(\lambda_1+\lambda_2), \qquad \mu_3 \equiv \frac{Q}{2}-(\lambda_1-\lambda_2)$$
$$\mu_2 \equiv \frac{Q}{2}-(\lambda_3+\lambda_4), \qquad \mu_4 \equiv \frac{Q}{2}-(\lambda_3-\lambda_4) \tag{70}$$

а так же

$$\vec{a}=(a,-a), \qquad a\equiv\lambda \tag{71}$$

Явный вид функции $Z_{inst}^{U(2),N_f=4}(q,\vec{a},\mu_i)$ и другая необходимая информация могут быть найдены в Приложении. Эти функции называются функциями Некрасова.

5 Нормы логарифмических примарных полей

Имея явный вид функций Некрасова, а так же используя АГТ-гипотезу можно, в принципе получить любую информацию о конформном блоке. В частности мы можем найти полюсы конформного блока, посчитать вычеты в них и найти коэффициенты r_{mn} в формуле (63)

Оказывается удобным воспользоваться не самим АГТ-соотношением (68), а его предельным случаем. Это делается для того, чтобы избавиться в обоих частях соотношения (68) от известной части вычетов и оставить только коэффициенты r_{mn}. Для этого мы используем предельный случай $\lambda_1,\lambda_3\to\infty$.

Функция Некрасова $Z_{inst}^{U(2),N_f=4}(q,\vec{a},\mu_i)$ записывается в виде разложения по степеням q

$$Z_{inst}^{U(2),N_f=4}(q,\vec{a},\mu_i)=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{\substack{\vec{Y}\\|\vec{Y}|=N}}\frac{Z_f(\vec{a},\vec{Y},\mu_1)Z_f(\vec{a},\vec{Y},\mu_2)Z_{af}(\vec{a},\vec{Y},\mu_3)Z_{af}(\vec{a},\vec{Y},\mu_4)}{Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y})}q^N \tag{72}$$

где $\vec{Y}=(Y_1,Y_2)$ - пара диаграмм Юнга, а $|\vec{Y}|=|Y_1|+|Y_2|$ полное число клеток в обеих диаграммах Юнга. (Определение входящих сюда функций можно найти в Приложении)

Поэтому разложим так же по степеням q и левую часть (68). Во-первых имеем разложение $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q,\lambda_1,\lambda_3)$

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q,\lambda_1,\lambda_3)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kq^k \tag{73}$$

Где C_k — биномиальные коэффициенты

$$C_k=\frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!} \tag{74}$$

В рассматриваемом пределе $\lambda_1, \lambda_3 \to \infty$ имеем

$$C_k \simeq \frac{\beta^k}{k!} \simeq \frac{(-2)^k}{k!}(\Delta_1\Delta_3)^{k/2}, \qquad \lambda_1, \lambda_3 \to \infty \tag{75}$$

Используя определение конформного блока (67) и разложение $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q, \lambda_1, \lambda_3)$ (73) получим

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}(q, \lambda_1, \lambda_3)\mathcal{F}^{V}(q, \lambda_i, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k q^k \sum_{M=0}^{\infty} \langle M, \lambda_1, \lambda_2 | M, \lambda_3, \lambda_4 \rangle q^M = \sum_{N=0}^{\infty} B_N q^N, \tag{76}$$

где

$$B_N = \sum_{k=0}^{N} C_k \langle N-k, \lambda_1, \lambda_2 | N-k, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \simeq \langle N, \lambda_3, \lambda_4 | N, \lambda_1, \lambda_2 \rangle, \qquad \lambda_1, \lambda_3 \to \infty \tag{77}$$

Приравняем коэффициенты при q^{mn} в обоих частях равенства (68).

$$\langle mn, \lambda_3, \lambda_4 | mn, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \sum_{\substack{\vec{Y} \\ |\vec{Y}|=mn}} \frac{Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4)}{Z_{vec}(\vec{a}, \vec{Y})} \tag{78}$$

В пределе $\lambda_1, \lambda_3 \to \infty$ имеем для левой части

$$\langle mn, \lambda_3, \lambda_4 | mn, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \to \frac{P_{mn}(\lambda_1, \lambda_2) P_{mn}(\lambda_3, \lambda_4)}{r_{mn}(\Delta - \Delta_{mn})} \simeq \underset{\substack{\lambda_1, \lambda_3 \to \infty \\ \Delta \to \Delta_{mn}}}{\frac{(\Delta_1\Delta_3)^{mn}}{r_{mn}(\Delta - \Delta_{mn})}} \tag{79}$$

Для правой части, учитывая что при $\lambda_1, \lambda_3 \to \infty$, согласно отождествлению (70), $\mu_i \to \infty$, а так же что $|\vec{Y}| = mn$

$$Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4) \simeq (\Delta_1\Delta_3)^{mn} \tag{80}$$

Теперь берём предел $\lambda_1, \lambda_3 \to \infty$, $\Delta \to \Delta_{mn}$ в (78) и используем заготовленные соотношения (79) и (80)

$$\frac{1}{r_{mn}(\Delta - \Delta_{mn})} = \sum_{\substack{\vec{Y} \\ |\vec{Y}|=mn}} \frac{1}{Z_{vec}(\vec{a}, \vec{Y})} \qquad ; \qquad \Delta \to \Delta_{mn}, \tag{81}$$

где

$$Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y}) = D(\vec{a},\vec{Y})\overline{D}(\vec{a},\vec{Y}) \tag{82}$$

Для дальнейшего удобства перепишем (81) в терминах λ - параметризации

$$-\frac{1}{2ar_{mn}}\left(\frac{1}{a+\lambda_{mn}} + \frac{1}{a-\lambda_{mn}}\right) = \sum_{\substack{\vec{Y} \\ |\vec{Y}|=mn}} \frac{1}{Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y})} \tag{83}$$

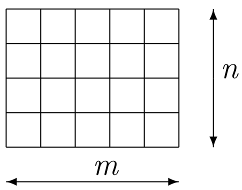
Это равенство надо понимать как равенство сингулярных частей по $a+\lambda_{mn}$ и $a-\lambda_{mn}$ слева с справа.

После некоторых вычислений величины $Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y})$ для малых m и n можно прийти к следующему:

Предложение 1 *Слагаемое* $\frac{1}{a+\lambda_{mn}}$ *в уравнении (83) даётся слагаемым в правой части того же уравнения для пары диаграмм Юнга*

$$\vec{Y}^{+}_{mn} = (Y_{mn}, \varnothing), \tag{84}$$

где Y_{mn} *— прямоугольная диаграмма Юнга размера* $m \times n$.

$Y_{mn} =$  (85)

А слагаемое $\frac{1}{a-\lambda_{mn}}$ *даётся парой диаграмм Юнга*

$$\vec{Y}^{-}_{mn} = (\varnothing, Y_{mn}) \tag{86}$$

Предложение подтверждается непосредственным вычислением. А именно, пользуясь определениями функции $D(\vec{a},\vec{Y})$ имеем (величины, входящие в следующие формулы определяются в Приложении)

$$D(\vec{a},\vec{Y}^{+}_{mn}) = \prod_{s\in Y_{mn}} E(0,Y_{mn},Y_{mn}|s)E(2a,Y_{mn},\varnothing|s) = \tag{87}$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[-bA_{Y_{mn}}(i,j) + b^{-1}(L_{Y_{mn}}(i,j)+1)][2a - bA_{\varnothing}(i,j) + b^{-1}(L_{Y_{mn}}(i,j)+1)] =$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[-b(n-j) + b^{-1}(m-i+1)][2a + bj + b^{-1}(m-i+1)] =$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[-b(n-j) + b^{-1}(m-i+1)][2a + bn + b^{-1}m + b(j-n) - b^{-1}(i-1)]$$

Используя последнее и аналогичное выражение для $\overline{D}(\vec{a},\vec{Y})$ получаем при $a \to -\lambda_{mn}$

$$Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y}^{+}_{mn}) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[-b(n-j)+b^{-1}(m-i+1)][2a+2\lambda_{mn}+b(j-n)-b^{-1}(i-1)]\times$$

$$\times\,[b(1+n-j)+b^{-1}(i-m)][b(1-j+n)+ib^{-1}-2(a+\lambda_{mn})] \simeq \Big|a\to-\lambda_{mn}\Big| \simeq$$

$$\simeq 4\lambda_{mn}(a+\lambda_{mn}) \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} [-b(n-j)+b^{-1}(m-i+1)] \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n\\ (i,j)\neq(1,n)}} [b(j-n)-b^{-1}(i-1)]\times$$

$$\times \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} [b(1+n-j)+b^{-1}(i-m)] \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n\\ (i,j)\neq(m,1)}} [b(1-j+n)+b^{-1}i] =$$

$$= 4\lambda_{mn}(a+\lambda_{mn}) \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1-n\le j\le 0}} (jb+ib^{-1}) \prod_{\substack{1-m\le i\le 0\\ 1-n\le j\le 0\\ (i,j)\neq(0,0)}} [jb+ib^{-1}] \prod_{\substack{1-m\le i\le 0\\ 1\le j\le n}} [jb+ib^{-1}] \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n\\ (i,j)\neq(m,n)}} [jb+ib^{-1}] =$$

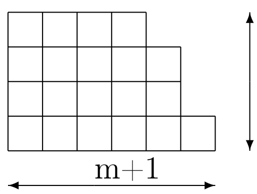
$$= 4\lambda_{mn}(a+\lambda_{mn}) \prod_{\substack{1-m\le i\le m\\ 1-n\le j\le n\\ (i,j)\neq(0,0);(m,n)}} [jb+ib^{-1}]$$

Подставляя последнее в (83) получаем

$$r_{mn} = 2 \prod_{\substack{1-m\le i\le m\\ 1-n\le j\le n\\ (i,j)\neq(0,0);(m,n)}} [jb+ib^{-1}] \tag{88}$$

что совпадает с результатом [11]. Естесственным образом точно такой же результат получается для $\vec{Y}^{-}_{mn}$ и $a \to \lambda_{mn}$.

После этого нам остаётся лишь убедиться, что все остальные пары диаграмм Юнга мощности mn в правой части формулы (83) не дают вклада в полюсную часть конформного блока. Для этого рассмотрим например следующую пару диаграмм Юнга

$\vec{Y} = \Big($  $,\ \varnothing \Big) \equiv (Y_1, Y_2)$ (89)

Полюс может получиться только за счёт множителей $\big[2a-bA_{Y_2}(i,j)+b^{-1}(L_{Y_1}(i,j)+1)\big]$ и $\big[-2a+b(1+A_{Y_2}(i,j))-b^{-1}L_{Y_1}\big]$, так как только они содержат a. Рассмотрим первый из этих множителей. Чтобы он действительно давал полюс при $a=-\lambda_{mn}$ необходимо

$$A_{Y_2}(i,j) = \lambda_i^{Y_2} - j = -n, \tag{90}$$
$$L_{Y_1}(i,j) + 1 = (\lambda')_j^{Y_1} - i + 1 = m, \tag{91}$$

где $(i,j) \in Y_1$, а верхний индекс у λ_i^Y указывает в какой диаграмме нужно считать длину соответствующего столбца или строки. Видим что $\lambda_i^{Y_2}$=0 в силу того, что вторая диаграмма пуста. Поэтому из условия (90) получаем $j = n$. Однако в этом случае $(\lambda')_j^{Y_1} = m - 1$ и ни для каких i условие (91) не может быть выполнено.

Аналогичным образом для всех пар диаграмм, в которых вторая диаграмма пуста, с необходимостью получаем $j = n$, и в силу отсутствия в диаграмме Y_1 клетки (m,n) равенство (91) опять не может быть выполнено.

Похожим образом можно показать и для остальных пар диаграмм, что они не дают вклада в полюсную часть конформного блока.

6 Приложение. Функции Некрасова

Здесь мы дадим необходимые определения, связанные с функциями Некрасова, которые использовались в основном тексте. А именно нам была необходима инстантонная часть функции Некрасова для группы $U(2)$ с четырьмя фундаментальными гипермультиплетами, массы которых $-\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

Пусть $Y = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$ - диаграмма Юнга, где λ_i - высота i-го столбца и равно нулю если i превышает колличество столбцов диаграммы Юнга. Пусть так же $Y^T = (\lambda_1' \geq \lambda_2' \geq \dots)$ -транспонированная диаграмма Юнга. Будем нумеровать клетки диаграммы Юнга индексом $s = (i,j)$, где i, j - координаты клетки. Тогда функция $\phi(a,s)$, "рука"$A_Y(s)$ и "нога"$L_Y(s)$ определены следующим образом

$$\phi(a,s) = a + b(i-1) + b^{-1}(j-1) \tag{92}$$
$$A_Y(s) = \lambda_i - j, \qquad L_Y(s) = \lambda_j' - i \tag{93}$$

Часто встречаются случаи, когда индекс s принадлежит не диаграмме Y, а какой нибудь другой диаграмме. В этом случае величины $A_Y(s)$ и $L_Y(s)$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для пары диаграмм Юнга $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$ и вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ функция E определена следующим образом

$$E(a_i - a_j, Y_i, Y_j|s) = (a_i - a_j) - bA_{Y_j}(s) + b^{-1}(L_{Y_i}(s) + 1) \tag{94}$$

Тогда функции $Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$, $Z_af(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$ и $Z_{vec}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$ определены согласно

$$Z_f(\vec{a},\vec{Y},\mu) = \prod_{i=1}^{2}\prod_{s\in Y_i}(\phi(a_i,s)-\mu+Q) \tag{95}$$

$$Z_{af}(\vec{a},\vec{Y},\mu) = \prod_{i=1}^{2}\prod_{s\in Y_i}(\phi(a_i,s)+\mu) \tag{96}$$

$$Z_{vec}(\vec{a},\vec{Y},\mu) = D(\vec{a},\vec{Y})\overline{D}(\vec{a},\vec{Y}), \tag{97}$$

где

$$D(\vec{a},\vec{Y}) = \prod_{i=1}^{2}\prod_{s\in Y_i} E(a_i-a_j,Y_i,Y_j|s) \tag{98}$$

$$\overline{D}(\vec{a},\vec{Y}) = \prod_{i=1}^{2}\prod_{s\in Y_i}(Q-E(a_i-a_j,Y_i,Y_j|s)) \tag{99}$$

Заметим что в этих определениях мы использовали величины b и Q, которые параметризуют центральный заряд и к теории Янга-Миллса (из которой и получаются приведённые в этом разделе функции) непосредственного отношения не имеют. В четырёхмерной $N=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса имеются величины ϵ_1 и ϵ_2, которые являются параметрами регуляризации статистической суммы. Согласно АГТ-соответствию эти параметры должны быть отождествлены с центральным зарядом следующим образом

$$\epsilon_1 = b, \qquad \epsilon_2 = b^{-1} \tag{100}$$

Таким образом в формулах (93) - (99) мы уже сделали соответствующее отождествление параметров регуляризации и центрального заряда.

Список литературы

[1] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories, Lett. Math. Phys. 91 (2010) 167197, [arXiv:0906.3219]

[2] A.Belavin, A.Polyakov, A.Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl.Phys. B241, 333-380, (1984).

[3] N. Seiberg, E. Witten, Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory, Nucl.Phys.B426:19-52,1994, [hep-th/9407087]

[4] N. A. Nekrasov, Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2004) 831864, [hep-th/0206161]

[5] R.Flume and R.Poghossian, An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential, Int.J.Mod.Phys. A18 (2003) 2541, [hep-th/0208176]

[6] A. Belavin, A. Polyakov, A.Schwartz and Y. Tyupkin, Phys. Lett. B59 (1975) 85.

[7] M.Atiyah, V.Drinfeld, N.Hitchin, Yu.Manin, Construction of instantons, Phys.Lett. A65 (1978) 185.

[8] N.Dorey, T.Hollowood, V.Khoze, M.Mattis, The calculus of many instantons, Phys.Rept. 371 (2002) 231, [hep-th/0206063]

[9] Поляков А.М., Негамильтонов подход в конформной квантовой теории поля, ЖЭТФ, 66 (1974) 23.

[10] А.Б. Замолодчиков, Ал.Б. Замолодчиков, Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах, М.: Издательство МЦНМО 2009.

[11] Al.Zamolodchikov, Higher Equations of Motion in Liouville Field Theory, Int.J.Mod.Phys. A19S2 (2004) 510-523, [arXiv:hep-th/0312279].

[12] Kac V.C. - Lecture Notes in Physics, 1979, v.94, p.441.

[13] Вл.С.Доценко, Конформная теория поля. Применение к статистической физике, Материалы 12 й школы ИТЭФ. М.: Энергоатомиздат, 1985. Вып. 3. С. 90 140.