

Министерство образования и науки РФ  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра проблем теоретической физики

# Эффект динамо в пограничном турбулентном слое

Диплом на соискание степени бакалавра

**Выполнил:**

студент группы 928

Бирюков Владимир Александрович

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук

Лебедев Владимир Валентинович

Москва 2013

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Уравнение на коррелятор магнитных полей</b>	<b>4</b>
2.1	Вывод уравнения . . . . .	4
2.2	Сравнение с уравнениями Казанцева . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Уравнение на коррелятор магнитных полей вблизи поверхности</b>	<b>8</b>
3.1	Вывод уравнений . . . . .	8
3.2	Постановка задачи на $\tilde{M}_{xx}$ . . . . .	9
3.3	Решение задачи на $\tilde{M}_{xx}$ . . . . .	10
3.4	Корреляционная длина магнитного поля . . . . .	11
3.5	Поведение $\tilde{M}_{xx}$ при малых временах . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>13</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>14</b>

# 1 Введение

В работе рассматривается эффект турбулентного динамо - экспоненциальный рост магнитного поля в проводящей жидкости. Магнитное поле рассматривается как пассивное, не воздействующее на поток жидкости. Это верно при относительно небольших величинах магнитных полей и, следовательно, при начальных стадиях возникновения эффекта динамо. Уравнение, описывающее эволюцию магнитного поля в этом случае:

$$\partial_t \vec{B} = -(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{v} + \kappa \nabla^2 \vec{B} \quad (1)$$

где  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  - поле скоростей, которое предполагается дельта-коррелированным по времени:

$$\langle v_i(\vec{r}_1, t_1) v_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = 2\delta(t_1 - t_2) D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (2)$$

Система жидкость и магнитное поле рассматривается вблизи гладкой непроницаемой границы. В главном приближении такую границу можно рассматривать как плоскую. В качестве системы координат выбираем декартову с осью  $z$  направленной перпендикулярно стенке. Предполагаем, что статистика поля скорости однородна во времени и вдоль границы. Следовательно тензор  $D_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  имеет вид:  $D_{ij}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1, z_2)$ . Также считаем поле скорости гладким. Из этого и из несжимаемости жидкости следует то, что  $v_x \propto z$ ;  $v_y \propto z$ , а  $v_z \propto z^2$  (см. [1]). Поэтому можно считать, что:

$$\begin{aligned} D_{xx} &\approx D_{yy} \approx \text{const} z_1 z_2 \\ D_{zz} &\approx \mu z_1^2 z_2^2 \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [1] исследовано поведение пассивного скаляра вблизи границы, при этом было получено, что в уравнении на усредненный вдоль границы пассивный скаляр можно пренебречь молекулярной диффузией на расстояниях от стенки:  $z \gg r_{bl}$ . Где  $r_{bl} = (\kappa/\mu)^{1/4}$  определяет толщину граничного диффузионного слоя. При больших числах Пекле (малом коэффициенте диффузии) толщина этого слоя много меньше толщины граничного слоя, где применимо выражение 3.

В работе исследуется одновременный пространственный коррелятор магнитного поля в жидкости вблизи поверхности. В первой части выводится уравнение на пространственный одновременный коррелятор магнитных полей, считая, что тензор  $D_{ij}$  имеет произвольный вид. Во второй части выводится и решается уравнение на одноточечный усредненный вдоль границы коррелятор магнитных полей и исследуется его поведение при больших и малых временах.

## 2 Уравнение на коррелятор магнитных полей

### 2.1 Вывод уравнения

Уравнение на вектор магнитного поля в проводящей жидкости:

$$\partial_t \vec{B} = -(\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{v} + \kappa \Delta \vec{B} \quad (4)$$

Будем считать, что  $\langle \vec{B} \rangle = 0$ .

Нужно составить уравнение на  $\langle B_\alpha(\vec{r}_1, t) B_\beta(\vec{r}_2, t) \rangle \equiv M_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ . Получим уравнение на  $B_\alpha(\vec{r}_1, t) B_\beta(\vec{r}_2, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(B_{1\alpha} B_{2\beta})}{\partial t} &= B_{1\alpha} \partial_t(B_{2\beta}) + B_{2\beta} \partial_t(B_{1\alpha}) = \\ &= B_{1\alpha} (-v_{2i} \nabla_{2i} B_{2\beta} + \Sigma_{2\beta\rho} B_{2\rho} + \kappa \Delta_2 B_{2\beta}) + B_{2\beta} (-v_{1i} \nabla_{1i} B_{1\alpha} + \Sigma_{1\alpha\xi} B_{1\xi} + \kappa \Delta_1 B_{1\alpha}) = \\ &= B_{1\alpha} \hat{P}_{2\beta\xi} B_{2\xi} + B_{2\beta} \hat{P}_{1\alpha\xi} B_{1\xi} = (\delta_{\beta\rho} \hat{P}_{1\alpha\xi} + \delta_{\alpha\xi} \hat{P}_{2\beta\rho}) B_{1\xi} B_{2\rho} \end{aligned} \quad (5)$$

Числовые индексы обозначают пространственные переменные, от которых зависит величина. Также были введены операторы:

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = \nabla_\beta v_\alpha \quad (6)$$

$$\hat{P}_{\alpha\beta} = \Sigma_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} (v_i \nabla_i + \kappa \Delta) \quad (7)$$

Формальное решение полученного уравнения:

$$B_{1\alpha}(t_2) B_{2\beta}(t_2) = T \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} (\delta_{\beta\rho} \hat{P}_{1\alpha\xi} + \delta_{\alpha\xi} \hat{P}_{2\beta\rho}) dt \right\}_{\alpha\beta\xi\rho} B_{1\xi}(t_1) B_{2\rho}(t_1) \quad (8)$$

Операторы  $\hat{P}_1$  и  $\hat{P}_2$  зависят от разных пространственных координат и, поэтому, коммутируют. Раскладываем экспоненту под знаком T-упорядочивания на произведение двух экспонент и затем раскладываем их в ряд Тейлора до второго порядка. Получаем:

$$\begin{aligned} B_{1\alpha}(t_2) B_{2\beta}(t_2) &= \left( E_{\alpha\xi, \beta\rho} + \delta_{\alpha\xi} \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_{2\beta\rho} dt + \delta_{\beta\rho} \int_{t_1}^{t_2} \hat{P}_{1\alpha\xi} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} T \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \hat{P}_{2\beta\rho'}(t) \hat{P}_{2\rho'\rho}(t') + \frac{1}{2} T \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \hat{P}_{1\alpha\xi'}(t) \hat{P}_{1\xi'\xi}(t') + \right. \\ &\quad \left. + T \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \hat{P}_{1\alpha\xi}(t) \hat{P}_{2\beta\rho}(t') \right) B_{1\xi}(t_1) B_{2\rho}(t_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Усредняем по реализациям поля скорости, считая, что среднее значение скорости равно нулю:  $\langle v_\alpha \rangle = 0$  и коррелятор скоростей короткокоррелирован по времени:  $\langle v_\alpha(\vec{r}_1, t) v_{2\beta}(\vec{r}_2, t') \rangle = 2D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(t - t')$ .

Диффузионные слагаемые в  $\hat{P}$  в уравнении 9 важны только в членах разложения первого порядка.

Отсюда следует, что  $\langle \hat{P}(t)\hat{P}(t') \rangle \propto \delta(t-t')$  и поэтому можно легко применить оператор  $T$ -упорядочивания:

$$T \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \langle \hat{P}(t)\hat{P}(t') \rangle = 1/2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}(t)\hat{P}(t') \rangle$$

Получаем уравнение:

$$\begin{aligned} B_{1\alpha}(t_2)B_{2\beta}(t_2) = & \left( E_{\alpha\xi,\beta\rho} + \delta_{\alpha\xi} \int_{t_1}^{t_2} \langle \hat{P}_{2\beta\rho} \rangle dt + \delta_{\beta\rho} \int_{t_1}^{t_2} \langle \hat{P}_{1\alpha\xi} \rangle dt + \right. \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{2\beta\rho'}(t)\hat{P}_{2\rho'\rho}(t') \rangle + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{1\alpha\xi'}(t)\hat{P}_{1\xi'\xi}(t') \rangle + \\ & \left. + 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{1\alpha\xi}(t)\hat{P}_{2\beta\rho}(t') \rangle \right) B_{1\xi}(t_1)B_{2\rho}(t_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим каждый член уравнения 10 по отдельности:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \hat{P}_{2\beta\rho} \rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle \Sigma_{\beta\rho} + \delta_{\beta\rho}(v_i \nabla_i + \kappa \Delta) \rangle dt = \kappa(t_2 - t_1) \delta_{\beta\rho} \Delta \quad (11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \hat{P}_{1\alpha\xi} \rangle dt = \kappa(t_2 - t_1) \delta_{\alpha\xi} \Delta \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{1\alpha\xi'}(t)\hat{P}_{1\xi'\xi}(t') \rangle = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle (\Sigma_{1\alpha\xi'} + \delta_{\alpha\xi'}(-v_i \nabla_{1i} + \kappa \Delta_1))(\Sigma_{1\xi'\xi} + \delta_{\xi'\xi}(-v_j \nabla_{1j} + \kappa \Delta_1)) \rangle = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \left( \langle \Sigma_{1\alpha\xi'} \Sigma_{1\xi'\xi} \rangle - \langle \Sigma_{1\alpha\xi} v_j \rangle \nabla_{1j} - \langle v_i (\nabla_{1i} \Sigma_{1\alpha\xi}) \rangle - \langle v_i \Sigma_{1\alpha\xi} \rangle \nabla_{1i} + \right. \\ & + \delta_{\alpha\xi} \langle v_i (\nabla_{1i} v_j) \rangle \nabla_{1j} + \delta_{\alpha\xi} \langle v_i v_j \rangle \nabla_{1i} \nabla_{1j} + \kappa^2 \delta_{\alpha\xi} \Delta_1^2 \left. \right) = \\ & = (t_2 - t_1) \left( \delta_{\alpha\xi} D_{ij} \nabla_{1i} \nabla_{1j} + \delta_{\alpha\xi} D_{ij}^{(\cdot, i)} - D_{i\alpha}^{(\cdot, \xi)} \nabla_{1i} - D_{\alpha j}^{(\xi, \cdot)} \nabla_{1j} - D_{i\alpha}^{(\cdot, i\xi)} + D_{\alpha\xi'}^{(\xi', \xi)} \right) \Big|_{\vec{r}_1, \vec{r}_1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{2\beta\rho'}(t)\hat{P}_{2\rho'\rho}(t') \rangle = \\ & = (t_2 - t_1) \left( \delta_{\beta\rho} D_{ij} \nabla_{2i} \nabla_{2j} + \delta_{\beta\rho} D_{ij}^{(\cdot, i)} - D_{i\beta}^{(\cdot, \rho)} \nabla_{2i} - D_{\beta j}^{(\rho, \cdot)} \nabla_{2j} - D_{i\beta}^{(\cdot, i\rho)} + D_{\beta\rho'}^{(\rho', \rho)} \right) \Big|_{\vec{r}_2, \vec{r}_2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \langle \hat{P}_{1\alpha\beta}(t)\hat{P}_{2\beta\rho}(t') \rangle = \\ & = (t_2 - t_1) \left( \partial_{1\xi} \partial_{2\rho} D_{\alpha\beta} - \delta_{\beta\rho} (\partial_{1\xi} D_{\alpha j}) \nabla_{2j} - \delta_{\alpha\xi} (\partial_{2\rho} D_{i\beta}) \nabla_{1i} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\rho} D_{ij} \nabla_{1i} \nabla_{2j} \right) \Big|_{\vec{r}_1, \vec{r}_2} \end{aligned} \quad (15)$$

Устремляя  $t_1$  к  $t_2$ , получаем уравнение на корреляционную функцию магнитных полей:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial t} = & \kappa(\Delta_1 + \Delta_2)M_{\alpha\beta} + \\
& + \left( \delta_{\beta\rho} D_{ij} \nabla_{2i} \nabla_{2j} + \delta_{\beta\rho} D_{ij}^{(\cdot, i)} \nabla_{2j} - D_{i\beta}^{(\cdot, \rho)} \nabla_{2i} - D_{\beta j}^{(\rho, \cdot)} \nabla_{2j} - D_{i\beta}^{(\cdot, i\rho)} + D_{\beta\rho}^{(\rho', \rho)} \right) M_{\alpha\rho} + \\
& + \left( \delta_{\alpha\xi} D_{ij} \nabla_{1i} \nabla_{1j} + \delta_{\alpha\xi} D_{ij}^{(\cdot, i)} \nabla_{1j} - D_{i\alpha}^{(\cdot, \xi)} \nabla_{1i} - D_{\alpha j}^{(\xi, \cdot)} \nabla_{1j} - D_{i\alpha}^{(\cdot, i\xi)} + D_{\alpha\xi}^{(\xi', \xi)} \right) M_{\xi\beta} + \\
& + 2 \left( \nabla_{1\xi} \nabla_{2\rho} D_{\alpha\beta} - \delta_{\beta\rho} (\nabla_{1\xi} D_{\alpha j}) \nabla_{2j} - \delta_{\alpha\xi} (\nabla_{2\rho} D_{i\beta}) \nabla_{1i} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\rho} D_{ij} \nabla_{1i} \nabla_{2j} \right) M_{\xi\rho}
\end{aligned} \tag{16}$$

где величины вида  $D_{\alpha\beta}^{(\eta, \cdot)}$  - производные  $D_{\alpha\beta}$  по первому, второму или обоим аргументам. Зависимость от пространственных переменных у  $D_{\alpha\beta}$ : во втором члене -  $(\vec{r}_2, \vec{r}_2)$ , в третьем -  $(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$ , в четвертом -  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ . Можно показать, что действие операторов  $\partial_{1\alpha}$  и  $\partial_{2\beta}$  тождественно обнуляет обе части уравнения. Это согласуется с бездивергентностью магнитного поля. Также это уравнение согласуется с уравнением на пассивный скаляр, полученным в [1].

## 2.2 Сравнение с уравнениями Казанцева

В статье [4] было получено уравнение на величину  $M_{\alpha\beta}$ , аналогичное уравнению 16. Из него следует, что в изотропном случае с функцией  $D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V_0^2 \delta_{\alpha\beta} - D(R^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R_\alpha R_\beta)$  уравнение на  $F(r, t) = M_{\alpha\alpha}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t)$  должно иметь вид:

$$\partial_t F = Dr^2 \partial_r^2 F + 6Dr \partial_r F + 10DF + 2\kappa(\partial_r^2 + (2/r)\partial_r)F \tag{17}$$

Выведем это уравнение из уравнения 16.

Рассмотрим сначала первое слагаемое в правой части. Видно, что в изотропном случае это слагаемое переписывается в виде:  $2\kappa\Delta F = 2\kappa(\partial_r^2 + (2/r)\partial_r)F$

Рассмотрим следующий член в уравнении 16. Слагаемые содержащие первую производную от  $D(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$  равны нулю, так как они пропорциональны  $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_1 = 0$ . Слагаемое содержащее вторую производную от  $D(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$  также равно нулю, так как:

$$D_{\beta\rho}^{(\rho', \cdot)} = D(2R_\beta - 3/2R_\beta - 1/2R_\beta) = 0 \tag{18}$$

Слагаемое не содержащее производных от  $D(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$  преобразуется в:

$$V_0^2 \partial_\xi \partial_\xi F = V_0^2 \nabla^2 F \tag{19}$$

Следующий член даст такое же слагаемое. Рассмотрим последний член в уравнении 16. Его можно переписать в виде:

$$2\nabla_{1\eta} \nabla_{2\gamma} (D_{\alpha\beta} M_{\eta\gamma} - D_{\alpha\gamma} M_{\eta\beta} - D_{\eta\beta} M_{\alpha\gamma} + D_{\eta\gamma} M_{\alpha\beta})$$

Используя изотропность и вид функции  $D(\vec{R})$  раскрываем каждое слагаемое в этом выражении:

$$\begin{aligned}
2\partial_n\partial_k D_{nk} M_{\alpha\alpha} &= 2D_{nk}\partial_n\partial_k F = 2V_0^2\partial_n\partial_n F - 2DR^2\partial_n\partial_n F + DR_n R_k\partial_n\partial_k F = \\
&= 2V_0^2\left(F'' + \frac{2F'}{R}\right) - 2DR^2\left(F'' + \frac{2F'}{R}\right) + DR^2 F'' \\
2M_{nk}\partial_n\partial_k D_{\alpha\alpha} &= -5DM_{nk}\partial_n\partial_k R^2 = -10DM_{nk}\delta_{nk} = -10DF \quad (20) \\
2\partial_n D_{n\alpha}\partial_k M_{\alpha k} &= -2D(2R_k\delta_{n\alpha} + \frac{1}{2}R_n\delta_{\alpha k} - \frac{1}{2}R_\alpha\delta_{nk})\partial_k M_{\alpha k} = DR_n\partial_n F = DRF' \\
2\partial_n D_{\alpha k}\partial_k M_{n\alpha} &= DRF'
\end{aligned}$$

В результате уравнение 16 преобразуется в:

$$\partial_t F = Dr^2\partial_r^2 F + 6Dr\partial_r F + 10DF + 2\kappa(\partial_r^2 + (2/r)\partial_r)F \quad (21)$$

что совпадает с уравнением 17.

### 3 Уравнение на коррелятор магнитных полей вблизи поверхности

#### 3.1 Вывод уравнений

В [2] было показано, что в случае несжимаемой жидкости вблизи ровной поверхности, то есть когда можно предположить однородность и изотропность корреляционной функции скоростей вдоль плоскости, функцию  $D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  можно в первом приближении выбрать в виде:

$$D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} Hz_1z_2 & 0 & 0 \\ 0 & Hz_1z_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu z_1^2 z_2^2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Подставляя  $D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  в 16 получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial t} = \left[ \kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) + \left( 2\kappa + H(z_1 - z_2)^2 \right) (\nabla_x^2 + \nabla_y^2) + \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \right] M_{xx} + 2HM_{zz} + 2H(z_2 - z_1) \nabla_x (M_{xz} - M_{zx}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial t} = \left[ \kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) + \left( 2\kappa + H(z_1 - z_2)^2 \right) (\nabla_x^2 + \nabla_y^2) + \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \right] M_{xy} + 2H(z_2 - z_1) (\nabla_y M_{xz} - \nabla_x M_{zy}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial M_{xz}}{\partial t} = \left[ \kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) + \left( 2\kappa + H(z_1 - z_2)^2 \right) (\nabla_x^2 + \nabla_y^2) + \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \right] M_{xz} + 2\mu z_2 (z_2 - 2z_2^2 \nabla_{2z} - z_1^2 \nabla_{1z}) M_{xz} + 2H(z_2 - z_1) \nabla_x M_{zz} \quad (25)$$

$$\frac{\partial M_{zz}}{\partial t} = \left[ \kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) + \left( 2\kappa + H(z_1 - z_2)^2 \right) (\nabla_x^2 + \nabla_y^2) + \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \right] M_{zz} + 2\mu(z_1^2 + 4z_1z_2 + z_2^2) M_{zz} - 4\mu(z_1 + z_2)(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z}) M_{zz} \quad (26)$$

Чтобы исключить из уравнений диффузию введем усредненный по координатам, параллельным стенке, коррелятор магнитных полей:

$$\tilde{M}_{\alpha\beta}(z_1, z_2, t) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 M_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t), \quad (27)$$

где  $A$  - площадь поверхности, по которой происходит интегрирование.

Из этого определения и уравнений на величины  $M_{\alpha\beta}$  получаем, к примеру, уравнение на  $\tilde{M}_{xx}$ .

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial t} = \kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) \tilde{M}_{xx} + \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 \tilde{M}_{xx} + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \tilde{M}_{xx} + 2H \tilde{M}_{zz} \quad (28)$$

В этом уравнении диффузионный член можно оценить как:  $\kappa(\nabla_{1z}^2 + \nabla_{2z}^2) \approx \kappa/z^2$ , а остальные члены можно оценить как:  $\mu z^2$ . Следовательно, как и в работе [1], можно пренебречь диффузионным членом по сравнению с остальными при  $z \gg r_{bl}$ :

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial t} = \mu(z_1^2 \nabla_{1z} + z_2^2 \nabla_{2z})^2 \tilde{M}_{xx} + 2\mu(z_1^3 \nabla_{1z} + z_2^3 \nabla_{2z}) \tilde{M}_{xx} + 2H \tilde{M}_{zz} \quad (29)$$

Перейдём к одноточечному коррелятору магнитных полей, делая замены:  $z = (z_1 + z_2)/2$  и  $u = z_1 - z_2$  и устремляя  $u$  к нулю. Прodelывая те же операции, что и для  $\tilde{M}_{xx}$ , для  $\tilde{M}_{\alpha\beta}$ , получаем уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial t} = 2H \tilde{M}_{zz} + \mu(z^4 \partial_z^2 + 2z^3 \partial_z) \tilde{M}_{xx} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xy}}{\partial t} = \mu(z^4 \partial_z^2 + 2z^3 \partial_z) \tilde{M}_{xy} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xz}}{\partial t} = \mu(z^4 \partial_z^2 - 2z^3 \partial_z + 2z^2) \tilde{M}_{zz} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}_{zz}}{\partial t} = \mu(z^4 \partial_z^2 - 14z^3 \partial_z + 12z^2) \tilde{M}_{zz} \quad (33)$$

Получим также уравнения на величину:

$$\tilde{N}_{xx}(z_1, z_2, t) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 x^2 M_{xx}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \quad (34)$$

Подставляя  $D_{\alpha\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  в 16, умножая на  $x^2$ , интегрирую по  $x_1, x_2, y_1, y_2$  и проделывая аналогичные операции, что и для  $\tilde{M}_{\alpha\beta}$ , получаем уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{N}_{xx}}{\partial t} = 2H \tilde{N}_{zz} + \mu(z^4 \partial_z^2 + 2z^3 \partial_z) \tilde{N}_{xx} + 4\kappa \tilde{M}_{xx} \quad (35)$$

Это уравнение отличается от уравнения на  $\tilde{M}_{xx}$  слагаемым  $4\kappa \tilde{M}_{xx}$ .

### 3.2 Постановка задачи на $\tilde{M}_{xx}$

Пусть поле в момент времени  $t = 0$  сосредоточено вблизи поверхности в слое размером  $L$ . Начальные условия на  $M_{\alpha\beta}$  должны удовлетворять условиям бездивергентности и стремиться к нулю вблизи границы и на бесконечности. Из этого следует, что начальные условия на величину  $\tilde{M}_{\alpha\beta}$  должны также стремиться к нулю вблизи границы и на бесконечности. Пусть  $\tilde{M}_{\alpha\beta}(t = 0) \equiv f(z)$ , где  $f(z)$  удовлетворяет этим условиям.

Из бездивергентности магнитного поля следует, что  $\int dx dy \partial_z B_z = 0$ . Так как в начальный момент магнитное поле локализовано, то и  $\int dx dy B_z = 0$ . Поэтому  $\tilde{M}_{\alpha\beta}(t = 0) = 0$ . Из 30 следует, что  $\tilde{M}_{\alpha\beta} = 0$  и во все последующие моменты времени.

В итоге задача на  $\tilde{M}_{xx}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial t} &= \mu(z^4 \partial_z^2 + 2z^3 \partial_z) \tilde{M}_{xx} \\ \tilde{M}_{xx}(z, t=0) &= f(z) \\ \tilde{M}_{xx}(z=0, t) &= 0 \\ \tilde{M}_{xx}(z=\infty, t) &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

### 3.3 Решение задачи на $\tilde{M}_{xx}$

Задачу 36 можно легко решить в общем виде, сделав замену:  $z = 1/y$ . Тогда уравнение преобразуется в уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{M}_{xx}}{\partial y^2}\tag{37}$$

Используя функцию Грина этой задачи:  $G(y, y', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left( e^{-(y-y')^2/4\mu t} - e^{-(y+y')^2/4\mu t} \right)$ , получаем решение 36 для произвольной функции начальных условий:

$$\tilde{M}_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-(1/z-y')^2/4\mu t} - e^{-(1/z+y')^2/4\mu t} \right) f(y') dy'\tag{38}$$

Вид распределения величины  $\tilde{M}_{xx}$  в пространстве при разных значениях времени пред-

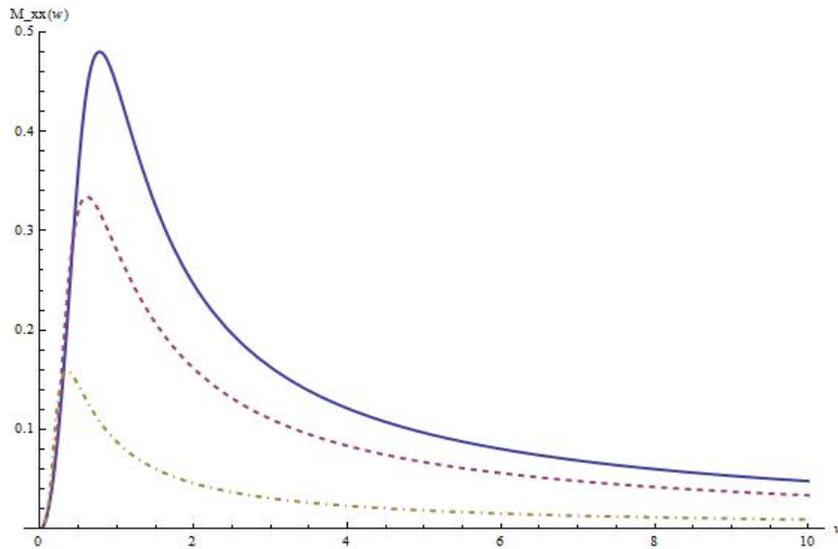


Рис. 1: График зависимости  $\tilde{M}_{xx}(z)$  при временах  $t=0.5$  (сплошная линия),  $t=2$  (пунктирная),  $t=10$  (пунктирная с точкой). Параметр  $\mu$  положен равным единице. Начальные условия выбраны в виде:  $f(z) = z^2 e^{-z^2}$ .

ставлен на рисунке 1.

Видно, что графики зависимости при  $t = 2$  и при  $t = 10$  схожи. Это связано с тем, что  $\tilde{M}_{xx}(z)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к автомодельному решению, которое можно получить из уравнения 38:

$$\tilde{M}_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi} z t^{3/2}} e^{-1/4\mu t z^2} \int_0^\infty y' f(y') dy' \quad (39)$$

Отсюда следует, что при больших  $t$  характерное значение  $z$  зависит от  $t$  как:  $z \propto 1/\sqrt{t}$  (хотя это можно увидеть и из начальных уравнений на  $\tilde{M}_{xx}$ ). Расходимость  $\int_0^\infty dz \tilde{M}_{xx}$  может быть следствием неприменимости выражения для  $D_{\alpha\beta}$  на больших расстояниях от поверхности.

### 3.4 Корреляционная длина магнитного поля

Пусть  $l(z, t)$  - корреляционная длина магнитного поля, т.е. характерная длина, на которой спадает величина  $M_{\alpha\beta}(x, y, z, t)$  в плоскости  $X - Y$ . Предположим, что система эволюционирует так, что значение корреляционной длины магнитного поля одинаково во всех направлениях в плоскости  $X - Y$ . Тогда с помощью  $l(z, t)$  можно выразить энергию магнитного поля через  $\tilde{M}_{\alpha\beta}(z)$ :

$$\int_{-\infty}^\infty dx dy B_x^2 \sim \tilde{M}_{xx}/l^2 \quad (40)$$

и связать величины  $\tilde{M}$  и  $\tilde{N}$ . Например  $\tilde{N}_{xx} = l^2 \tilde{M}_{xx}$ .

Сравнивая члены уравнений 30, 35 и используя связь  $\tilde{M}$  и  $\tilde{N}$  можно оценить величину корреляционной длины магнитного поля:  $l^2 \sim \kappa/(\mu z^2)$ .

Используя асимптотическое поведение  $\tilde{M}_{xx}$  39 и соотношение 40 получим выражение для энергии магнитного поля при больших временах:

$$\int_{-\infty}^\infty dx dy B_x^2 \sim \frac{\mu z}{\kappa t^{3/2}} e^{-1/4\mu t z^2} \quad (41)$$

В итоге получаем, что энергия магнитного поля убывает со временем как  $t^{-3/2}$  во всей области, где применима модель, но линейно возрастает с ростом  $z$ . Такое возрастание приводит к тому, что плотность магнитной энергии на масштабе  $z \sim (\mu t)^{-1/2}$

$$\int_0^{(\mu t)^{-1/2}} dz \int_{-\infty}^\infty dx dy B_x^2 \sim \frac{1}{t^2} \quad (42)$$

убывает быстрее, чем плотность энергии на границе ламинарного подслоя турбулентности:

$$\int_0^L dz \int_{-\infty}^\infty dx dy B_x^2 \sim \frac{1}{t^{3/2}} \quad (43)$$

, где  $L$  - толщина ламинарного слоя.

### 3.5 Поведение $\tilde{M}_{xx}$ при малых временах

Как видно из 39, при больших временах  $M_{xx}$  и энергия магнитного поля не зависят вида начальных условий. Если в начальный момент времени магнитное поле сосредоточено в слое толщины  $h \ll L$ , то на границе ламинарного слоя и турбулентности магнитное поле, равное нулю, начнет возрастать.

Для того, чтобы изучить возрастание магнитного поля в начальный момент времени рассмотрим формулу 38 с заданными начальными условиями, при малых временах, но не слишком малых  $z \gg (\mu t)^{-1/2}$ . Начальные условия на величины  $M_{\alpha\beta}$  должны стремиться к нулю при  $z = 0$ ,  $z \rightarrow \infty$  и удовлетворять условию бездивергентности. Можно выбрать начальные условия для  $M_{\alpha\beta}$  так, чтобы  $\tilde{M}_{xx}(t = 0) = (z/h)e^{-z^2/h^2} \equiv f(1/z)$ . Тогда из 38 получаем при малых  $t$ :

$$\tilde{M}_{xx} \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/z-y)^2/4\mu t} f(y) dy \quad (44)$$

При малых  $t$  интеграл набирается вблизи  $y = 1/z$ . Разложим  $f(y)$  вблизи этой точки:

$$\tilde{M}_{xx} \approx f(1/z) + f''(1/z) \frac{1}{\sqrt{8\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/z-y)^2/4\mu t} (y - 1/z)^2 dy \quad (45)$$

В итоге получим:

$$\tilde{M}_{xx} - f(1/z) \sim f''(1/z)t \quad (46)$$

Так как в нашем случае:  $f''(1/z) = 2z^3/he^{-z^2/h^2}(2z^4/h^4 - 5z^2/h^2 + 1)$ , то при  $2.1h < z < L$   $\tilde{M}_{xx}$  и, как следствие, энергия магнитного поля начнут возрастать. При  $0.7h < z < 2.1h$ , то есть там, где, в основном, сосредоточено магнитное поле в начальный момент, энергия начнет убывать.

Также, используя формулу 38, можно найти поведение энергии магнитного поля при условии  $z \ll (\mu t)^{-1/2}$ . Полагаем, что функция начальных условий  $f(z)$  сосредоточена в слое толщиной  $H$  получаем:

$$E \sim z^2 e^{-3/(16tz^2)} \text{Erfc}\left(\frac{2z/H - 1}{4z\sqrt{t}}\right) \quad (47)$$

## 4 Заключение

В работе были выведены уравнения на коррелятор магнитных полей в проводящей жидкости вблизи поверхности. Получено решение уравнения для усредненного вдоль плоской поверхности коррелятора магнитных полей. Исследовано его поведение при больших и малых временах. При этом использовалась оценка для корреляционной длины магнитного поля и предположение о том, что система эволюционирует так, что значение корреляционной длины магнитного поля одинаково во всех направлениях в плоскости  $X - Y$ .

Из решения следует, что сосредоточенная вблизи границы магнитное поле при малых временах уменьшается в области вблизи границы, но сильно растет на границе ламинарного подслоя турбулентности. При больших временах энергия магнитного поля на единицу поверхности асимптотически стремится к функции  $\frac{\mu z}{\kappa t^{3/2}} e^{-1/4\mu t z^2}$ . Отсюда следует, что на больших временах энергия сосредоточена на границе ламинарного подслоя турбулентности, но убывает  $\propto t^{-3/2}$  во всей области.

В дальнейшем можно провести анализ получаемых уравнений, используя тензор  $D_{\alpha\beta}$  в более общем виде. Можно получить и решить уравнение на коррелятор магнитных полей, а также рассмотреть модель, в которой корреляционная длина не изотропна в плоскости, параллельной поверхности. Также можно проделать численное моделирование поведения неусредненных вдоль плоскости корреляторов  $M_{\alpha\beta}$ .

## Список литературы

- [1] A. Chernykh, V. Lebedev, JETP Vol. 113, No. 2 pp. 352-362 (2011).
- [2] V. Lebedev, K. Turitsyn, Phys. Rev. E **69**, 036301 (2004).
- [3] I. Kolokolov, V. Lebedev, G. Sizov, JETP, Vol 113, No. 2, pp. 339-351 (2011)
- [4] A. Katsantsev, Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968).