

Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Распад состояния со сверхтоком в диффузном SNS-переходе

Диплом на соискание степени бакалавра

Выполнил:

студент 028 группы

Антоненко Д. С.

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., доц.

Скворцов М. А.

Черноголовка, 2014

Содержание

1	Введение	3
1.1	Постановка задачи	3
1.2	План	4
2	Общие замечания	5
3	Туннельный предел	6
4	Короткий SNS-переход: введение	7
4.1	Общие замечания	7
4.2	Формализм матрицы рассеяния и формула Бенаккера	7
5	Нелинейная сигма-модель	9
6	Многозарядное действие	11
6.1	Введение	11
6.2	Расчет эффективной емкости	13
7	Вычисление времени жизни	18
8	Заключение	20
	Приложение А Вывод формулы Бенаккера (11)	21
	Приложение Б Емкостной член в частотном представлении	24
	Приложение В Вклад от членов типа (2b) в выражение для эффективной емкости	25
	Список литературы	28

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим диффузный SNS переход с одинаковыми S-терминалами и идеальной SN-границей ($G_T \rightarrow \infty$). Поперечные размеры N области предполагаются малыми по сравне-

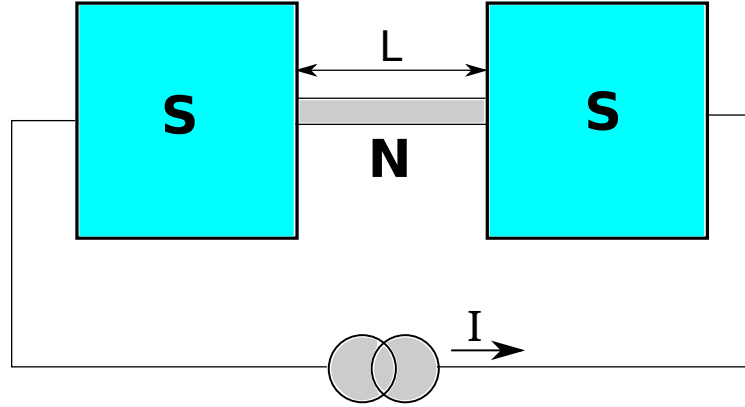


Рис. 1: SNS-переход.

нию с ее длиной, поэтому N-область будем в дальнейшем называть проводом. Через такую систему может течь бездиссипативный джозефсоновский ток с некоторым соотношением ток-фаза, которое в общем случае не является синусоидальным [1]. Пусть максимум на зависимости $I(\chi)$ достигается в точке χ_c , $I_c = I(\chi_c)$ — критический ток ((см. рис. 2).

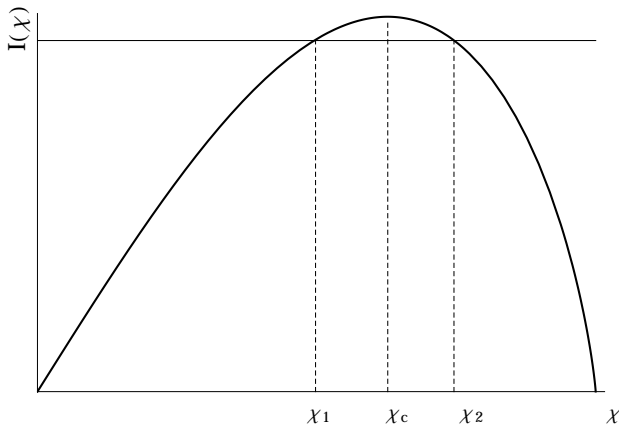


Рис. 2: Зависимость тока от разницы фаз на терминалах.

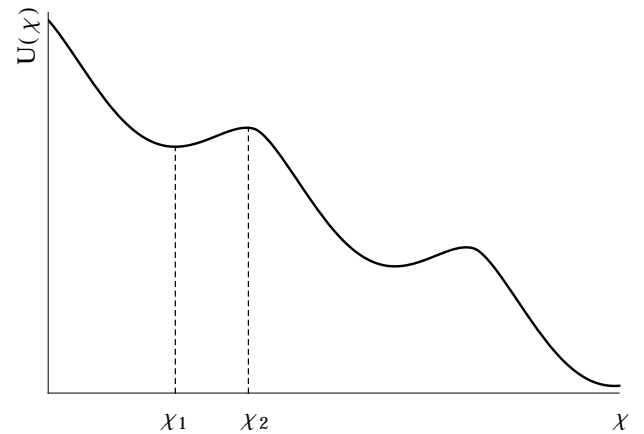


Рис. 3: Зависимость свободной энергии от разницы фаз на терминалах.

Ток определяется дифференцированием свободной энергии $U_0(\chi)$ по χ :

$$I(\chi) = 2e \frac{\partial U_0(\chi)}{\partial \chi}.$$

При рассмотрении задачи при фиксированном токе I необходимо выполнить преобразование Лежандра и рассматривать величину

$$U(\chi) = U_0(\chi) - \frac{1}{2e} I \chi. \quad (1)$$

При этом состояниям равновесия отвечают экстремумы $U(\chi)$.

Подключим SNS переход к источнику тока и установим значение I меньше I_c , но близкое к нему. Напряжения на терминалах отсутствуют. Имеются два значения χ , обеспечивающие заданный ток (см. рис. 2). Меньшей свободной энергией обладает состояние с меньшим значением $\chi = \chi_1$ (см. рис. 3). Это — устойчивое положение равновесия, однако оно является метастабильным и может распадаться благодаря квантовым и/или тепловым флуктуациям. В настоящее время экспериментальным исследованием явлений этого типа занимается группа ученых в г. Хельсинки под руководством Ю. Пекола. Исходной задачей данной работы является определение среднего времени, через которое происходит разрушение этого состояния при $T = 0$.

1.2 План

В разделе 3 обсуждается известная задача о распаде состояния со сверхтоком в джозефсоновском переходе в туннельном пределе. Далее, в разделе 4, рассматривается короткий SNS переход. После общих замечаний обсуждается формализм матрицы рассеяния для описания этой системы, в частности, формула Бенаккера (11), которая позволяет найти соотношение ток-фаза, и, следовательно, свободную энергию перехода. Далее изложение переходит непосредственно к решению вышеставленной задачи. Работа ведется в формализме репличной сигма-модели, краткому описанию которой посвящен раздел 5. В разделе 6 используется многозарядное действие. Из него также можно получить формулу Бенаккера (11), что сделано в Приложении А. Затем производится расчет эффективной емкости перехода. Параллельно находится емкость некоторых других модельных систем, описываемых многозарядным действием. После того, как найдена емкость и свободная энергия, как функция разницы фаз, задача становится эквивалентной известной задаче о туннелировании массивной частицы в потенциале, описываемом многочленом третьей степени (ток близок к критическому!). Это позволяет получить ответ на исходный вопрос, что сделано в разделе 7.

2 Общие замечания

В задаче (здесь система между терминалами не обязательно является N-проводом) имеется макроскопическая квантовая переменная χ . Помимо нее имеется множество электронных степеней свободы. Однако, при $I \rightarrow I_c$, χ является самой медленной переменной задачи, так как потенциал $U(\chi)$ уплощается в этом пределе и характерное мнимое время инстантона, описывающего процесс квантового туннелирования в этом потенциале, неограниченно возрастает. Поэтому электронные степени свободы следует рассматривать в адиабатическом приближении. Избавившись от них тем или иным способом, мы получим эффективное действие на χ . Эффективное действие на χ будет содержать статическую часть и динамическую часть, которая в рассматриваемом пределе будет иметь вид емкостного члена:

$$A = \int d\tau \left(\frac{C}{2(2e)^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 + U(\chi) \right). \quad (2)$$

Расчет этой эффективной емкости и представляет собой главную часть работы. При этом следует помнить, что помимо такого рода эффективной емкости, система может обладать и обычной емкостью C_0 , например, в случае туннельного барьера. После определения полной емкости, задача сводится к обычной квантовомеханической задаче о туннелировании частицы с некоторой массой (определяемой емкостью) в потенциале $U(\chi)$.

Диссипативные члены определяются возбуждением квазичастиц. При низких температурах они подавлены множителем $\exp(-\Delta/T)$ и не играют никакой роли в нашей ситуации. Вопрос об учете диссипативных членов в процессах макроскопического квантового туннелирования был исследован в работе Калдейра и Леггета [5].

Полагается, что после туннелирования из потенциальной ямы, система скатывается вниз (см. рис. 3) не задерживаясь в последующих миниимах потенциала. При этом эффект Джозефсона становится нестационарным, появляется напряжение на терминалах и начинает выделяться тепло. Противное могло бы произойти лишь в случае большой вязкости, что не так в наших условиях.

В данной работе используется система единиц $\hbar = k_B = 1$.

3 Туннельный предел

Задача о распаде состояния со сверхтоком в джозефсоновском туннельном переходе была подробно исследована в работах Ларкина и Овчинникова [6], [7], [8] и в ряде последующих работ тех же авторов. (См. также обзор [9]). В этой работе обозначение величины фазы χ на переходе отличается от обозначения в работах Ларкина и Овчинникова множителем 2.

Свободная энергия джозефсоновского контакта при заданном внешнем токе I равна [3]

$$U(\chi) = -\frac{I}{2e}\chi - \frac{I_c}{2e}\cos\chi. \quad (3)$$

Критический ток при $T = 0$ выражается через кондактанс системы в нормальном состоянии формулой Амбегаокара-Баратова [10]:

$$I_c = \frac{\pi G_N \Delta}{2e}. \quad (4)$$

Пусть переход Джозефсона обладает собственной емкостью C_0 , а вязкость отсутствует.

Если физическая емкость контакта велика, то эффективную емкость электронных степеней свободы можно не учитывать и задача сразу же сводится к задаче о квантовомеханическом туннелировании в потенциале $U(\chi)$ [4].

В противном случае требуется учесть электронные степени свободы. Это было сделано в работе [6], в результате чего было получено эффективное действие на χ в мнимом времени, которое содержит запаздывающий потенциал:

$$\begin{aligned} A[\chi(t)] = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{C_0}{2(2e)^2} \left(\frac{\partial\chi}{\partial\tau} \right)^2 - \frac{I}{2e}\chi(\tau) - \epsilon_0 - \right. \\ & - \frac{\pi G_N}{2e^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \left[F_L(\tau - \tau_1) F_R(\tau - \tau_1) \cos\left[\frac{\chi(\tau) + \chi(\tau_1)}{2} \right] - \right. \\ & \left. \left. - 2g_L(\tau - \tau_1)g_R(\tau - \tau_1) \sin^2\left(\frac{\chi(\tau) - \chi(\tau_1)}{4} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь R_N — сопротивление перехода в нормальном состоянии, g и F — обычная и аномальная мацубаровские функции Грина, индексы L и R обозначают левый и правый сверхпроводники. Энергия ϵ_0 находится из условия того, что энергия в начальном состоянии равна нулю. Это выражение справедливо не только при $I \rightarrow I_c$. Вероятность перехода определяется формулой:

$$W = \int \mathcal{D}\chi(\tau) \exp(-A[\chi(t)]). \quad (6)$$

Вычисляя ее методом перевала, получим

$$W \sim \exp(-A[\chi_{\text{ext}}(t)]). \quad (7)$$

При $I \rightarrow I_c$ имеем следующую перенормировку емкости:

$$= C_0 + \frac{3\pi G_N}{32\Delta}. \quad (8)$$

Экстремальное действие равно

$$A[\chi_{\text{ext}}(t)] = \frac{6}{5} \left(1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right)^{5/4} \left(\frac{2I_c C}{e^3} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

4 Короткий SNS-переход: введение

4.1 Общие замечания

Рассмотрим случай короткого диффузного провода. Это следует понимать следующим образом: $l \ll L \ll \xi$, где l — длина свободного пробега, L — длина провода, а ξ — длина когерентности в сверхпроводнике, $\xi \sim \sqrt{D/\Delta}$ (D — коэффициент диффузии). Условие $L \ll \xi$ эквивалентно $E_T \gg \Delta$, где энергия Таулесса $E_T = D/(L^2)$.

Пусть параметр порядка в правом (левом) терминалах равен $\Delta e^{\pm i\chi}$. Мы решаем задачу в жестких граничных условиях, то есть, пренебрегаем уменьшением модуля параметра порядка в сверхпроводнике вблизи границы с N-областью. Это можно сделать во всяком случае, если все размеры N-области много меньше ξ [15].

Как уже упоминалось, соотношение ток-фаза $I(\chi)$ в общем случае не является синусоидальным. Синусоидальная зависимость восстанавливается только при $T \rightarrow T_c$, либо при $G_T \rightarrow 0$ [1].

4.2 Формализм матрицы рассеяния и формула Бенаккера

Одним из способов работы с мезоскопическими проводящими системами без учета электрон-электронного взаимодействия является формализм матрицы рассеяния [12]. В нем произвольный объект между двумя терминалами описывается, как рассеиватель с некоторой S -матрицей. Обычно задается множество коэффициентов прозрачности каналов T_α . Здесь будет предполагаться, что каналов много и их можно описать непрерывной функцией — распределением прозрачностей $\mathcal{P}(T)$.

Главные транспортные характеристики проводника (такие, как кондактанс, дробовой шум, кондактанс SN-границы) выражаются “линейной статистикой” от T_α (то есть, находятся по формулам вида $\sum_\alpha f(T_\alpha)$).

В частности, кондактанс системы в нормальном состоянии дается формулой Ландауэра [13]:

$$G = G_Q \sum_\alpha T_\alpha, \quad (10)$$

где $G_Q = e^2/(\pi\hbar)$ — квант проводимости.

Как показал Бенаккер [14], в случае короткого провода джозефсоновский ток также выражается линейной статистикой через T_α :

$$I(\chi) = \frac{e\Delta^2}{2} \sin \chi \sum_\alpha \frac{T_\alpha}{\epsilon_\alpha} \operatorname{th} \frac{\epsilon_\alpha}{2T}, \quad (11)$$

$$\epsilon_\alpha = \Delta \sqrt{1 - T_\alpha \sin^2 \chi/2}. \quad (12)$$

Для короткого провода распределение $\mathcal{P}(T)$ известно и называется распределением Дорохова

[11]:

$$\mathcal{P}(T) = \frac{G_N}{2G_Q} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}, \quad (13)$$

где G_N — кондактанс провода в нормальном состоянии.

С использованием формулы Бенаккера получаем при $T = 0$:

$$I(\chi) = \frac{\pi G_N \Delta}{e} \cos \frac{\chi}{2} \operatorname{arctg} \sin \frac{\chi}{2}. \quad (14)$$

Эта зависимость изображена на рис. 4. Численно можно найти критическую разницу фаз и

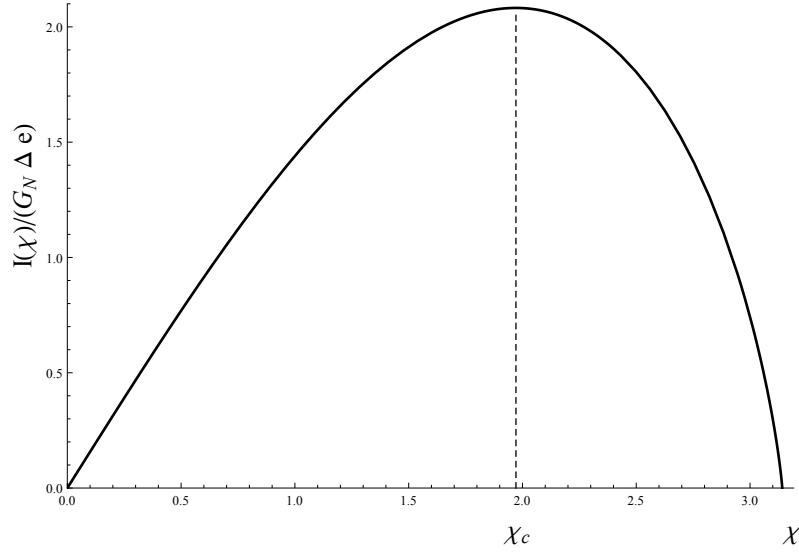


Рис. 4: Зависимость ток-фаза для короткого SNS-перехода при $T = 0$

критический ток:

$$\chi_c = 1.255 \frac{\pi}{2}, \quad (15)$$

$$I_c = 2.082 \frac{G_N \Delta}{e}. \quad (16)$$

Вычислим также вторую производную при $\chi = \chi_c$:

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \chi^2} \right|_{\chi=\chi_c} = 1.706 \frac{G_N \Delta}{e}. \quad (17)$$

Эти величины потребуются в дальнейшем для расчета времени жизни состояния со сверхтоком.

5 Нелинейная сигма-модель

Одним из главных современных способов описания систем с беспорядком являются нелинейные сигма-модели [2]. Известны репличная, суперсимметричная и келдышевская сигма-модели. Для решения поставленной задачи мы будем использовать репличную сигма-модель в мацубаровском мнимом времени [16].

Объемное действие репличной сигма-модели в N -области (там, где $\Delta = 0$) имеет вид [17] :

$$S[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \text{Tr} [D(\nabla Q)^2 - 4\epsilon_1 \tau_3 Q]. \quad (18)$$

здесь $Q = Q(\epsilon_1, \epsilon_2, r)$ — матрица в некотором пространстве, которое в нашем случае (когда не важен спин частицы) есть $\mathcal{N} \otimes \mathcal{R} \otimes \mathcal{E}$, где \mathcal{N} — пространство Намбу-Горькова, \mathcal{R} — репличное пространство, а \mathcal{E} — бесконечномерное пространство мацубаровских частот. При $T = 0$ переменные ϵ_i становятся непрерывными. В любом случае будем писать их в скобках, как аргумент Q , помня про то, что при перемножении и взятии следа подразумевается суммирование, либо интегрирование по энергиям. τ_i — сигма-матрицы в пространстве Намбу (помноженные тензорно на единичную матрицу во всех остальных пространствах).

На матрицу Q наложена нелинейная связь

$$Q^2 = 1. \quad (19)$$

Для Q существует и временное представление: $Q(\tau_1, \tau_2, r)$. Оно связано с обычным преобразование Фурье, в котором знаки выбираются следующим образом:

$$Q(t_1, t_2, r) = \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} Q(\epsilon_1, \epsilon_2, r) e^{-it_1 \epsilon_1 + it_2 \epsilon_2}. \quad (20)$$

В стационарном случае

$$Q(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\pi \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2) Q(\epsilon_1), \quad (21)$$

$$Q(t_1, t_2) = Q(t_1 - t_2), \quad (22)$$

причем $Q(\epsilon)$ и $Q(t)$ связаны обычным преобразование Фурье.

Стационарное решение Q_S для однородного сверхпроводника имеет вид:

$$Q_S(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где φ — сверхпроводящая фаза.

В сделанных приближениях мы будем считать, что Q в терминалах (Q_L и Q_R , соответственно) имеет вышеприведенный вид, и играет роль граничных условий для $Q(r)$ в нормальной области. При этом фазы χ_L и χ_R на левом и правом терминалах остаются динамически переменными. Так как общая фаза произвольна благодаря калибровочной инвариантности, будем использовать переменную $\chi = \chi_R - \chi_L$. Калибровку будем выбирать либо так:

$-\chi_L = \chi_R = \frac{\chi}{2}$, либо так: $\chi_L = 0$, $\chi_R = \chi$. Как уже упоминалось в Разделе 2, χ — главная динамическая переменная нашей задачи.

Отдельно следует обсудить роль репличного пространства в последующих расчетах. Для решения задачи требуется отыскать инстантон и вычислить на нем действие. При этом оказывается, что от репличного пространства можно отвлечься, так как структура инстантона в нем тривиальна. Это так, потому что χ не имеет репличного индекса и все реплики реагируют на нее одинаково.

6 Многозарядное действие

6.1 Введение

Одним из способов избавиться от электронных степеней свободы является функциональное интегрирование по ним.

Короткий провод относится к разряду систем, для которых полученное таким образом эффективное действие имеет достаточно простой вид и называется многозарядным действием [2]. В нашем случае оно имеет вид:

$$S_n = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \text{Tr}(Q_L Q_R)^n. \quad (24)$$

(Отличие множителем 1/2 от выражения в [2] связано с отсутствием у нас келдышевского пространства.)

Коэффициенты γ_n содержат в себе всю информацию об области между терминалами. Они могут быть получены с использованием функциональной ренормгруппы.

При работе с многозарядным действием оказывается очень удобным ввести производящую функцию [2]:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_n \sin(nx). \quad (25)$$

Введем дополнительно и другую производящую функцию, которая потребуется при вычисления эффективной емкости:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_n \cos(nx). \quad (26)$$

Знание набора констант γ_n эквивалентно знанию любой из функций $u(x)$ или $v(x)$.

Связь между методом многозарядного действия и методом матрицы рассеяния дается соотношением [2]:

$$2\pi u(x) = \left\langle \sum_{\alpha} \frac{T_{\alpha} \sin x}{1 - T_{\alpha} \sin^2(x/2)} \right\rangle = \int_0^1 \frac{T \sin x}{1 - T \sin^2(x/2)} \mathcal{P}(T) dT. \quad (27)$$

Эта связь позволяет записать действие в виде

$$S = -\frac{i}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \text{Tr} \ln \left[1 - \frac{T_{\alpha}}{4} (Q_L - Q_R)^2 \right] \right\rangle. \quad (28)$$

Пользуясь выражением (28), можно получить формулу Бенаккера (11) исходя из многозарядного действия. Этот вывод приведен в Приложении 1.

Кондактанс системы в нормальном случае выражается через производную функции $u(x)$ [2]:

$$G_N = 4\pi G_Q u_x(0). \quad (29)$$

Коэффициенты γ_n , производящие функции и другая информация для конкретных систем приведены в таблице 1. Здесь же ограничимся упоминанием о том, что для туннельного перехода все γ_n , кроме первого равны нулю, а для короткого провода функция $u(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадает с линейной функцией.

6.2 Расчет эффективной емкости

Для расчета эффективной емкости системы поступим следующим образом. Запишем общее выражение для действия, в котором будет считаться заданной разнице фаз на терминалах, как функция времени. Далее разложим это действие, пользуясь малостью отклонения χ от χ_c на инстантоне для тока, близкого к критическому. Интересующие нас члены (которые возникают во втором порядке по $\chi - \chi_c$) выражаются формулой (40), содержащей ядро K_n . Емкостной член в действии получится, если разложить $K_n(\epsilon, \omega)$ по ω до второго порядка и проинтегрировать по ϵ . Это разложение справедливо в силу большого мнимого времени инстантона Δt при $I \rightarrow I_c$, которое значительно превосходит все другие характерные времена задачи. Получающиеся при разложении выражения оказываются на удивление громоздкими. Это не позволяет получить ответ в аналитическом виде. Однако можно численно проинтегрировать по ϵ и получить численные коэффициенты в выражениях для эффективных емкостей, что и было произведено в системе Wolfram Mathematica для случая короткого провода и других модельных систем.

Рассмотрим член в действии:

$$S_n = -\pi\gamma_n \text{Tr}(Q_L Q_R)^n. \quad (30)$$

Фазу на левом терминале будем считать нулевой:

$$Q_L(\epsilon) = Q_S(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Фаза на правом терминале задается функцией $\chi(t)$. В этом случае Q -матрица во временном представлении имеет вид [2]:

$$Q_R(t_1, t_2) = e^{\frac{i\chi(t_1)\tau_z}{2}} Q_S(t_1, t_2) e^{-\frac{i\chi(t_2)\tau_z}{2}}. \quad (32)$$

Пусть

$$\chi_i := \chi(t_i) = \chi_1 + x(t_i). \quad (33)$$

Будем раскладывать действие в ряд по $x(t_i)$, пользуясь их малостью на инстантоне для тока, близкого к критическому:

$$Q_R = U_i V Q_S V^{-1} U_i^{-1}, \quad (34)$$

$$U_i = e^{\frac{i x(t_i) \tau_z}{2}}, \quad (35)$$

$$V = e^{\frac{i \chi_1 \tau_z}{2}}. \quad (36)$$

Действие имеет вид:

$$S_n = -\pi\gamma_n \int dt_1 \dots dt_{2n} \text{tr} [Q_S(t_1, t_2) U_2 V Q_S(t_2, t_3) V^{-1} U_3^{-1} Q_S(t_3, t_4) \dots]. \quad (37)$$

Рассмотрим члены второго порядка по $x(t_i)$, обозначим их $S_n^{(2)}$.

Величины $x(t_i)$ входят в U_i и U_i^{-1} . При разложении можно из каждой U_i (U_i^{-1}) “извлечь” либо член $\pm \frac{ix(t_i)\tau_z}{2}$, либо $\frac{1}{2}\left(\frac{ix(t_i)}{2}\right)^2$. Выразим $Q_S(t_i, t_j)$ через энергетическое представление $Q_S(\epsilon)$. Для обозрения членов разложения удобно ввести соответствующие диаграммы (см. рис. 5). Сплошной и пунктирной линиям соответствуют матрицы Q_L и Q_R на некоторых энергиях. Волнистые линии соответствуют “извлечению” членов с $x(t_i)$.

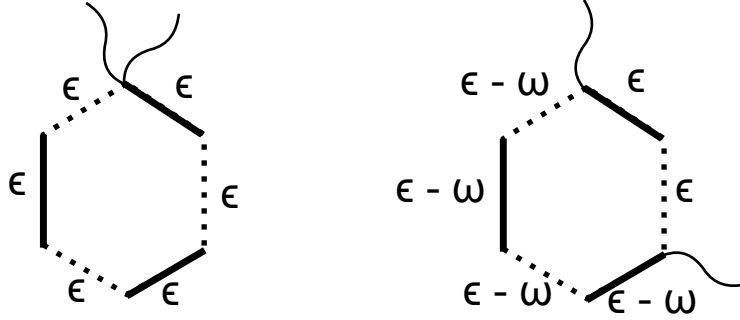


Рис. 5: Примеры диаграмм, соответствующим членам в разложении ($n = 3$).

После несложных алгебраических преобразований, получаем следующие вклады в разложение:

а) Если обе $x(t_i)$ извлечены из одной U .

$$S_n^{(2a)} = \int dt x(t)^2 \int \frac{d\epsilon}{2\pi} A_n(\epsilon), \quad (38)$$

$$A_n(\epsilon) = \pi\gamma_n \frac{1}{8} 2n \operatorname{tr} [Q_S(\epsilon) V Q_S(\epsilon) V^{-1} Q_S(\epsilon) \dots]. \quad (39)$$

б) Если $x(t_i)$ извлечены из разных U . Обозначим через d расстояние на диаграмме между волнистыми линиями (количество Q -матриц между теми U , из которых вынуты x_i). $S_n^{(2b)}$ - сумма диаграмм с четным d , $S_n^{(2c)}$ - сумма диаграмм с нечетным d (такое разделение введено для дальнейшего удобства).

$$S_n^{(2b)} + S_n^{(2c)} = \int dt_1 dt_2 x(t_1)x(t_2) \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t_1-t_2)} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} K_n(\epsilon, \omega), \quad (40)$$

$$K_n(\epsilon, \omega) = \pi\gamma_n \frac{1}{4} \sum_{d=1}^{2n-1} \frac{2n}{2} (-1)^d \operatorname{tr} [\tau_z Q_S(\epsilon) V Q_S(\epsilon) V^{-1} \dots \tau_z Q_S(\epsilon - \omega) V \dots]. \quad (41)$$

Также, как и S_n , разделим K_n на две части K_n^b и K_n^c по четности d в соответствующих диаграммах.

В соответствии с вышесказанным, займемся вычислением K_n . Выполним диагонализацию некоторых выражений:

$$Q_S(\epsilon)VQ_S(\epsilon)V^{-1} = u_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) \end{pmatrix} u_\epsilon, \quad (42)$$

$$VQ_S(\epsilon)V^{-1}Q_S(\epsilon) = \tilde{u}_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon) \end{pmatrix} \tilde{u}_\epsilon, \quad (43)$$

$$\tilde{u}_\epsilon = u_\epsilon \tau_x. \quad (44)$$

Здесь

$$\lambda_{1,2}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos \chi_1 \pm 2i\Delta \sin \frac{\chi_1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}{\epsilon^2 + \Delta^2}. \quad (45)$$

Матрицу u можно выбрать в виде:

$$u(\epsilon) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\chi_1}{2}} \frac{-\Delta \cos \frac{\chi_1}{2} + \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}{\epsilon} & e^{\frac{i\chi_1}{2}} \frac{-\Delta \cos \frac{\chi_1}{2} - \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}{\epsilon} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Обратим внимание на то, что

$$\lambda_1 \lambda_1^* = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (47)$$

Далее будем свободно заменять λ_2 на λ_1^{-1} .

Получим следующие выражения:

Для членов (2a).

$$A_n(\epsilon) = \pi \gamma_n \frac{n}{4} (\lambda_1(\epsilon)^n + \lambda_2(\epsilon)^{-n}). \quad (48)$$

Эти члены не дают вклада в эффективную емкость и не представляют интереса.

Для членов (2b).

Пусть $d = 2k$. Учтем, что следующая за τ_z матрица под знаком следа может оказаться, как Q_S , так и VQ_SV^{-1} .

$$K_n^b(\epsilon) = \pi \frac{n\gamma_n}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \text{tr} \left[\tau_z u_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^k & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon)^k \end{pmatrix} u_\epsilon^{-1} \tau_z u_{\epsilon-\omega} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon-\omega)^{n-k} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon-\omega)^{n-k} \end{pmatrix} u_{\epsilon-\omega}^{-1} + \right. \\ \left. + \tau_z \tilde{u}_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^k & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon)^k \end{pmatrix} \tilde{u}_\epsilon^{-1} \tau_z \tilde{u}_{\epsilon-\omega} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon-\omega)^{n-k} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon-\omega)^{n-k} \end{pmatrix} \tilde{u}_{\epsilon-\omega}^{-1} \right]. \quad (49)$$

Данное выражение можно представить в виде

$$K_n^b(\epsilon, \omega) = \pi \frac{n\gamma_n}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^k & \lambda_2(\epsilon)^k \end{pmatrix} P(\epsilon, \omega) \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon-\omega)^{n-k} \\ \lambda_2(\epsilon-\omega)^{n-k} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где

$$P(\epsilon, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-\epsilon(\epsilon - \omega) + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}} \sqrt{(\epsilon - \omega)^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Выполняя суммирование по k , получим

$$K_n^b(\epsilon, \omega) = \pi \frac{n\gamma_n}{8} P_{ij}(\epsilon, \omega) \frac{\lambda_i(\epsilon)^n \lambda_j(\epsilon - \omega) - \lambda_i(\epsilon) \lambda_j(\epsilon - \omega)^n}{\lambda_i(\epsilon) - \lambda_j(\epsilon - \omega)}. \quad (52)$$

Для членов (2с).

Пусть $d = 2k - 1$.

$$K_n^c(\epsilon, \omega) = -\pi \frac{n\gamma_n}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \text{tr} [\tau_z u_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon)^{k-1} \end{pmatrix} u_\epsilon^{-1} Q_S(\epsilon) \tau_z V Q_S(\epsilon - \omega) V^{-1} u_{\epsilon-\omega} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon - \omega)^{n-k} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon - \omega)^{n-k} \end{pmatrix} u_{\epsilon-\omega}^{-1} + \tau_z V Q_S(\epsilon) V^{-1} u_\epsilon \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon)^{k-1} \end{pmatrix} u_\epsilon^{-1} \tau_z u_{\epsilon-\omega} \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon - \omega)^{n-k} & 0 \\ 0 & \lambda_2(\epsilon - \omega)^{n-k} \end{pmatrix} u_{\epsilon-\omega}^{-1} Q_S(\epsilon - \omega)]. \quad (53)$$

Аналогично (50), представим выражение в виде:

$$K_n^c(\epsilon, \omega) = -\pi \frac{n\gamma_n}{8} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon)^{k-1} & \lambda_2(\epsilon)^{k-1} \end{pmatrix} R(\epsilon, \omega) \begin{pmatrix} \lambda_1(\epsilon - \omega)^{n-k} \\ \lambda_2(\epsilon - \omega)^{n-k} \end{pmatrix} = \frac{n\gamma_n}{8} R_{ij}(\epsilon, \omega) \frac{\lambda_i(\epsilon)^n - \lambda_j(\epsilon - \omega)^n}{\lambda_i(\epsilon) - \lambda_j(\epsilon - \omega)}, \quad (54)$$

где $R(\epsilon, \omega)$:

$$R(\epsilon, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\sigma_0} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R_{\sigma_1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} R_{\sigma_4} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} R_{\sigma_6} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} R_{\sigma_7}, \quad (55)$$

$$R_{\sigma_0} = \frac{-2\epsilon^2(\epsilon - \omega)^2 - \Delta^2(3\epsilon^2 - 3\epsilon\omega + \omega^2) - \Delta^2 \cos \chi_1 (\Delta^2 + \epsilon^2 - \epsilon\omega + \omega^2 + \Delta^2 \cos \chi_1)}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon - \omega)^2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}} \sqrt{(\epsilon - \omega)^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}, \quad (56)$$

$$R_{\sigma_1} = \frac{\epsilon(\epsilon - \omega)(3\Delta^2 + 2\epsilon(\epsilon - \omega) + \Delta^2 \cos \chi_1) + 2\Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2} (\omega^2 + \Delta^2 \cos \chi_1)}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon - \omega)^2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}} \sqrt{(\epsilon - \omega)^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}, \quad (57)$$

$$R_{\sigma_4} = \frac{\epsilon(\epsilon - \omega) - \Delta^2 \cos \chi_1}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon - \omega)^2}}, \quad (58)$$

$$R_{\sigma_6} = \frac{-i\Delta(\Delta^2 + \omega(\omega - \epsilon) + \Delta^2 \cos \chi_1) \sin \frac{\chi_1}{2}}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon - \omega)^2} \sqrt{(\epsilon - \omega)^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}, \quad (59)$$

$$R_{\sigma_7} = \frac{i\Delta(\Delta^2 + \epsilon\omega + \Delta^2 \cos \chi_1) \sin \frac{\chi_1}{2}}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2} \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon - \omega)^2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}. \quad (60)$$

Далее следует разложить полученное выражение по ω до второго порядка. Члены нулевого порядка - это часть статического действия и не требуются для вычисления эфф. емкости. Члены первого порядка оказываются нечетными по ϵ и при интегрировании по ϵ зауляются. Члены второго порядка по ω — это емкостной член в Фурье-представлении (см. Приложение Б). Обозначение C для эффективной емкости введем так, чтобы емкостной член в действии имел вид:

$$\int d\tau \frac{C}{2(2e)^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right)^2. \quad (61)$$

Как уже упоминалось, довести вычисление до ответа можно только с использованием компьютерного численного расчета. Разложение по ω также выполнялось на компьютере. После этого выполнялось суммирование по n с использованием тождеств (116) - (119), позволяющих выразить суммы по n через производящие функции u , v и их производные.

Для демонстрации часть предварительных выкладок (для членов (2b)) приведена в приложении В.

В силу $I \rightarrow I_c$ можно вместо χ_1 использовать значение χ_c . Полученное выражение безразмеривалось, в него подставлялись выражения для $u(x)$, $v(x)$ и χ_c и производилось численное интегрирование по ϵ .

В результате получим для короткого провода следующее значение эффективной емкости:

$$C = 0.589 \frac{G_N}{\Delta}. \quad (62)$$

Аналогичный расчет можно проделать и для других систем, описываемых многозарядным действием. Здесь рассмотрим случай туннельного перехода и сбалансированной квантовой точки. Для туннельного перехода получается известный результат Ларкина-Овчинникова (8).

Соберем данные по этим системам и результаты расчета емкости в таблицу 1, выражая все величины через кондактанс в нормальном состоянии G_N . (Введем также для удобства безразмерный кондактанс в нормальном состоянии $g_N = \frac{G_N}{G_Q}$).

Таблица 1: Эффективные емкости и другие характеристики для некоторых модельных систем.

	$\mathcal{P}(T)$	$u(x)^*$	$v(x)^*$	χ_c	$I_c/(G_N\Delta/e)$	$C/(G_N/\Delta)$
Тун.	$-\dagger$	$\frac{g_N}{4\pi} \sin x$	$\frac{g_N}{4\pi} \cos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{32}$
Кор. Пр.	$\frac{g_N}{2} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}$	$\frac{g_N}{4\pi} x$	$\frac{g_N}{4\pi} \ln(4 \cos^2(x/2))$	$1.255 \frac{\pi}{2}$	2.082	0.589
Кв. Точк.	$\frac{2g_N}{\pi} \frac{1}{\sqrt{T(1-T)}}$	$\frac{g_N}{\pi} tg \frac{x}{4}$	числ. счет	$1.299 \frac{\pi}{2}$	2.186	0.172

*функции $u(x)$ и $v(x)$ задаются на отрезке $[-\pi, \pi]$.

\dagger распределение прозрачностей в туннельном случае не фиксировано. Важно лишь, что все $T_\alpha \ll 1$.

Тун. — туннельный переход,

Кор. Пр. — короткий провод,

Кв. точк. — Сбалансированная квантовая точка.

7 Вычисление времени жизни

Итак, система описывается эффективным действием (2), в котором была найдена эффективная емкость C . Определим теперь время жизни состояния со сверхтоком.

Система эквивалентна массивной частице в потенциале $U(\chi)$. Так как $I \rightarrow I_c$, то можно приблизить потенциал $U(\chi)$ в интересующей нас области кубической параболой. Для этого разложим соотношение ток-фаза $I(\chi)$ близи максимума $\chi = \chi_c$ до второго порядка по $x = \chi - \chi_c$:

$$I(x) = \frac{G_N\Delta}{e} \left(i_c - \frac{b}{2} x^2 \right). \quad (63)$$

Так как $I = 2e \frac{\partial U}{\partial \chi}$, то, с точностью до константы,

$$U(x) = \alpha x - \lambda x^3, \quad (64)$$

$$\alpha = \frac{G_N\Delta}{2e^2} i_c \left(1 - \frac{I}{I_c} \right), \quad (65)$$

$$\lambda = \frac{G_N\Delta b}{2e^2} \frac{1}{6}. \quad (66)$$

Эффективная масса найдется из соотношения $\frac{C}{2(2e)^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2$:

$$m = \frac{C}{4e^2}. \quad (67)$$

Минимум потенциала достигается в точке $x_0 = -\sqrt{\alpha/(3\lambda)}$. Выполним сдвиг $x = x_0 + y$ к этой точке. Потенциал примет вид (константа не важна и поэтому опущена):

$$U(y) = \frac{m\omega^2}{2} y^2 - \lambda y^3, \quad (68)$$

$$\omega \sim b^{1/4} i_c^{1/4} \sqrt{\frac{\Delta G_N}{C}} \left(1 - \frac{I}{I_c} \right)^{1/4}. \quad (69)$$

Решение задачи о времени жизни в таком потенциале в квазиклассическом приближении хорошо известно [18]:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} e^A. \quad (70)$$

Показатель A вычисляется интегрированием по классически недоступной области:

$$A = 2 \int \sqrt{2m \left(\frac{m\omega^2}{2} y^2 - \lambda y^3 \right)} dy = \frac{2}{15} \frac{m^3 \omega^5}{\lambda^2}. \quad (71)$$

В нашей задаче

$$A = \frac{12 \times 2^{3/4}}{5} \frac{i_c^{5/4}}{b^{3/4}} \frac{\sqrt{C\Delta G_N}}{e^2} \left(1 - \frac{I}{I_c}\right)^{5/4}. \quad (72)$$

В туннельном случае $i_c = \pi/2$, $b = \pi/2$ (см. (3), (4)). Подставляя в (72), получим после переобозначений формулу (9).

В случае короткого SNS-перехода, $i_c = 2.082$, $b = 1.706$, $C = 0.589G_N/\Delta$ (см. (15), (17)). Подставив эти числа, получим ответ на поставленную задачу — время распада состояния со сверхтоком в диффузном SNS-переходе при $T = 0$.

$$\tau_0^{(\text{SW})} = \frac{2\pi}{\omega^{(\text{SW})}} e^{A^{(\text{SW})}}, \quad (73)$$

$$\omega^{(\text{SW})} \sim \Delta \left(1 - \frac{I}{I_c}\right)^{1/4}, \quad (74)$$

$$A^{(\text{SW})} = 1.65g_N \left(1 - \frac{I}{I_c}\right)^{5/4}. \quad (75)$$

8 Заключение

В работе была решена поставленная задача об определении времени распада метастабильного состояния со сверхтоком в коротком диффузном SNS-переходе при $T \rightarrow 0$. В ходе решения была рассчитана эффективная емкость системы, нахождение которой является ключевым шагом в определении времени распада. Использованный метод был также применен для вычисления эфф. емкости ряда модельных систем (туннельный переход, сбалансированная квантовая точка). В случае туннельного перехода был воспроизведен результат Ларкина-Овчинникова, полученный другими методами.

В ходе дальнейшей работы планируется решить задачу о длинном проводе с использованием полученных наработок.

Приложение А Вывод формулы Бенаккера (11)

Здесь приводится вывод формулы Бенаккера (11) непосредственно из многозарядного действия. Это сделано в формализме келдышевской сигма-модели [19], в отличие от основной части работы, в которой использовалась репличная сигма-модель.

Воспользуемся формулой (28):

$$S = -\frac{i}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \text{Tr} \ln \left[1 - \frac{T_{\alpha}}{4} (Q_L - Q_R)^2 \right] \right\rangle. \quad (76)$$

Далее суммирование и усреднение по T_n будет подразумеваться. Q -матрицы на терминалах имеют вид:

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_i^R & F(Q_i^R - Q_i^A) \\ 0 & Q_i^A \end{pmatrix}_K = u \begin{pmatrix} Q_i^R & 0 \\ 0 & Q_i^A \end{pmatrix}_K \quad u = u q_i u, \quad (77)$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_K, \quad (78)$$

$$q_i = \begin{pmatrix} Q_i^R & 0 \\ 0 & Q_i^A \end{pmatrix}_K, \quad (79)$$

$$Q_L^{R(A)} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}} \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ -\Delta & -\varepsilon \end{pmatrix}_N, \quad (80)$$

$$Q_R^{R(A)} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}} \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta e^{i\chi} \\ -\Delta e^{-i\chi} & -\varepsilon \end{pmatrix}_N. \quad (81)$$

Эти выражения, совпадающие с квазиклассическими функциями Грина Ларкина-Овчинникова [20], взяты из работы [19]. Здесь нет знака \pm перед выражением, а вместо этого корневые разрезы на комплексной плоскости проведены в бесконечность. Это дает корректное выражение, эквивалентное выражению, которое получается, если поставить \pm , а разрезы замкнуть друг на друге, проведя их через ноль.

Для нахождения тока необходимо ввести квантовую компоненту фазы (антисимметричную относительно верхней и нижней части келдышевского контура). Для этого подставим вместо Q_R [2]

$$\tilde{Q}_R = e^{\frac{i}{2}\sigma_x \tau_z \varphi_2} Q_R e^{-\frac{i}{2}\sigma_x \tau_z \varphi_2}. \quad (82)$$

Ток дается производной действия по квантовой компоненте фазы [2] (после дифференцирования квантовую компоненту фазы нужно приравнять нулю):

$$I = -ie \frac{\partial}{\partial \varphi_2} S = \frac{ie T_n}{16} \text{Tr} \left[\frac{1}{1 - \frac{T_n}{4} (Q_L - Q_R)^2} \{Q_L - Q_R, [\sigma_x \tau_z, Q_R]\} \right]. \quad (83)$$

Подсчитаем

$$Q_L - Q_R = \begin{pmatrix} M^R & 0 \\ 0 & M^A \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$$M^{R(A)} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}} \begin{pmatrix} 0 & \Delta(1 - e^{i\chi}) \\ -\Delta(1 - e^{-i\chi}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

$$(86)$$

$$(Q_L - Q_R)^2 = \begin{pmatrix} (M^R)^2 & 0 \\ 0 & (M^A)^2 \end{pmatrix}, \quad (87)$$

$$(88)$$

$$(M^{R(A)})^2 = \frac{-\Delta^2}{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2} \begin{pmatrix} (1 - e^{i\chi})(1 - e^{-i\chi}) & 0 \\ 0 & (1 - e^{i\chi})(1 - e^{-i\chi}) \end{pmatrix} = \quad (89)$$

$$= \frac{-4\Delta^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Введем обозначение

$$R = \frac{1}{1 - \frac{T_n}{4}(Q_L - Q_R)^2} = \begin{pmatrix} R^R & 0 \\ 0 & R^A \end{pmatrix}, \quad (91)$$

$$R^{R(A)} = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}}. \quad (92)$$

Подставляя $Q_i = uq_i u$ в выражение для тока и пользуясь тем, что $u^2 = 1$, получим:

$$I = \frac{ieT_n}{16} \text{Tr} \left[\frac{1}{1 - \frac{T_n}{4}(Q_L - Q_R)^2} u \{ u(Q_L - Q_R)u, [\sigma_x \tau_z, uQ_R u] \} u \right] = \quad (93)$$

$$= \frac{ieT_n}{16} \text{Tr} [Ru \{ u(Q_L - Q_R)u, [\sigma_x \tau_z, uQ_R u] \} u]. \quad (94)$$

Раскроем коммутаторы и антикоммутаторы, подставим u , возьмем след по пространству Келдыша

$$I = \frac{ieT_n}{16} \text{Tr} [2F(E) (R^R \tau_z [Q_R^R, Q_L^R] - R^A \tau_z [Q_R^A, Q_L^A])], \quad (95)$$

$$\text{Tr}_N [\tau_z Q_L^{R(A)} Q_R^{R(A)}] = \frac{\Delta^2 2i \sin \chi}{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}, \quad (96)$$

$$I = -\frac{eT_n \sin \chi \Delta^2}{2} \left(\int \frac{dE}{2\pi} \frac{F(E)}{T_n \Delta^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} + (\varepsilon + i0)^2 - \Delta^2} - \int \frac{dE}{2\pi} \frac{F(E)}{T_n \Delta^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} + (\varepsilon - i0)^2 - \Delta^2} \right). \quad (97)$$

Полученную разность интегралов можно понимать, как интеграл по контуру, охватывающему действительную ось по часовой стрелки. Тогда интеграл выражается через вычеты в полюсах $\pm \Delta \sqrt{1 - T_n \sin^2 \frac{\chi}{2}}$.

Окончательно:

$$I = \frac{e\Delta^2}{2} \sin \chi \sum_n \frac{T_n}{\varepsilon_n} \operatorname{th} \frac{\varepsilon_n}{2T}, \quad (98)$$

$$\varepsilon_n = \Delta \sqrt{1 - T_n \sin^2 \frac{\chi}{2}}. \quad (99)$$

Приложение Б Емкостной член в частотном представлении

Покажем здесь, как записывается в частотном представлении емкостной член вида:

$$s = \frac{C}{2(2e)^2} \int dt \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2. \quad (100)$$

Преобразование Фурье:

$$x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} x_\omega e^{-i\omega t}, \quad (101)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) x_\omega e^{-i\omega t}. \quad (102)$$

Тогда

$$s = \frac{C}{2(2e)^2} \int dt \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} (-\omega_1 \omega_2) x_{\omega_1} x_{\omega_2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}. \quad (103)$$

Проинтегрировав по t и одной из частот, получим:

$$s = \frac{C}{2(2e)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 x_\omega x_{-\omega}. \quad (104)$$

Если сделать обратное преобразование Фурье, то получим

$$s = \frac{C}{2(2e)^2} \int dt_1 \int dt_2 x(t_1) x(t_2) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \omega^2 e^{-i\omega(t_2 - t_1)}. \quad (105)$$

Выражения именно такого вида мы и извлекаем из разложения многозарядного действия (40).

Приложение В Вклад от членов типа (2b) в выражение для эффективной емкости

В этом приложении демонстрируется вклад членов (2b) (см. формулу (40)) в эффективную емкость системы. Ниже приводятся разложения по ω до второго порядка выражений, фигурирующих в вычислении.

$$P(\epsilon, \omega) = \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{p}_0(\epsilon) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) + p_1(\epsilon) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \omega + p_2(\epsilon) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \omega^2, \quad (106)$$

$$\tilde{p}_0(\epsilon) = -\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}, \quad (107)$$

$$p_1(\epsilon) = \frac{2\Delta^2 \epsilon \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}{(\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})^2} = -\frac{1}{2} \tilde{p}_0(\epsilon)', \quad (108)$$

$$p_2(\epsilon) = \frac{\Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2} (5\epsilon^2 - \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})}{2(\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})^3} = \left(\frac{1}{8} - \frac{\epsilon^2}{4(-3\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})} \right) \tilde{p}_0(\epsilon)''. \quad (109)$$

Разложение для $\lambda(\epsilon - \omega)^l$ ($\lambda = \lambda_1$):

$$\lambda(\epsilon - \omega)^l = \lambda(\epsilon)^l (1 + \lambda_A(\epsilon) l \omega + (\lambda_B(\epsilon) l + \lambda_C(\epsilon) l^2) \omega^2), \quad (110)$$

$$\lambda_A(\epsilon) = -\frac{\lambda(\epsilon)'}{\lambda(\epsilon)} = \frac{2i\Delta e \sin \frac{\chi_1}{2}}{(\Delta^2 + \epsilon^2) \sqrt{\Delta^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2}}}, \quad (111)$$

$$\lambda_B(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\lambda(\epsilon)''}{\lambda(\epsilon)} - \left(\frac{\lambda(\epsilon)'}{\lambda(\epsilon)} \right)^2 = \frac{-\sin \frac{\chi_1}{2} i \Delta (\Delta^4 - \Delta^2 \epsilon^2 - 4\epsilon^4 + \Delta^2 (\Delta - \epsilon) (\Delta + \epsilon) \cos \chi_1)}{2(\Delta^2 + \epsilon^2)^2 (\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})^{3/2}}, \quad (112)$$

$$\lambda_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda(\epsilon)'}{\lambda(\epsilon)} \right)^2 = -2 \frac{\Delta^2 \epsilon^2 \sin \frac{\chi_1}{2}}{(\Delta^2 + \epsilon^2)^2 (\epsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 \frac{\chi_1}{2})}. \quad (113)$$

Разложение $K_n^b(\epsilon)$ до второго порядка.

$$\begin{aligned} K_n^b(\epsilon, \omega)^{(2)} = & -\omega^2 \frac{\pi n \gamma_n}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \left[p_2(\epsilon) \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^k & \lambda(\epsilon)^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^{n-k} \\ \lambda(\epsilon)^{-n+k} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + p_1(\epsilon) \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^k & \lambda(\epsilon)^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^{n-k} \lambda_A(\epsilon) (n-k) \\ \lambda(\epsilon)^{-n+k} \lambda_A(\epsilon) (k-n) \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^k & \lambda(\epsilon)^{-k} \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tilde{p}_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda(\epsilon)^{n-k} (\lambda_B(\epsilon) (n-k) + \lambda_C(\epsilon) (n-k)^2) \\ \lambda(\epsilon)^{-n+k} (\lambda_A(\epsilon) (k-n) + \lambda_C(\epsilon) (k-n)^2) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (114)$$

Выполняя суммирование, подставляя, получим:

$$\begin{aligned} \frac{K_n^b(\epsilon, \omega)^{(2)}}{\pi \gamma_n \omega^2} &= n(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{p_2 \lambda^2 + 1}{8 \lambda^2 - 1} + n^2(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{-p_2}{8} + n(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{p_1}{4} \frac{\lambda \lambda'}{(\lambda^2 - 1)^2} + \\ &+ n^2(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{-p_1}{16} \frac{(\lambda^2 + 1) \lambda'}{(\lambda^2 - 1) \lambda} + n^3(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{p_1}{16} \frac{\lambda'}{\lambda} + n^4(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{-1}{24} \frac{(\lambda')^2}{\lambda^2} + \\ &+ n(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{\tilde{p}_0}{8} \left(\frac{2\lambda^2 \lambda'^2}{(\lambda^2 - 1)^3} - \frac{\lambda \lambda''}{(\lambda^2 - 1)^2} \right) + n^2(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{\tilde{p}_0}{96} \left(\frac{-2\lambda'^2(2\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)^2} + \frac{3\lambda'' \lambda^2 + 1}{\lambda \lambda^2 - 1} \right) + \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} &+ n^3(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{\tilde{p}_0}{32} \left(\frac{2\lambda'^2}{\lambda^2 - 1} - \frac{\lambda''}{\lambda} \right) + n^4(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{-\tilde{p}_0}{48} \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + n^2(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{-1}{48} \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \\ &+ n^3(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda''}{\lambda} \right) + \\ &+ n^2(\lambda^n - \lambda^{-n}) \frac{1}{16} \left(-\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda''}{\lambda} \right) + n^3(\lambda^n + \lambda^{-n}) \frac{1}{16} \frac{\lambda'^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Для нахождения $K^b(\epsilon, \omega)^{(2)}$, нужно просуммировать $K_n^b(\epsilon, \omega)^{(2)}$ по n . Это можно сделать с использованием производящих функций u и v . Каждый член в (115) после суммирования выражается через функции u , v и их производные благодаря нижеприведенным тождествам ($\lambda = e^{i\alpha}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n (\lambda^n - \lambda^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n (e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n \sin n\alpha = 2iu(\alpha), \quad (116)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^2 (\lambda^n + \lambda^{-n}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^2 \cos n\alpha = 2u'(\alpha), \quad (117)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^2 (\lambda^n - \lambda^{-n}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^2 \sin n\alpha = -2iv'(\alpha), \quad (118)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^3 (\lambda^n + \lambda^{-n}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^3 \cos n\alpha = -2v''(\alpha), \quad (119)$$

и так далее для старших производных.

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi \omega^2} K^b(\epsilon, \omega)^{(2)} &= \frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n^b(\epsilon, \omega)^{(2)} = \\ &= u(\alpha) \left[\frac{ip_2 \lambda^2 + 1}{4 \lambda^2 - 1} + \frac{ip_1}{2} \frac{\lambda \lambda'}{(\lambda^2 - 1)^2} + \frac{i\tilde{p}_0}{4} \left(\frac{2\lambda^2 \lambda'^2}{(\lambda^2 - 1)^3} - \frac{\lambda \lambda''}{(\lambda^2 - 1)^2} \right) \right] + \\ &+ u'(\alpha) \left[\frac{-p_2}{4} + \frac{-1}{24} \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \frac{-p_1}{8} \frac{(\lambda^2 + 1) \lambda'}{(\lambda^2 - 1) \lambda} + \frac{\tilde{p}_0}{48} \left(\frac{-2\lambda'^2(2\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)^2} + \frac{3\lambda'' \lambda^2 + 1}{\lambda \lambda^2 - 1} \right) \right] + \quad (120) \\ &+ u''(\alpha) \left[\frac{-ip_1}{8} \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{-i\tilde{p}_0}{16} \left(\frac{2\lambda'^2}{\lambda^2 - 1} - \frac{\lambda''}{\lambda} \right) + \frac{-i}{8} \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda''}{\lambda} \right) \right] + \\ &+ u'''(\alpha) \left[\frac{1}{24} \frac{(\lambda')^2}{\lambda^2} (2 + \tilde{p}_0) \right] + \\ &+ v'(\alpha) \left[\frac{-i}{8} \left(-\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda''}{\lambda} \right) \right] + v''(\alpha) \left[\frac{-1}{8} \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} \right]. \end{aligned}$$

Это выражение, наряду с аналогичным, но более громоздким выражением для $K^c(\epsilon, \omega)^{(2)}$, численно интегрировалось, в результате чего был получен результат (62).

Список литературы

- [1] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov and E. Il'ichev, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 411
- [2] М. А. Скворцов, Докторская диссертация. (Черноголовка, 2008)
- [3] B. D. Josephson, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 216 (1964)
- [4] Ю. М. Иванченко, *Письма в ЖЭТФ.* **6**, 879 (1967)
- [5] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981)
- [6] A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **28**, 6281 (1983)
- [7] А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **85**, 1510 (1983)
- [8] А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **86**, 719 (1984)
- [9] A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, *Quantum Tunneling in Condensed Media*. Edited by Yu. Kagan and A. J. Leggett. - Elsevier Science Publishers B. V. (1992)
- [10] Y. Ambegaokar, A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 386 и **11** 104 (1963)
- [11] O. N. Dorokhov, *Solid State Commun.* **51**, 381 (1984); P. A. Mello, P. Pereyra and N. Kumar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **181**, 290 (1988)
- [12] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997)
- [13] R. Landauer, *IBM Journal of Research and Development*, **1**, 223 (1957)
- [14] C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3836 (1991); C. W. J. Beenakker, *ibid.* *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1442 (1992) (Erratum).
- [15] K. K. Likharev, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 101 (1979)
- [16] A. M. Finkel'stein, *Electron Liquid in Disordered Conductors*, volume 14 of *Soviet Scientific Reviews*, edited by I. M. Khalatnikov (Harwood Academic, London, 1990)
- [17] M. Houzet and M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B* **77**, 024525 (2008)
- [18] В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган “Задачи по квантовой механике” (1992)
- [19] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin, M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B* **61**, 12361 (2000)
- [20] A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, in *Nonequilibrium superconductivity*, edited by D. N. Langenberg and A. I. Larkin (Elsevier, New York, 1986)