Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Дискретный подход к минимальной Лиувиллевской гравитации

студент 128 группы Рудь Юлия

научные руководители
д.ф.-м.н., Белавин А.А
к.ф.-м.н., Белавин В.А

Черноголовка 2015

Содержание

Введение

В настоящей работе исследуется дискретное описание минимальной Лиувиллевской гравитации (МЛГ), базирующееся на структуре Фробениусова многообразия. Конечной целью является построение точного дискретного аналога (q, p) модели МЛГ. Развитое на данный момент дискретное описание, основным предметом которого является подбор коэффициентов резонансного преобразования, не позволяет решить данную задачу для большинства различных серий моделей. Это связано с наличием принципиальных препятствий к обеспечению выполнения правил отбора для трехточечных корреляторов. Несмотря на совпадение результатов вычислений этих корреляторов со значениями, предсказываемыми непрерывным подходом, в так называемой физической области (на множестве ненулевых корреляторов, определяемом правилами отбора), в дополнении, т.е. там, где согласно правилам отбора коррелятор должен быть нулевым, дискретный подход дает ненулевые значения. Исторически, введение дополнительных степеней свободы в дискретный аналог МЛГ посредством резонансных преобразований было введением искусственного инструмента, с помощью которого предполагалось обеспечивать удовлетворение правил отбора для вычисляемых корреляторов на всех уровнях, однако, как оказалось, полностью эта программа осуществима лишь до двухточечных корреляторов включительно. В этой связи возникла гипотеза о существовании описания, которое по своей сути уже содержало бы информацию о правилах отбора и обеспечивало бы их автоматическое выполнение, не прибегая к введению никаких дополнительных степеней свободы. В данной работе рассматривается модификация дискретного описания МЛГ для этих целей на примере серии моделей $(2, p)$, называемой серией Ли–Янга. Новое описание базируется на Фробениусовой алгебре A_{p-1} типа вместо используемой прежде тривиальной A_1 алгебры. С учетом соответствующей модификации струнного действия вычисляются корреляторы до четырехточек включительно без использования резонансных преобразований. Производится сравнение результатов с непрерывным подходом, выявляющее полное согласие. Текст разбит на концептуально-историческую и чисто техническую части. Вначале кратко изложены основные необходимые сведения о непрерывном подходе к двумерной квантовой гравитации, в частности, к МЛГ и общий алгоритм построения дискретного описания (q, p) модели МЛГ с использованием резонансных преобразований. Затем обсуждается возможность модификации соответствующего описания с целью достижения автоматического выполнения правил отбора в вычисляемых корреляторах. Далее излагается стандартный материал, связанный с понятием Фробениусовой алгебры и структуры соответствующего многообразия, приводятся основные технические утверждения, необходимые для дальнейших вычислений. Наконец, производится последовательное вычисление корреляторов, начиная с одноточек, до четырехточек. Полученные нормированные выражения для трехточек и четырехточек сравниваются с результатами непрерывного подхода.

§1. Непрерывный подход к МЛГ

Теория струн, фактически, является попыткой преодолеть трудности, возникающие при квантовании четырехмерной гравитации, путем замены частиц на одномерные объекты (струны), которые, эволюционируя во времени, описывают так называемую мировую поверхность. Как было показано Поляковым [1], такие теории могут быть интерпретированы как теории двумерной квантовой гравитации. В настоящее время существует несколько подходов к их описанию. В непрерывном подходе теория определяется через функциональный интеграл по метрике мировой поверхности с определенной фиксацией калибровки. Выбор конформной калибровки приводит к Лиувиллевской гравитации (ЛГ), которая, в свою очередь, является композицией трех теорией: теории Лиувилля, так называемой системы духов и материального сектора. Материальный сектор определяет ту или иную модель ЛГ. В частности, мы получим простейший пример вообще двумерной квантовой гравитации, называемый МЛГ, если в качестве материального сектора возьмем минимальную (q,p) модель конформной теории поля. Напомним, что минимальные модели КТП параметризуются двумя взаимно простыми числами q и p, и всюду в дальнейшем мы полагаем $q<p$. Одна из основных задач в теории МЛГ – вычисление корреляторов наблюдаемых, являющихся примарными когомологиями БРСТ оператора [2]. Всюду далее речь идет о вычисление корреляторов на сфере. Ввиду интегралов по пространству модулей, задействованных в конструкции определения корреляторов, это вычисление технически является довольно сложным [2, 3]. На настоящий момент явные выражения для корреляторов найдены только до четырехточек включительно [2, 4].

В (q,p) модели МЛГ примарные БРСТ когомологии O_{mn} (физические поля) перечисляются с помощью двух индексов, пробегающих целые значения: $m=1,\dots,q-1$ и $n=1,\dots,p-1$. Независимых среди этих полей только половина ввиду $O_{mn}=O_{q-m,p-n}$. Как впервые было показано в [5], зависимость коррелятора $G=\langle O_{m_1n_1}\dots O_{m_Nn_N}\rangle$ от космологической постоянной имеет следующий вид

$$G(\mu)=\mu^{\frac{p+q}{q}-\sum_{i=1}^{N}\delta_{m_in_i}}G(1)\,, \tag{1.1}$$

где

$$\delta_{mn}=\frac{p+q-|pm-qn|}{2q}\,,\quad O_{mn}\sim\mu^{-\delta_{mn}}\,. \tag{1.2}$$

Совокупность $\{\delta_{mn}\}$ называется спектром гравитационных размерностей физических полей рассматриваемой модели. Основным требованием к любому дуальному подходу является воспроизведение этой масштабной зависимости.

Удобно рассматривать производящую функцию корреляторов

$$Z=\langle\exp\sum_{n}\lambda_{mn}O_{mn}\rangle_{\text{MLG}}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m_i,n_i}\frac{\lambda_{m_1n_1}\dots\lambda_{m_Nn_N}}{N!}\langle O_{m_1n_1}\dots O_{m_Nn_N}\rangle_{\text{MLG}}\,. \tag{1.3}$$

Ее можно интерпретировать как статсумму возмущенной теории, и параметры λ_{mn} часто называют константами взаимодействия Лиувилля. Скобки $\langle\dots\rangle_{\text{MLG}}$ обозначают проинтегрированные корреляционные функции, которые называют корреляционными числами. Как видно из (1.1) и (1.2), производящая функция является квазиоднородной функцией, т.е.

$$Z(\{\rho^{\delta_{mn}}\lambda_{mn}\}) = \rho^{\frac{p+q}{q}} Z(\{\lambda_{mn}\})\,. \tag{1.4}$$

Физические поля O_{mn} находятся во взаимно однозначном соответствии с примарными полями соответствующей минимальной модели КТП. Правила отбора для вычисляемых корреляторов в некотором смысле наследуются из правил отбора для корреляционных функций примарных полей в конформной теории поля: одноточечный коррелятор равен нулю для всех полей за исключением единичного, а двухточечный имеет диагональный вид

$$\langle O_{mn}\rangle = 0\,, \quad \text{если} \quad (m,n) \neq (1,1)\,. \tag{1.5}$$

$$\langle O_{m_1n_1}O_{m_2n_2}\rangle = 0\,, \quad \text{если} \quad (m_1,n_1) \neq (m_2,n_2)\,. \tag{1.6}$$

Для корреляторов более высшего порядка правила отбора следуют из правил слияния или так называемой fusion алгебры.

Мы собираемся работать с серией Ли–Янга, т.е. с серий моделей МЛГ, параметризуемой как $(2,p)$. В данном случае $q=2$, и для перечисления полей достаточно лишь одного индекса: $O_1, \dots O_{p-1}$. Поскольку независимых полей лишь половина, условимся считать $n \leq \frac{p-1}{2}$. Спектр гравитационных размерностей в данном случае, как видно из (1.2), имеет вид

$$\delta_n = \frac{n+1}{2}\,. \tag{1.7}$$

Приведем правила отбора для трехточек и четырехточек этой серии. Для трехточечного коррелятора имеем

$$\begin{gathered}\langle O_{n_1}O_{n_2}O_{n_3}\rangle \neq 0\,, \quad \text{если} \\ n_3 \in [|n_1-n_2|+1:2:n_1+n_2-1] \quad \text{или} \quad p-n_3 \in [|n_1-n_2|+1:2:n_1+n_2-1]\,.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Для четырехточки с упорядочением $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ имеем

$$\begin{gathered}\langle O_{n_1}O_{n_2}O_{n_3}O_{n_4}\rangle \neq 0\,, \quad \text{если} \\ \begin{cases} n_1+n_2+n_3 \geq n_4+2 & \text{для} \quad n_1+n_2+n_3+n_4 \ \text{чет.} \\ n_1+n_2+n_3+n_4 \geq p+2 & \text{для} \quad n_1+n_2+n_3+n_4 \ \text{нечет.} \end{cases}\end{gathered} \tag{1.9}$$

В (1.8), (1.9) и всюду далее $n_i \in [1, \frac{p-1}{2}]$.

В работе [4] было получено нормированное выражение для трехточки, для серии $(2,p)$ оно имеет вид

$$\frac{\langle\langle O_{n_1}O_{n_2}O_{n_3}\rangle\rangle^2}{\prod_{i=1}^3 \langle\langle O_{n_i}^2\rangle\rangle} = \frac{\prod_{i=1}^3 (p-2n_i)}{(p-2)p(p+2)}\theta_{123}\,, \tag{1.10}$$

где θ_{123} символизирует условие выполнения правил отбора, т.е. θ_{123} принимает ненулевое значение, равное 1 в области, определяемой (1.8), а в дополнении к этой области θ_{123} полагается равным 0.

Нормированное выражение для четырехточки получено в работе [2]. Это выражение было вычислено при определенных предположениях, которые выделяют подобласть, в которой оно релевантно, меньшую по сравнению с (1.9). Эта подобласть задается следующим образом (с упорядочением $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$)

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3+n_4 \ \text{чет.}: & n_1+n_4 \le n_2+n_3\,, \\ n_1+n_2+n_3+n_4 \ \text{нечет.}: & -n_1+n_2+n_3+n_4 \ge p\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Легко видеть, что (1.11) действительно является подмножеством (1.9). Итак, нормированное выражение для четырехточки, релевантное в (1.11), имеет вид (для $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$)

$$\frac{\langle\langle O_{n_1}O_{n_2}O_{n_3}O_{n_4}\rangle\rangle}{\sqrt{\prod_{i=1}^4\langle\langle O_{n_i}^2\rangle\rangle}} = \frac{\sqrt{\prod_i(p-2n_i)}}{2(p-2)p(p+2)}\left(\sum_{i=2}^{4}\sum_{t=-(n_1-1)}^{n_1-1}|p-2(n_i-t)| - n_1(p+2n_1)\right)\,. \tag{1.12}$$

Это все, что нам известно из непрерывного подхода на данный момент. Таким образом, точный дискретный аналог $(2,p)$ модели МЛГ должен по крайней мере воспроизводить спектр гравитационных размерностей (1.7), выражение (1.10) для нормированного трехточечного коррелятора и выражение (1.12) для четырехточки в области (1.11).

§2. Дискретный подход к МЛГ

Вычисление корреляционных чисел, определяемых в непрерывном подходе, представляет собой, вообще говоря, весьма трудную задачу, которая относительно недавно решена лишь до четырехточек включительно для общего случая (q,p) модели. В связи с этим долгое время, еще до получения этих конкретных результатов, развивался альтернативный подход к двумерной гравитации в целом и в частности к МЛГ, так называемый дискретный подход. Он исходит из идеи аппроксимации мировой поверхности случайными триангуляциями, и в своей основе содержит формализм, связанный с матричными интегралами, которые, фактически, генерируют соответствующие разбиения (см., например, [6]). Ключевую роль в построении формализма для МЛГ сыграл вывод струнного уравнения Дугласа [7], а затем работа [8], в которой был сформулирован принцип наименьшего действия для этого уравнения. Наконец, после открытия связи со структурой Фробениусова многообразия [9–12] алгоритм построения дискретного описания приобрел достаточно простой, ясный вид. В его основе имеется два базовых элемента. Для конкретной (q,p) модели $(q<p)$ в случае топологии сферы это полином вида

$$Q(y) = y^q + u_1 y^{q-2} + \ldots + u_{q-1}\,, \tag{2.1}$$

где y – это вспомогательная переменная (в §3 мы обсудим, что этот полином задает структуру определенного Фробениусова многообразия и набор $\{u_i\}$ отвечает специальному выбору координат на этом многообразии) и так называемое действие

$$S = \operatorname*{res}_{y=\infty}\left(Q^{\frac{p+q}{q}} + \sum_{m,n}^{pm-qn>0} t_{mn}Q^{\frac{pm-qn}{q}}\right), \tag{2.2}$$

которое определяет производящую функцию корреляторов. Легко видеть, что параметры t_{mn} являются аналогами констант взаимодействия Лиувилля λ_{mn}. Отождествляя t_{11} с μ, нетрудно убедиться, что размерности t_{mn} совпадают с гравитационными размерностями констант λ_{mn}, т.е. с (1.2). Действительно, из $Q^{\frac{p+q}{q}} \sim \mu Q^{\frac{p-q}{q}}$ и $Q^{\frac{p+q}{q}} \sim t_{mn} Q^{\frac{pm-qn}{q}}$ получаем $t_{mn} \sim Q^{\frac{p+q-(pm-qn)}{q}} \sim \mu^{\frac{p+q-(pm-qn)}{2q}} \sim O_{mn}^{-1} \sim \lambda_{mn}$. Таким образом, мы имеем естественное отождествление параметров t_{mn} с константами взаимодействия в непрерывном подходе: $t_{mn} = \lambda_{mn}$. После того, как это совпадение размерностей было показано Дугласом [7], предпринимались попытки установления соответствия между двумя подходами уже на уровне корреляторов. Однако, выполнение правил отбора у вычисляемых корреляторов не наблюдалось, даже у одноточек. Возможное решение этой проблемы впервые было сформулировано в работе [13]. Его идея была основа на том, что МЛГ в своем непрерывном определении содержит неоднозначность, связанную с тем фактом, что корреляторы, определяемые интегралами по пространству модулей, могут иметь вклады от дельта-функционных членов в подынтегральном выражении. В действительности эта информация не содержится в стандартном формализме КТП, базирующимся на понятии операторного разложения, и соответсвующая неоднозначность допускает целый класс преобразований констант λ_{mn} к некоторым другим константам

$$\tilde{\lambda}_{mn} = \lambda_{mn} + \sum_{m_1 n_1 m_2 n_2} A_{mn}^{m_1 n_1, m_2 n_2} \lambda_{m_1 n_1} \lambda_{m_2 n_2} + \dots \,, \tag{2.3}$$

где разрешенными являются только те нелинейные члены, для которых выполняется так называемое резонансное условие

$$\delta_{mn} = \delta_{m_1 n_1} + \dots + \delta_{m_k n_k} \,. \tag{2.4}$$

Формулу (2.3) поэтому также называют резонансным преобразованием. Таким образом, из (2.4) мы видим, что параметры t_{mn} могут быть связаны с константами λ_{mn} также и нелинейным образом. Идея состояла в надлежащем подборе коэффициентов $A_{mn}^{m_1 n_1, \cdots}$ этого преобразования с тем, чтобы обеспечить выполнение правил отбора для вычисляемых корреляторов. В таком духе был проделан ряд работ [9, 12, 14]. Как оказалось, в общем случае этот метод позволяет обеспечить выполнение правил отбора лишь до двухточечных корреляторов включительно. Хотя вычисляемые значения трехточечных корреляторов совпадают с предсказываемыми непрерывным подходом в физической области (на множестве ненулевых корреляторов, определяемом правилами отбора), в нефизической области никакой подбор коэффициентов резонансного преобразования не позволяет полностью занулить имеющиеся там ненулевые корреляторы, полученные в дискретном описании. Это связано с тем, что дополнительные степени свободы, предоставляемые резонансным преобразованием, содержащиеся в так называемых контр-выражениях (интегральных вкладах), которыми можно было бы занулить ненулевой вклад (неинтегральный вклад), не влияют на значения этих выражений. Эти контр-выражения попросту зануляются в силу других причин, а потому от значения подбираемых коэффициентов не зависят. Так была высказана гипотеза, что дискретное описание в сущности не соответствует моделям МЛГ, а отвечает так называемым модифицированным теориям. Дальнейший прогресс в построении дискретного формализма был достигнут после открытия связи со структурой Фробениусова многообразия (ФМ) A_{q-1} типа (см., например, [9]). В частности, для производящей функции было получено следующее представление

$$Z = \frac{1}{2} \int_0^{v_*} C_{\alpha\beta\gamma}(v) \frac{\partial S}{\partial v_\beta} \frac{\partial S}{\partial v_\gamma} dv^\alpha \,, \tag{2.5}$$

где v_α $(\alpha = 1, \ldots, q-1)$ – это плоские координаты на ФМ, а $C_{\alpha\beta\gamma}$ – структурные константы Фробениусовой алгебры A_{q-1} типа, алгебры полиномов от одной переменной над $\mathbb{C}$ по модулю идеала, порожденного производной полинома (2.1). Мы обсудим свойства действия в плоских координатах в §3. Вероятно, наиболее важный ингредиент в (2.5) – это вверхний предел интегрирования v_*, который является специальным решением струнного уравнения

$$\left.\frac{\partial S}{\partial v_\alpha}\right|_{v_*} = 0\,. \tag{2.6}$$

В работе [10] было показано, что только одно из решений струнного уравнения, удовлетворяющее специальному свойству, такому, что $v_{*\alpha}(\lambda_{mn}) = 0$ для $\alpha > 1$ и $\lambda_{mn} = 0$ (за исключением $\lambda_{11} = \mu$), позволит обеспечить выполнение правил отбора. Необходимые выражения для структурных констант были получены в [11].

Все эти результаты сделали вычисления в дискретном подходе ясными и прозрачными. Конструкция, фактически, стала чисто алгебраической. В этом смысле она стала более доступной к эксперименту с ней. Возник естественный вопрос, как можно было бы ее модифицировать с тем, чтобы получить точный дискретный аналог МЛГ. По сути дела, это вопрос о том, возможно ли и как подобрать такую структуру ФМ, которая бы обеспечивала автоматическое выполнение правил отбора вычисляемых корреляторов без использования резонансных преобразований. По крайней мере необходимо сформулировать, в каком отношении эта структура должна находиться с fusion алгеброй, определяющей правила отбора для высших корреляторов, а конечным желаемым результатом является формулировка таких условий, которые бы однозначно определяли вид искомой структуры. Для начала нам кажется естественным попробовать возможную модификацию в простейшем случае – для серии моделей Ли–Янга $(2, p)$. Поскольку $q = 2$, производная полинома (2.1) сводится к $Q' = 2y$, и соответствующая алгебра A_1 типа является одномерной, а потому тривиальной ($\mathbb{C}[y]/(2y) \cong \mathbb{C}$). Согласно предыдущему описанию вся физика содержится в форме резонансного преобразования (2.3). Наша основная гипотеза состоит в том, что размерность релевантной алгебры, которая обеспечивала бы выполнение правил отбора, должна совпадать с размерностью таблицы Каца, т.е. равняться числу всех физических полей модели. Так, для случая серии $(2, p)$ подходящей алгеброй могла бы быть просто алгебра A_{p-1} типа. Однако, возможность описывать $(2, p)$ серии МЛГ A_{p-1} алгеброй еще остается под вопросом, поскольку основное требование к новому описанию – воспроизведение спектра гравитационных размерностей (1.7) обязывает к соответствующей модификации действия. Такая модификация в действительности возможна [15]. Рассмотрим полином и действие следующего вида

$$Q(y) = y^p + u_1 y^{p-2} + \ldots + u_{p-1}\,, \tag{2.7}$$

$$S = \operatorname*{res}_{y=\infty}\left(Q^{1+\frac{2}{p}} + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \lambda_n Q^{\frac{p-2n}{p}}\right). \tag{2.8}$$

Легко видеть, что такой выбор полинома и действия сохраняет спектр (1.7). Действительно, из $Q^{1+\frac{2}{p}} \sim \mu Q^{\frac{p-2}{p}}$ и $Q^{1+\frac{2}{p}} \sim \lambda_n Q^{\frac{p-2n}{p}}$ получаем $\lambda_n \sim Q^{\frac{2+2n}{p}} \sim \mu^{\frac{n+1}{2}} \sim O_n^{-1}$.

Далее остается выяснить, будут ли вычисляемые корреляторы автоматически удовлетворять правилам отбора и совпадать в физической области со значениями, полученными в непрерывном подходе. В следующем параграфе мы изложим основные сведения о понятии структуры ФМ и приведем необходимые утверждения для соответствующих вычислений.

§3. Структура Фробениусова многообразия (ФМ)

Следуя Дубровину [16], введем понятие ФМ.

Опр.1 Пусть A – N-мерная, коммутативная, ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей e. Алгебра A называется *Фробениусовой алгеброй* (ФА), если на A определено невырожденное $\mathbb{C}$-билинейное инвариантное скалярное произведение

$$(ab, c) = (a, bc)\,, \quad a, b, c \in A\,. \tag{3.1}$$

Пусть $e_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, N$ – базис на A такой, что $e_1 = e$. Пусть

$$(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}\,, \tag{3.2}$$

$$e_\alpha e_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma\,. \tag{3.3}$$

Матрица $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяет

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}\,, \quad \det g_{\alpha\beta} \neq 0\,. \tag{3.4}$$

Из $e_\beta = e_1 e_\beta = C^\alpha_{1\beta} e_\alpha$, $C^\alpha_{1\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Условие ассоциативности $(e_\alpha e_\beta) e_\gamma = e_\alpha (e_\beta e_\gamma)$

$$C^\rho_{\alpha\beta} C^\delta_{\rho\gamma} = C^\delta_{\alpha\rho} C^\rho_{\beta\gamma}\,. \tag{3.5}$$

Условие инвариантности $(e_\alpha e_\beta, e_\gamma) = (e_\alpha, e_\beta e_\gamma)$

$$C^\rho_{\alpha\beta} g_{\rho\gamma} = C^\rho_{\beta\gamma} g_{\alpha\rho}\,. \tag{3.6}$$

С учетом коммутативности и $C^\rho_{\alpha\beta} g_{\rho\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma}$ из (3.6) следует, что структурная константа $C_{\alpha\beta\gamma}$ симметрична по любым перестановкам индексов.

Опр.2 *Деформацией* ФА будем называть k-параметрическое семейство $C^\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\,, g_{\alpha\beta}(\upsilon)$, $\upsilon = (\upsilon^1, \ldots, \upsilon^k)$, удовлетворяющее уравнениям (3.4)– (3.6). Опр.2.1 N-параметрическая деформация N-мерной ФА A называется *потенциальной деформацией*, если

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} \equiv 0\,, \quad \partial_\gamma = \frac{\partial}{\partial \upsilon^\gamma}\,, \tag{3.7}$$

и существует потенциальная функция $F(\upsilon)$ такая, что

$$C_{\alpha\beta\gamma}(\upsilon) = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma F(\upsilon)\,. \tag{3.8}$$

Систему дифференциальных уравнений для $F(\upsilon)$, получающуюся при подстановке (3.8) в (3.5), также называют WDVV уравнениями.

Пусть M – пространство (комплексных) параметров $\upsilon = (\upsilon^1, \ldots, \upsilon^N)$ деформации $(C^{\gamma}_{\alpha\beta}(\upsilon), g_{\alpha\beta})$. На пространстве $T_\upsilon M$ введем умножение

$$\partial_\alpha \cdot \partial_\beta\big|_\upsilon = C^{\gamma}_{\alpha\beta}(\upsilon)\partial_\gamma \,. \tag{3.9}$$

Выбрав $\partial = \partial_1$ в качестве единицы, получим структуру коммутативной, ассоциативной алгебры с единицей над кольцом функций $\mathscr{F}(M)$ на M. Метрика $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\upsilon^\alpha d\upsilon^\beta$ определена на M.

Опр.3 Пусть M – N-мерное риманово многообразие с метрикой ds^2 и структурой алгебры с едницей ∂ над $\mathscr{F}(M)$ в пространстве векторных полей

$$(\, X \cdot Y\big|_\upsilon)^k = C^k_{ij}(\upsilon) X^i(\upsilon) Y^j(\upsilon)\,, \tag{3.10}$$

такое, что скалярное произведение ds^2 инвариантно в смысле (3.1). Пусть $\nabla_X Y$ – связность Леви-Чевита для метрики ds^2. Пусть $\tilde{\nabla}$ – ковариатная производная, зависящая от параметра z следующим образом

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + zX \cdot Y \,. \tag{3.11}$$

Тогда M – *Фробениусово многообразие* (ФМ), если $\tilde{\nabla}$ симметрична с нулевой кривизной для любого z, и $\nabla_X \partial = 0$ для любого X.

Любое решение WDVV уравнений задает структуру ФМ. Соответствующие координаты υ^α являются плоскими. Пусть $\theta^\alpha = \theta^\alpha(\upsilon, z)$ – плоские координаты для $\tilde{\nabla}$. Они являются линейно независимыми решениями уравнений

$$\frac{\partial^2 \theta^\lambda}{\partial \upsilon^\alpha \partial \upsilon^\beta}(\upsilon, z) = z C^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta^\lambda}{\partial \upsilon^\gamma}(\upsilon, z)\,. \tag{3.12}$$

Для любого $\alpha = 1, \ldots, N$ координаты, удовлетворяющие (3.12) могут быть формально представлены как

$$\theta^\alpha(\upsilon, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^\alpha_k(\upsilon) z^k\,, \quad \theta^\alpha_0 = \upsilon^\alpha\,. \tag{3.13}$$

Таким образом, имеется следующее рекурсивное соотношение

$$\frac{\partial^2 \theta^\lambda_{k+1}}{\partial \upsilon^\alpha \partial \upsilon^\beta}(\upsilon) = C^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta^\lambda_k}{\partial \upsilon^\gamma}(\upsilon)\,. \tag{3.14}$$

В дальнейшем нам будет удобнее использовать линейные комбинации $\theta^\alpha(\upsilon, z)$

$$\theta_\alpha(\upsilon, z) = g_{\alpha\beta}\theta^\beta(\upsilon, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{\alpha,k}(\upsilon) z^k\,, \quad \theta_{\alpha,k}(\upsilon) = g_{\alpha\beta}\theta^\beta_k(\upsilon)\,. \tag{3.15}$$

Важным для нас примером является реализация структуры ФМ на пространстве полиномов вида

$$M = \{Q(y) = y^p + u_1 y^{p-2} + \ldots + u_{p-1}\}\,, \tag{3.16}$$

коэффициенты в которых рассматриваются как координаты на M. Касательное пространство к M в любое точке может быть отождествлено с пространством полиномов степени, меньшей или равной $p-2$, где касательному вектору в точке $Q(y) \in M$ сопоставляется $\frac{\partial}{\partial u_i}$. Структура алгебры в нем задается как

$$T_{Q(y)}M \cong \mathbb{C}[y]/(Q'(y))\,. \tag{3.17}$$

Это так называемая Фробениусова алгебра A_{p-1} типа. В базисе $e_1, \ldots, e_{p-1}$, где $e_i = y^{p-1-i}$ она выглядит следующим образом

$$e_i e_j = C_{ij}^k e_k \mod Q'\,, \tag{3.18}$$

$$g_{ij} = -\operatorname*{res}_{y=\infty} \frac{e_i e_j}{Q'} dy\,, \quad C_{ijk} = -\operatorname*{res}_{y=\infty} \frac{e_i e_j e_k}{Q'} dy. \tag{3.19}$$

Как уже упоминалось в §2, лишь одно из решений струнного уравнения позволяет обеспечить выполнение правил отбора для корреляторов. В работе [10] было показано, что наиболее простой вид это решение имеет в плоских координатах, а именно $\upsilon_{*\alpha}(\lambda_{mn}) = 0$ для $\alpha > 1$. От координат $\{u_i\}$ к плоским координатам $\{\upsilon^\alpha\}$ можно перейти посредством преобразования

$$y = z - \frac{1}{p}\left(\frac{\upsilon^{p-1}}{z} + \frac{\upsilon^{p-2}}{z^2} + \ldots + \frac{\upsilon^1}{z^{p-1}}\right) + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right)\,, \quad z^p = Q(y)\,. \tag{3.20}$$

Метрика в плоских координатах является постоянной и имеет простой вид $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,p}$. Опускание и поднятие индексов, таким образом, подчиняется правилу $\upsilon^\alpha = \upsilon_{p-\alpha}$. Структурные константы вычисляются следующим образом

$$C_{\alpha\beta\gamma} = -p \operatorname*{res}_{y=\infty} \frac{\frac{\partial Q(y)}{\partial \upsilon^\alpha}\frac{\partial Q(y)}{\partial \upsilon^\beta}\frac{\partial Q(y)}{\partial \upsilon^\gamma}}{Q'(y)} dy\,. \tag{3.21}$$

Выражение для структурной константы известно [10] лишь на оси $\upsilon_{\alpha>1} = 0$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \left(-\frac{\upsilon_1}{p}\right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma-p-1}{2}} \theta(\alpha,\beta,\gamma)\,, \tag{3.22}$$

где $\theta(\alpha,\beta,\gamma) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in [|\beta+\gamma-p|+1 : 2 : p-1-|\beta-\gamma|]$, иначе $\theta(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. Условие на ненулевые компоненты можно также написать в следующем эквивалентном виде

$$\text{для } \alpha \geq \beta \geq \gamma \;\; \theta(\alpha,\beta,\gamma) = 1\,, \text{ если } \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma-p-1}{2} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad \alpha+\beta-\gamma \in [1, p-1]\,. \tag{3.23}$$

Производная $C_{\alpha\beta\gamma}$ на $\upsilon_{\alpha>1} = 0$ выглядит более громоздко

$$\partial_\delta C_{\alpha\beta\gamma} = \theta(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q)\frac{2p-\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2p}\left(-\frac{\upsilon_1}{p}\right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta-2p-2}{2}}\,, \tag{3.24}$$

если $(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2p-2)/2 \in \mathbb{N}_0$, где

$$\theta(\alpha,\beta,\gamma,\delta,p) = (p-m_1)\chi_{1,m_1}(m_2+m_3-m_4) + \frac{2p+m_4-m_1-m_2-m_3}{2} \cdot \chi_{m_1+2,2p-m_1-2}(m_2+m_3-m_4)\,, \tag{3.25}$$

и $m_i = \text{RankedMax}[\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}, i]$.

Действие (2.2) можно рассматривать как функцию на M, причем

$$\theta_{\alpha,k} = \operatorname*{res}_{y=\infty} Q^{k+\frac{\alpha}{p}}(y)\,, \tag{3.26}$$

где $\alpha < p$. В дальнейшем нам будет удобно представить действие в терминах $\theta_{\alpha,k}$ ввиду следующего замечательного свойства этих величин [10]

$$\begin{cases} k \quad \text{чет.}: \quad \frac{\partial\theta_{\lambda,k}}{\partial\upsilon_\alpha} = \delta_{\lambda,\alpha} x_{\lambda,k}\left(-\frac{\upsilon_1}{p}\right)^{\frac{k}{2}p}\,, \\ k \quad \text{нечет.}: \quad \frac{\partial\theta_{\lambda,k}}{\partial\upsilon_\alpha} = \delta_{\lambda,p-\alpha} y_{\lambda,k}\left(-\frac{\upsilon_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{2}p+\lambda}\,, \end{cases} \tag{3.27}$$

где

$$x_{\lambda,k} = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{p}+\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right)!} \quad \text{и} \quad y_{\lambda,k} = -\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{p}+\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{k-1}{2}\right)!}\,. \tag{3.28}$$

§4. Вычисление одноточечных и двухточечных корреляционных чисел

Мы строим точное дискретное описание $(2,p)$ серии моделей МЛГ в сферической топологии. Физические поля нумеруются следующим образом $O_n = O_{p-n}$, $n \in [1, \frac{p-1}{2}]$. Как обсуждалось выше, мы рассматриваем полином $Q(y) = y^p + u_1 y^{p-2} + \ldots + u_{p-1}$ вместо $Q(y) = y^2 + u_1$. Действие с надлежащими скейлинговыми свойствами имеет вид

$$S = \operatorname*{res}_{y=\infty}\left(Q^{1+\frac{2}{p}} + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \lambda_n Q^{\frac{p-2n}{p}}\right)\,. \tag{4.1}$$

В терминах $\theta_{\alpha,k}$, определенных в (3.26),

$$S = \theta_{2,1} + \mu\theta_{p-2,0} + \sum_{n=2}^{\frac{p-1}{2}} \lambda_n \theta_{p-2n,0}\,, \tag{4.2}$$

где $\mu = \lambda_1$. Согласно основной гипотезе об эквивалентности обоих подходов, мы полагаем, что функция (2.5) является производящей функцией корреляторов, т.е. ничем иным как (1.3). Следовательно, вычисление корреляторов сводится к вычислению производных по λ_n от (2.5). Произведем вычисление одноточек. Согласно правилам отбора одноточечные корреляторы всех полей за исключением единичного должны быть нулевыми.

$$Z_1 = \langle O_n\rangle = \int_0^{\upsilon_{*1}} C_{p-1,\alpha,\beta}\frac{\partial S^{(0)}}{\partial\upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(n)}}{\partial\upsilon_\beta}d\upsilon_1\,, \tag{4.3}$$

где $S^{(0)} = \theta_{2,1} + \mu\theta_{p-2,0}$, а $S^{(n)} = \theta_{p-2n,0}$. Как видно из (3.22) и (3.23),

$$C_{p-1,\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{\upsilon_1}{p}\right)^{\alpha-1}\,. \tag{4.4}$$

Согласно (3.27)

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial \upsilon_\alpha} = \delta_{\alpha,p-2}\left(y_{21}\left(\frac{\upsilon_1}{p}\right)^2 + \mu\right)\,, \quad \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \upsilon_\alpha} = \delta_{\alpha,p-2n}\,, \tag{4.5}$$

откуда следует, что $Z_1 = 0$ для $n \neq 1$. Для $n = 1$

$$Z_0 = \langle O_1 \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\upsilon_{*1}} C_{p-1,\alpha,\beta}\frac{\partial S^{(0)}}{\partial \upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(0)}}{\partial \upsilon_\beta}d\upsilon_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\upsilon_{*1}} C_{p-1,p-2,p-2}\left(y_{2,1}\left(\frac{\upsilon_1}{p}\right)^2 + \mu\right)^2 d\upsilon_1\,. \tag{4.6}$$

Подставляя $\mu = -y_{2,1}\left(\frac{\upsilon_{*1}}{p}\right)^2$ и $y_{2,1} = -\frac{p}{2}$, получаем

$$Z_0 = \frac{1}{(p-2)p(p+2)}\frac{{\upsilon_{*1}}^{p+2}}{p^{p+3}}\,. \tag{4.7}$$

Двухточечный коррелятор

$$Z_{12} = \langle O_{n_1} O_{n_2} \rangle = \int_0^{\upsilon_{*1}} C_{p-1,\alpha,\beta}\frac{\partial S^{(n_1)}}{\partial \upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(n_2)}}{\partial \upsilon_\beta}d\upsilon_1 = \delta_{n_1,n_2}\left(-\frac{1}{p}\right)^{p-2n_1-1}\frac{{\upsilon_{*1}}^{p-2n_1}}{p-2n_1}\,. \tag{4.8}$$

Таким образом, двухточечный коррелятор имеет диагональный вид в согласии с правилами отбора.

§5. Вычисление трехточечного коррелятора

В этом параграфе мы произведем вычисление трехточки и сравним полученное нормированное выражение с результатом непрерывного подхода.

$$Z_{123} = \langle O_{n_1} O_{n_2} O_{n_3} \rangle = C_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial \upsilon_*^\gamma}{\partial \lambda_{n_3}}\frac{\partial S^{(n_1)}}{\partial \upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(n_2)}}{\partial \upsilon_\beta} = C_{\gamma,p-2n_1,p-2n_2}\frac{\partial \upsilon_*^\gamma}{\partial \lambda_{n_3}}\,. \tag{5.1}$$

Чтобы получить выражение для $\frac{\partial \upsilon_*^\gamma}{\partial \lambda_{n_3}}$, мы поступим следующим образом. Будем использовать струнное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\frac{\partial S}{\partial \upsilon^\alpha}\bigg|_{\upsilon_*} = 0\,, \quad \alpha = 1, \ldots, p-1\,. \tag{5.2}$$

Подставляя (4.2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\left[\frac{\partial \theta_{2,1}}{\partial \upsilon^\alpha} + \mu\frac{\partial \theta_{p-2,0}}{\partial \upsilon^\alpha} + \sum_{n=2}^{\frac{p-1}{2}}\lambda_n\frac{\partial \theta_{p-2n,0}}{\partial \upsilon^\alpha}\right]\Bigg|_{\upsilon_*} = 0\,, \tag{5.3}$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \upsilon^\alpha \partial \upsilon^\beta}\frac{\partial \upsilon_*^\beta}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial \theta_{p-2k,0}}{\partial \upsilon^\alpha} = 0\,. \tag{5.4}$$

Воспользовавшись (3.14)

$$\frac{\partial^2 \theta_{2,1}}{\partial \upsilon^\alpha \partial \upsilon^\beta} = C^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta_{2,0}}{\partial \upsilon^\gamma} = C_{2\alpha\beta}\,, \tag{5.5}$$

получаем следующее полезное уравнение

$$C_{2\alpha\beta} \frac{\partial \upsilon_*^\beta}{\partial \lambda_k} + \delta_{\alpha,2k} = 0\,. \tag{5.6}$$

Ненулевыми компонентами $C_{2\alpha\beta}$ являются только те, для которых $\alpha + \beta = p \pm 1$, как следует из (3.23). Это свойство позволяет получить выражение для $\frac{\partial \upsilon_*^\beta}{\partial \lambda_k}$ рекуррентным образом. Действительно, рассмотрим (5.6) для $\alpha = 1$ и для $\alpha = p - 1$

$$\frac{\partial \upsilon_*^{p-2}}{\partial \lambda_k} = 0\,, \quad \frac{\partial \upsilon_*^2}{\partial \lambda_k} = \frac{p}{\upsilon_{*1}} \delta_{k,\frac{p-1}{2}}\,. \tag{5.7}$$

Если $\alpha \neq p - 1$ и $\alpha \neq 1$, тогда $\beta = p + 1 - \alpha$ или $\beta = p - 1 - \alpha$, следовательно, (5.6) дает

$$\frac{\partial \upsilon_*^{p+1-\alpha}}{\partial \lambda_k} = \frac{p}{\upsilon_{*1}} \left(\frac{\partial \upsilon_*^{p-1-\alpha}}{\partial \lambda_k} + \delta_{\alpha,2k} \right)\,. \tag{5.8}$$

Рекурсивным вычислением находим, что $\frac{\partial \upsilon_*^\beta}{\partial \lambda_k} = 0$ для нечетного β, а для четного β

$$\frac{\partial \upsilon_*^\beta}{\partial \lambda_k} = \left(\frac{p}{\upsilon_{*1}} \right)^{\frac{\beta+2k+1-p}{2}}\,, \text{ если } \frac{\beta}{2} \geq \frac{p+1}{2} - k\,. \tag{5.9}$$

Подставляя (3.22) и (5.9) в (5.1) и учитывая, что переменная суммирования $\gamma = 2n$, получаем

$$Z_{123} = \left(\frac{\upsilon_{*1}}{p} \right)^{p-1-\sum_{i=1}^3 n_i} \sum_{n=\frac{p+1}{2}-n_3}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2}-n_1-n_2+n} \theta(2n, p-2n_1, p-2n_2)\,. \tag{5.10}$$

Наконец, после несложного вычисления, находим

$$Z_{123} = \left(\frac{\upsilon_{*1}}{p} \right)^{p-1-\sum_{i=1}^3 n_i} \theta_{123}\,, \tag{5.11}$$

где θ_{123} символизирует условие, при котором это выражение не равняется нулю, и которое в точности совпадает с (1.8).

Теперь у нас есть все необходимые ингредиенты, чтобы провести сравнение с непрерывным подходом. Используя (4.7), (4.8) и (5.11), находим нормированное выражение для трехточечного коррелятора

$$\frac{Z_{123}^2 Z_0}{Z_{11} Z_{22} Z_{33}} = \frac{\prod_{i=1}^3 (p - 2n_i)}{(p-2)p(p+2)} \theta_{123}\,. \tag{5.12}$$

Полученное выражение есть в точности результат непрерывного подхода (1.10).

§6. Вычисление четырехточечного коррелятора

В этом параграфе мы произведем вычисление четырехточки и сравним полученное нормированное выражение с результатом непрерывного подхода.

$$Z_{1234}^{disc} = \frac{\partial^2 \upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_{n_3}\partial\lambda_{n_4}} C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial S^{(n_1)}}{\partial\upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(n_2)}}{\partial\upsilon_\beta} + \frac{\partial\upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_{n_3}}\frac{\partial C_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\lambda_{n_4}}\frac{\partial S^{(n_1)}}{\partial\upsilon_\alpha}\frac{\partial S^{(n_2)}}{\partial\upsilon_\beta} =$$
$$= \frac{\partial^2 \upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_{n_3}\partial\lambda_{n_4}} C_{\gamma,p-2n_1,p-2n_2} + \partial_\delta C_{\gamma,p-2n_1,p-2n_2}\frac{\partial\upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_{n_3}}\frac{\partial\upsilon_*^\delta}{\partial\lambda_{n_4}}\,. \tag{6.1}$$

Чтобы получить выражение для $\frac{\partial^2\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$, мы поступим так же, как при вычислении $\frac{\partial\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_k}$. Теперь мы будем дважды дифференцировать струнное уравнение

$$C_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_j\partial\lambda_k} + \partial_\gamma C_{2\alpha\beta}\frac{\partial\upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_j}\frac{\partial\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_k} = 0\,. \tag{6.2}$$

Замечая, что $\partial_\gamma C_{2\alpha\beta} = -\frac{1}{p}\delta_{\alpha+\beta+\gamma,2p}$, и полагая во втором слагаемом $\gamma = 2n, \beta = 2m$,

$$C_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_j\partial\lambda_k} - \frac{1}{p}\left(\frac{p}{\upsilon_{*1}}\right)^{j+k+1-p}\sum_{n=\frac{p+1}{2}-j}^{\frac{p-1}{2}}\;\sum_{m=\frac{p+1}{2}-k}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{\upsilon_{*1}}\right)^{n+m}\delta_{\alpha,2p-2n-2m} = 0\,. \tag{6.3}$$

Зная результат для (5.6), используем следующий анзац

$$\frac{\partial^2\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_j\partial\lambda_k} = -\frac{1}{p}\left(\frac{p}{\upsilon_{*1}}\right)^{j+k+1-p}\sum_{n=\frac{p+1}{2}-j}^{\frac{p-1}{2}}\;\sum_{m=\frac{p+1}{2}-k}^{\frac{p-1}{2}} f(\beta, p-n-m)\,. \tag{6.4}$$

Таким образом, для нечетного β имеем 0, а для четного β находим

$$\frac{\partial^2\upsilon_*^\beta}{\partial\lambda_j\partial\lambda_k} = -\frac{1}{p}\left(\frac{p}{\upsilon_{*1}}\right)^{j+k-\frac{p-3}{2}+\frac{\beta}{2}}\sum_{n=\frac{p+1}{2}-j}^{\frac{p-1}{2}}\;\sum_{m=\frac{p+1}{2}-k}^{\frac{p-1}{2}}\;\sum_{s=1}^{\beta/2}\delta_{n+m,\frac{p-1}{2}+s}\,. \tag{6.5}$$

Подставляя (3.22) и (6.5), и приняв $\gamma = 2t$, получим первый член в (6.1)

$$\frac{\partial^2\upsilon_*^\gamma}{\partial\lambda_{n_3}\partial\lambda_{n_4}} C_{\gamma,p-2n_1,p-2n_2} = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{\upsilon_{*1}}\right)^{\sum_{i=1}^4 n_i+2-p}\sum_{t=|\frac{p}{2}-n_1-n_2|+\frac{1}{2}}^{\frac{p-1}{2}-|n_1-n_2|}(-1)^{\frac{p+1}{2}-n_1-n_2+t}\sum_{s=1}^{t}\varphi(s)\,, \tag{6.6}$$

где

$$\varphi(s) = \sum_{n=\frac{p+1}{2}-n_3}^{\frac{p-1}{2}}\;\sum_{m=\frac{p+1}{2}-n_4}^{\frac{p-1}{2}}\delta_{n+m,\frac{p-1}{2}+s} \tag{6.7}$$

или, явно

$$\varphi(s) = \frac{p+1-2s}{4} + \frac{|n_3+n_4-\frac{p+1}{2}+s|}{2} - \frac{|n_3-\frac{p+1}{2}+s|}{2} - \frac{|n_4-\frac{p+1}{2}+s|}{2}\,. \tag{6.8}$$

Использовав (3.24), (3.25), (5.9) и (6.6), мы получили следующее нормированное выражение

$$\frac{Z_{1234}^{disc}Z_0}{\sqrt{Z_{11}Z_{22}Z_{33}Z_{44}}} = \frac{\sqrt{\prod_i (p-2n_i)}}{(p-2)p(p+2)}\times$$

$$\times\left[\sum_{t=|\frac{p}{2}-n_1-n_2|+\frac{1}{2}}^{\frac{p-1}{2}-|n_1-n_2|}(-1)^{\frac{p+1}{2}-n_1-n_2+t}\sum_{s=1}^{t}\varphi(s)+\sum_{n=\frac{p+1}{2}-n_3}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{m=\frac{p+1}{2}-n_4}^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{F}(n_1,n_2,n,m,p)\right], \tag{6.9}$$

где

$$\mathrm{F}(n_1,n_2,n,m,p) = (m+n-n_1-n_2)(-1)^{n+m-n_1-n_2}\theta(2n,2m,p-2n_1,p-2n_2)\,. \tag{6.10}$$

Численные проверки с использованием пакета Mathematica показали, что это выражение дает те же значения, что и полученное в непрерывном подходе (1.3). Мы также обнаружили, что вне области (1.11) дискретное выражение (6.9) дает ноль. Это, с одной стороны, означает, что правила отбора для четырехточки заведомо выполнены. А с другой стороны, этот эффект предсказывает некоторое явление, которое интересно было бы исследовать в непрерывном подходе. Обозначим область, задаваемую (1.9), через R_1, а область (1.11) через R_2. Согласно правилам отбора вне области R_1 четырехточка должна равняться нулю. В области $R_1\backslash R_2$ результатов непрерывного подхода нет, наше предсказание заключается в том, что четырехточечный коррелятор в этой области также равен нулю.

Заключение

Мы рассмотрели новое дискретное описание серии Ли–Янга моделей МЛГ. Получено полное согласие с результатами непрерывного подхода на уровне корреляционных чисел до четырехточек включительно. Главное достижение представленного вычисления в том, что оно не использует резонансные преобразования. Структура полученных выражений для корреляторов такова, что эти выражения автоматически удовлетворяют правилам отбора. Такое описание мы называем точным дискретным аналогом моделей МЛГ. Существенная модификация по сравнению с предыдущим дискретным описанием заключается в другом выборе Фробениусова многообразия: текущее описание базируется на Фробениусовой алгебре A_{p-1} типа. Данная работа является первым шагом на пути построения точного аналога МЛГ для общего случая (q,p) модели. Основная задача данного построения заключается в поиске релевантной структуры ФМ, которая гарантировала бы автоматическое выполнение правил отбора у вычисляемых корреляторов. Мы полагаем, что в общем случае соответствующая алгебра является фактором кольца многочленов над $\mathbb{C}$ от нескольких переменных, а ее размерность должна равняться числу физических полей в модели.

Литература

[1] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, *Phys.Lett.* **B103** (1981) 207–210.

[2] A. Belavin and Al. Zamolodchikov, *Integrals over moduli spaces, ground ring, and four-point function in minimal Liouville gravity*, *Theor.Math.Phys.* **147** (2006) 729-754.

[3] A. Zamolodchikov, *Higher equations of motion in Liouville field theory*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 19S2** (2004) 510.

[4] Al. Zamolodchikov, *Three-point function in the minimal Liouville gravity*, *Theor.Math.Phys.* **142** (2005) 183-196.

[5] V. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. Zamolodchikov, *Fractal Structure of 2D Quantum Gravity*, *Mod.Phys.Lett.* **A3** (1988) 819.

[6] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, *2D gravity and random matrices*, *Physics Reports* (1995).

[7] M. R. Douglas, *Strings in less than one-dimension and the generalized KdV hierarchies*, *Phys.Lett.* **B238** (1990) 176.

[8] P. H. Ginsparg, M. Goulian, M. Plesser, and J. Zinn-Justin, *(p, q) String actions*, *Nucl.Phys.* **B342** (1990) 539–563.

[9] A. Belavin, B. Dubrovin, B. Mukhametzhanov, *Minimal Liouville Gravity correlation numbers from Douglas string equation*, *JHEP* **1401** (2014) 156. [`arXiv:1310.5659`].

[10] V. Belavin, *Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds*, [`arXiv:1405.4468`].

[11] A. Belavin, V. Belavin, *Frobenius manifolds, Integrable Hierarchies and Minimal Liouville Gravity*, [`arXiv:1406.6661`].

[12] V. Belavin, *Correlation Functions in Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds*, [`arXiv:1412.4245v1`].

[13] G. W. Moore, N. Seiberg, and M. Staudacher, *From loops to states in 2-D quantum gravity*, *Nucl.Phys.* **B362** (1991) 665–709.

[14] A. Belavin and A. Zamolodchikov, *On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models*, *J.Phys.* **A42** (2009) 304004, [`arXiv:0811.0450`].

[15] V. Belavin and Yu. Rud, *Matrix model approach to minimal Liouville gravity revisited*, *J.Phys.* **A48** 18FT01 [`arXiv:1502.05575`].

[16] B. Dubrovin, *Integrable systems in topological field theory*, *Nucl.Phys.* **B379** (1992) 627–689.