

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Корреляционные функции спиновой
жидкости в модели Китаева с внешним
полем»
(Дипломная работа бакалавра)

студента 222 группы
Лункин А.В.
научные руководители
д.ф.-м.н., проф. Фейгельман М.В.
к.ф.-м.н. Тихонов К.С.

Черноголовка 2016

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Оглавление | 1 |
| 1 Введение | 2 |
| 2 Модель Китаева с внешним полем | 5 |
| 2.1 Постановка задачи | 5 |
| 2.2 Спектр модели | 7 |
| 2.3 Функции Грина | 8 |
| 2.4 Второй порядок теории возмущений | 8 |
| 2.5 Упрощение диаграмм | 10 |
| 3 Четвёртый порядок теории возмущений | 12 |
| 3.1 Теория возмущений | 12 |
| 3.2 Сдвиг Дираковской точки | 14 |
| 4 Суммирование ряда теории возмущений | 15 |
| 4.1 Сведение теории возмущений для спиновых операторов к фермионному представлению | 15 |
| 4.2 Возмущённый Гамильтониан | 18 |
| 4.3 Структурный фактор | 18 |
| 5 Заключение | 20 |
| 6 Список литературы | 21 |

Глава 1

Введение

Спиновая жидкость - одно из возможных состояний системы взаимодействующих спинов, не имеющее параметра порядка при нуле температур и обладающее высокой степенью квантовой запутанности. Грубо говоря, состояние системы нельзя представить как "произведение" блоков, локализованных в пространстве, в отличие, например, от ферромагнетиков (основное состояние-все спины направлены в одну сторону)[1].

Одним из типичных свойств спиновых жидкостей является фрустрация [2]. Причиной фрустрации является геометрия решётки. Так, например, основное состояние для Изинговской модели на квадратной решётке для спинов $1/2$ при антиферромагнитном взаимодействии соседних спинов можно легко построить: квадратная решётка разбивается на две подрешётки, в одной из них направим все спины параллельно оси z , а в другой антипараллельно, при такой расстановке каждая связь "насыщена" т.к. $s_i^z s_j^z \geq -1$ а в данной расстановке достигается равенство. Однако, для треугольной решётки или любой другой, которую нельзя разбить на две подрешётки, основное состояние невозможно построить таким простым способом, насытив одну связь в элементарной ячейке, мы не сможем одновременно насытить две другие.

Второе важное свойство спиновых жидкостей - квантовые флуктуации, которые особенно проявляются при величине спина $s = \frac{1}{2}$, например, $\hat{s}^2 = (s)(s + 1) = \frac{3}{4}$, что в 3 раза больше классической величины.

В 1973 году вышла работа Филипа Андерсона [3], в которой рассматривается антиферромагнитное Гейзенберговское взаимодействие спинов $s = \frac{1}{2}$ на треугольной решётке. Таким образом, данная модель включает в себя фрустрацию и квантовые флуктуации спинов. В работе было показано, что основное состояние отлично от Неэлевского. Эту работу можно считать началом теории спиновых жидкостей. Далее приведены основные их типы.

Первый тип - топологические спиновые жидкости. Для них характерны вырожденное основное состояние (при периодических граничных условиях), наличие щели в спектре и дробная статистика возбуждений.

Второй-критические спиновые жидкости. Их особенности: отсутствие

щели в спектре и степенной закон убывания корреляционных функций.

Третий-квантовые спиновые металлы. Для них характерно сингулярность фурье-образа корреляционной функции на линии в зоне Бриллюэна.

Выше приведено лишь описание основных свойств спиновых жидкостей без каких-либо явных выражений, это связано с отсутствием теории спиновых жидкостей, одной из причин этого является сильная квантовая запутанность, более полное описание спиновых жидкостей можно найти в работе [4]. Однако, существуют модели спиновых жидкостей точное решение которых известно. В 1D примером такой спиновой жидкости является XY-модель, Гамильтониан которой имеет вид:

$$H = \sum_i S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y \quad (1.1)$$

В 2D аналогичным примером является модель Китаева (см. 2.1 при $h_z = 0$)

Последнее время были предприняты попытки по её поиску в различных веществах. В работе [5] было показано, что для атомного Гамильтониана Канадори:

$$H_0 = \sum_i \frac{U - 3J_H}{2} (N_i - 5)^2 - 2J_H S_i^2 - \frac{J_H}{2} L_i^2 \quad (1.2)$$

и возмущения в виде тунельного Гамильтониан для ближайших соседей, можно построить эффективный Гамильтониан:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle \in \alpha\beta(\gamma)} J \vec{S}_i \vec{S}_j + K S_i^\gamma S_j^\gamma + \Gamma (S_i^\alpha S_j^\beta + S_j^\alpha S_i^\beta) \quad (1.3)$$

где суммирование ведётся по парам спинов, которые находятся на одном ребре- $\alpha\beta(\gamma)$ (см рис. 1.1).

В работе [5], с помощью численного счёта, была получена фазовая диаграмма (см.рис. 1.2), описывающая тип основного состояния системы в зависимости от параметров J, K, G .

Как видно из диаграммы, лишь в малой области параметров реализуется основное состояние, похожее на основное состояние модели Китаева. Однако, авторы работы [6] утверждают, что, используя металлоорганические каркасы с атомами Ru^{3+} или Os^{3+} , в отличие от ранее используемых соединений на основе иридия см. [7], можно подавить взаимодействия отличные от требуемого т.е. сделать малыи величины J и Γ . Свою гипотезу авторы подтверждают численным моделированием взаимодействия между атомами, расположенными в узлах решётки. Также авторы упоминают о большой вариативности таких соединений, что даст возможность изучать различные типы спиновых жидкостей (с щелью и без). Но даже в таких соединениях, кроме требуемого взаимодействия будут содержаться и другие,

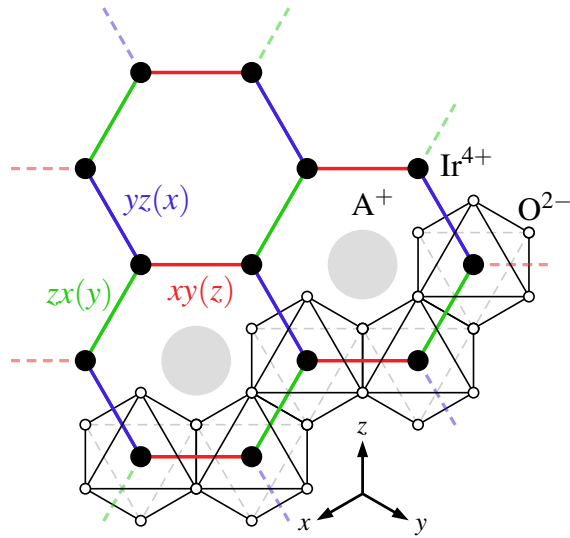


Рис. 1.1: Кристаллическая структура Na_2IrO_3 . Чёрные точки-атомы иридия см. [5]

влияние которых можно учесть с помощью теории возмущения. Наиболее простым из таких возмущений является магнитное поле.

В этой работе будет исследовано влияние магнитного поля на корреляционную функцию суммарного спина в элементарной ячейке. Для модели Китаева эта функция-локальна, несмотря на то, что спектр модели не имеет щель.

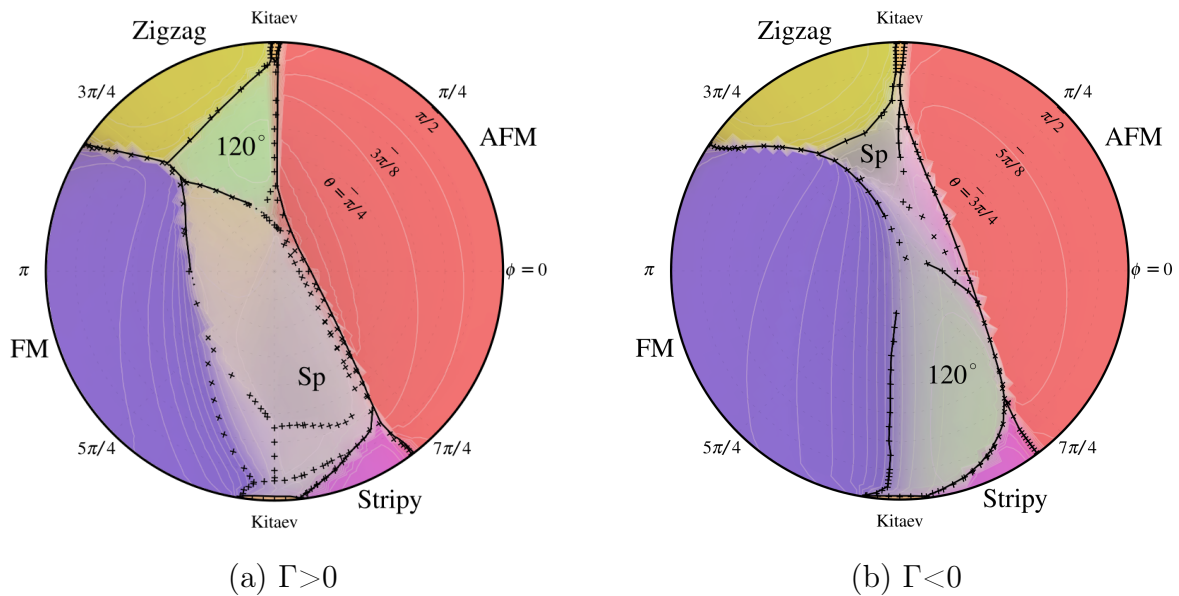


Рис. 1.2: Фазовые диаграммы в плоскости (J, K) , при условии $J^2 + K^2 + \Gamma^2 = 1$. Все состояния, кроме Китаевского, имеют параметр порядка, см [5].

Глава 2

Модель Китаева с внешним полем

2.1 Постановка задачи

В данной задаче рассматривается шестиугольная решётка в узлах которой расположены спины $\frac{1}{2}$, а Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = J \left[\sum_{x-links} \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_j^x + \sum_{y-links} \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_j^y + \sum_{z-links} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z \right] - \sum_i h^z \hat{\sigma}_i^z \quad (2.1)$$

Суммирование ведётся по парам вершин, которые соединены одним из трёх типов связей, указанных на рис. 2.1.

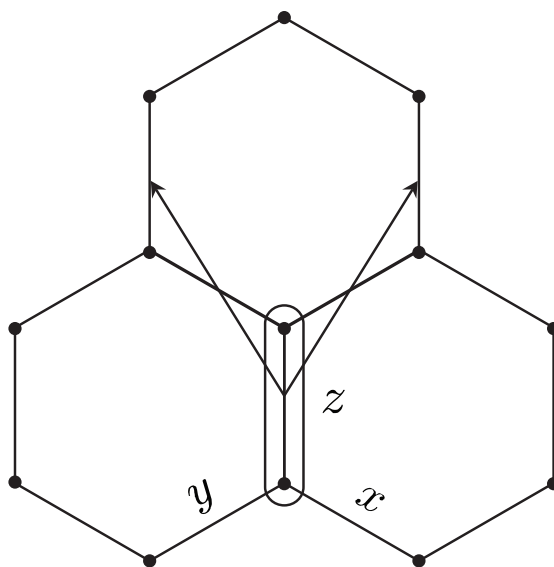


Рис. 2.1: Геометрия задачи

Невозмущённую задачу (при $h = 0$) можно свести к квадратичному гамильтониану фермионов, используя представление спиновых операторов

через Майорановские фермионы [8]. Для этого в каждой вершине вводятся 4 оператора b_i^x, b_i^y, b_i^z, c_i , сделав подстановку $\sigma_i^\alpha = ib_i^\alpha c_i$ получим коммутационные соотношения для матриц Паули. После преобразований Гамильтониан будет иметь вид:

$$\hat{H} = -iJ \sum_{i,j\text{-linked}} u_{ij} c_i c_j \quad (2.2)$$

где $u_{ij} = ib_i^\alpha b_j^\alpha$, где α -тип ребра (i, j) . Суммирование ведётся по всем ребрам шестиугольной решётки (которую можно разбить на 2 подрешётки- чётную и нечётную, вершины каждой из них будут соединены только с вершинами другой). Операторы в 2.2 стоят в порядке 1-нечётный, 2-чётный.

Величины u_{ij} , являются первыми интегралами данного Гамильтониана, $u_{ij} = \pm 1$. Операторы вида $\phi_{ij} = \frac{b_i^{\alpha_{ij}} + ib_j^{\alpha_{ij}}}{2}$, где (i, j) -ребро ячейки, имеют фермионную статистику. Также $\phi_{ij}^\dagger \phi_{ij} = \frac{1+u_{ij}}{2}$, при этом $\phi_{ij} u_{ij} = -u_{ij} \phi_{ij}$, следовательно, при действии оператора ϕ на произвольное состояние, величина $w_p = \prod_{\langle i', j' \rangle \in p} u_{i' j'} = \prod_{\langle i', j' \rangle \in p} \sigma_{i'}^{\alpha_{i' j'}} \sigma_{j'}^{\alpha_{i' j'}}$, где p -ячейка с ребром (i, j) , меняет знак. Эта величина описывает наличие потока в ячейке p , если $w_p = 1$ -будем говорить, что поток отсутствует, если $w_p = -1$, то присутствует. Каждому набору w_p соответствует несколько наборов u_{ij} , которые отличаются друг от друга калибровочным преобразованием: для произвольной вершины i поменяем знак c_i и 3-х операторов u_{pq} , где либо $p = i$ либо $q = i$. Это преобразование не изменяет Гамильтониан. В работе рассматриваются $u_{ij} = 1$ -эта калибровка отвечает отсутствию потоков в основном состоянии. Задачу с магнитным полем нельзя таким же образом свести к квадратичному Гамильтониану т.к. включение поля не сохраняет часть первых интегралов.

В данной работе рассматривается неприводимый спиновый коррелятор, $\langle s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle - \langle s_0^z(0) \rangle^2$ ($s_r^z = \sigma_{r,1}^z + \sigma_{r,2}^z$ -под спином далее подразумевается суммарный спин в элементарной ячейке). В невозмущённой модели эта величина локальна т.к. $\sigma_i^z = i(\phi_{ij} + \phi_{ij}^\dagger) c_i$ следовательно оператор спина создаёт или уничтожает два потока на ребре (i, j) . В основном состоянии потоков нету, а значит при усреднение по основному состоянию коррелятор не будет равен нулю только в случае $r = 0$. В работе [9] было показано, как второй (все нечётные порядки равны нулю см.[10]) порядок теории возмущения для этого выражения можно свести к коррелятору плотность-плотность спинового Гамильтониана (2.2). В работе [11] было показано, что 4-ый порядок теории возмущения можно воспроизвести за счёт введения возмущения в фермионный Гамильтониан. В данной работе эта идея была обобщена на случай более высоких порядков, и показано как начальную задачу (2.1) свести к коррелятору плотность-плотность для Гамильтониана (2.2) с возмущением.

2.2 Спектр модели

Гамильтониан (2.2) можно диагонализировать с помощью преобразования Фурье: $c_\lambda(\mathbf{r}) = \int_{BZ} b_\lambda(\mathbf{q}) \exp(i(\mathbf{r}, \mathbf{q}))$, λ -индекс подрешётки см. [8]. После преобразования Гамильтониан будет иметь вид:

$$\hat{H} = \sum_{BZ/2} \begin{pmatrix} b_1^\dagger & b_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{p}) \\ f^\dagger(\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Суммирование ведётся по половине зоны Бриллюэна, что связано с самоспряжённостью Майорановских фермионов, $f(\mathbf{p}) = 2iJ(e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{n}_1)} + e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{n}_2)} + 1)$, где $\mathbf{n}_{1,2} = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}\right)$ -вектора трансляции шестиугольной решётки см. Рис. 2.1.

Спектр данного гамильтониана $\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm |f(\mathbf{p})|$. Он имеет две Дираковские точки $\mathbf{Q}_{1,2} = \left(\frac{\pm 2\pi}{\sqrt{3}}\right)$. При $\mathbf{p} = \mathbf{Q}_1 + \delta\mathbf{q}$, в первом порядке по $\delta\mathbf{q}$ получим: $f(\mathbf{p}) \approx \sqrt{3}J(\delta q_y + i\delta q_x)$, при $\mathbf{p} = \mathbf{Q}_2 + \delta\mathbf{q}$ аналогично: $f(\mathbf{p}) \approx \sqrt{3}J(\delta q_y - i\delta q_x)$ в силу этих приближений, Гамильтониан вблизи Дираковских точек можно записать в виде Гамильтониана Дирака:

$$H_D = \sqrt{3}J \sum_{\mathbf{q}} \bar{d}_\lambda(\mathbf{q}) \sigma_{\lambda\mu}^\alpha p^\alpha d_\mu(\mathbf{q}) \quad (2.4)$$

Где введено обозначение $d(\mathbf{q}) = b(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{q})$, $\bar{d}_\lambda(\mathbf{q}) = ib_\nu(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{q})\sigma_{\nu\lambda}^z$, а \mathbf{Q}_i -Дираковские точки.

Нам понадобятся средние по основному состоянию от операторов b и b^\dagger . Для этого диагоналируем Гамильтониан с помощью унитарного преобразования :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{f(\mathbf{p})}{\sqrt{2}|f(\mathbf{p})|} \\ \frac{f^\dagger(\mathbf{p})}{\sqrt{2}|f(\mathbf{p})|} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

После преобразования Гамильтониан будет диагонален. Оператор $a_1(\mathbf{p})$ -это оператор уничтожения фермиона с энергией $|f(\mathbf{p})|$, оператор a_2 -оператор уничтожения фермиона с энергией $-|f(\mathbf{p})|$. Основное состояние очевидно-все состояния фермионов с отрицательной энергией заполнены, а с положительной -пустые. Временные средние от операторов a и a^\dagger :

$$\begin{aligned} \langle T a_1(\tau_1, \mathbf{p}) a_1^\dagger(\tau_2, \mathbf{p}) \rangle &= \theta(\tau_1 - \tau_2) \exp(-i|f(\mathbf{p})|(\tau_1 - \tau_2)) \\ \langle T a_2(\tau_1, \mathbf{p}) a_2^\dagger(\tau_2, \mathbf{p}) \rangle &= -\theta(\tau_2 - \tau_1) \exp(i|f(\mathbf{p})|(\tau_1 - \tau_2)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее нам понадобятся Фурье-компоненты от временных средних операторо-

ров b и b^\dagger :

$$\begin{aligned}
\int dt \langle T b_1(t, \mathbf{p}) b_1^\dagger(0, \mathbf{p}) \rangle e^{i\epsilon t} &= \int dt \langle T b_2(t, \mathbf{p}) b_2^\dagger(0, \mathbf{p}) \rangle e^{i\epsilon t} = \frac{i\epsilon}{\epsilon^2 - |f(\mathbf{p})|^2 + i0} \\
&\int dt \langle T b_1(t, \mathbf{p}) b_2^\dagger(0, \mathbf{p}) \rangle e^{i\epsilon t} = \frac{if(\mathbf{p})}{\epsilon^2 - |f(\mathbf{p})|^2 + i0} \\
&\int dt \langle T b_2(t, \mathbf{p}) b_1^\dagger(0, \mathbf{p}) \rangle e^{i\epsilon t} = \frac{if(\mathbf{p})^\dagger}{\epsilon^2 - |f(\mathbf{p})|^2 + i0}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3 Функции Грина

Также нам потребуются функции Грина для операторов $\psi = \frac{c_{r,1} + ic_{r,2}}{2}$: $G(\mathbf{r}, t) = \langle T \psi_{\mathbf{r}}(t) \psi_0^\dagger(0) \rangle$, $F = \langle T \psi_{\mathbf{r}}(t) \psi_0(0) \rangle$. Запишем выражение для них через Майорановские фермионы:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{4} (\langle T c_{\mathbf{r},1}(t) c_{0,1}(0) \rangle + \langle T c_{\mathbf{r},2}(t) c_{0,2}(0) \rangle) + i \langle T c_{\mathbf{r},2}(t) c_{0,1}(0) \rangle - i \langle T c_{\mathbf{r},1}(t) c_{0,2}(0) \rangle \\
F &= \frac{1}{4} (\langle T c_{\mathbf{r},1}(t) c_{0,1}(0) \rangle - \langle T c_{\mathbf{r},2}(t) c_{0,2}(0) \rangle) + i \langle T c_{\mathbf{r},1}(t) c_{0,2}(0) \rangle + i \langle T c_{\mathbf{r},2}(t) c_{0,1}(0) \rangle
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Используя (2.7) легко получить Фурье-образы этих функций:

$$\begin{aligned}
G(\epsilon, \mathbf{p}) &= i \frac{\epsilon + \Im f(\mathbf{p})}{\epsilon^2 - |f(\mathbf{p})|^2 + i0} \\
F(\epsilon, \mathbf{p}) &= - \frac{\Re f(\mathbf{p})}{\epsilon^2 - |f(\mathbf{p})|^2 + i0}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Нас интересуют большие времена, следовательно при преобразовании Фурье интегралы будут набираться в окрестности Дираковских точек:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}, t) &= \frac{-\sqrt{3} J t (Z_1 + Z_2) + (Z_2 - Z_1) r \cos(\gamma)}{4\pi (3(Jt)^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \\
F(\mathbf{r}, t) &= - \frac{i(Z_1 + Z_2) r \sin(\gamma)}{4\pi (3(Jt)^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Где $\mathbf{r} = (r \cos(\gamma), r \sin(\gamma))$, $Z_l = e^{i(\mathbf{Q}_l, \mathbf{r})}$.

2.4 Второй порядок теории возмущений

В работе [9] был найден второй порядок теории возмущения по \hbar . Здесь будут отражены основные моменты работы, которые имеют дальнейшее применение в более высоких порядках теории возмущений.

Введём обозначения $\psi_r^\alpha = (\psi_r, \psi_r^\dagger)$, $\phi_r^\alpha = (\phi_r^\dagger, \phi_r)$. Индекс r нумерует элементарные ячейки решётки. Тогда $s_r^z = 2i\psi^\alpha\phi^\alpha$ -спин подрешётки, определённый выше, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Второй порядок теории возмущения по \hbar для спинового коррелятора имеет вид:

$$\langle s_r^z(t)s_0^z(0) \rangle = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{r_1, r_2} \int d\tau_1 d\tau_2 \langle T s_r^z(t)s_0^z(0)s_{r_1}(\tau_1)s_{r_2}(\tau_2) \rangle \quad (2.11)$$

В основном состоянии отсутствуют потоки. Если подействовать на основное состояние спиновым оператором, то образуются 2 потока около ребра элементарной ячейки, к которой относится спиновый оператор. При повторном действии спинового оператора потоки уничтожаются. Следовательно, в усреднении по основному состоянию каждый спиновый оператор, отнесённый к одной элементарной ячейке, встречается чётное число раз см. [10] :

$$\langle s_r^z(t)s_0^z(0) \rangle = -\hbar^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \langle T s_r^z(t)s_0^z(0)s_r(\tau_1)s_0(\tau_2) \rangle \quad (2.12)$$

Рассмотрим более подробно подынтегральное выражение. Пусть $t > \tau_1 > 0 > \tau_2$. Перепишем это выражение в терминах фермионных операторов ψ и ϕ :

$$\begin{aligned} & \langle T s_r^z(t)s_0^z(0)s_r(\tau_1)s_0(\tau_2) \rangle = \\ & 16 \langle T \psi_r^{\alpha_1}(t)\phi_r^{\alpha_1}(t)\psi_0^{\alpha_2}(0)\phi_0^{\alpha_2}(0)\psi_r^{\alpha_3}(\tau_1)\phi_r^{\alpha_3}(\tau_1)\psi_0^{\alpha_4}(\tau_2)\phi_0^{\alpha_4}(\tau_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

Воспользуемся коммутационными соотношениями для операторов рождения потоков и оператором эволюции: $\phi_r e^{iHt} = e^{iH_r t} \phi_r^\dagger$, $\phi_r^\dagger e^{iH_r t} = e^{iHt} \phi_r$. $H_r = H + V_r$ где $V_r = 4J(\psi_r^\dagger \psi_r - \frac{1}{2})$ и $e^{iHt} e^{-iH_r t} = T \exp(-i \int_0^t V_r(\tau) d\tau)$.

С учётом этих коммутационных соотношений перепишем (2.13):

$$\begin{aligned} & \langle T s_r^z(t)s_0^z(0)s_r(\tau_1)s_0(\tau_2) \rangle = \\ & = 16 \langle T \psi_r^{\alpha_1}(t)\psi_r^{\alpha_3}(\tau_1)\psi_0^{\alpha_2}(0)\psi_0^{\alpha_4}(\tau_2)\phi_r^{\alpha_1}(0)\phi_r^{\alpha_3}(0)\phi_0^{\alpha_2}(0)\phi_0^{\alpha_4}(0) e^{-i \int_0^t V_r(\tau) d\tau} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

Где

$$V(\tau) = \theta(t - \tau)\theta(\tau - \tau_1)V_r(\tau) + \theta(0 - \tau)\theta(\tau - \tau_2)V_0(\tau) \quad (2.15)$$

-потенциал "включённых" потоков. Далее для удобства под V_r будем подразумевать лишь слагаемое $-4J\psi_r^\dagger\psi$, поскольку оставшееся слагаемое коммутирует со всеми операторами т.к. это число и его можно вынести за знак усреднения.

Оператор ϕ_r -уничтожает пару потоков, а ϕ_r^\dagger -рождает. Отсюда следует, что при $\alpha_4 = 2$ -выражение (2.14) будет давать нулевой вклад т.к. в основном состоянии отсутствуют потоки, следовательно $\alpha_4 = 1$, при $\alpha_3 = 1$ мы получим нулевой вклад т.к. потоки уже имеются, следовательно, $\alpha_3 = 2$, остальные индексы определяются аналогично, в итоге получим:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) s_r(\tau_1) s_0(\tau_2) \rangle = 16 \langle T \psi_r(t) \psi_r^\dagger(\tau_1) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(\tau_2) e^{-i \int_0^t V(\tau) d\tau} \rangle \quad (2.16)$$

Это выражение можно переписать, используя теорему Вика, в виде:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) s_r(\tau_1) s_0(\tau_2) \rangle = 16 L e^C \quad (2.17)$$

Здесь L -диаграммы, состоящие из прямых линий, а C -петли см. [12]. Запишем выражение для L :

$$L = \langle \langle T \psi_r(t) \psi_r^\dagger(\tau_1) \rangle \rangle \langle \langle T \psi_0(0) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle - \langle \langle T \psi_r(t) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle \langle \langle T \psi_0(0) \psi_r^\dagger(\tau_1) \rangle \rangle - \langle \langle T \psi_r(t) \psi_0(0) \rangle \rangle \langle \langle T \psi_r^\dagger(\tau_1) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle \quad (2.18)$$

Где $\langle \langle T \psi_r(t) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle = e^{-C} \langle T \psi_r(t) \psi_0^\dagger(\tau_2) e^{-i \int V(\tau) d\tau} \rangle$

2.5 Упрощение диаграмм

Рассмотрим первый порядок теории возмущений для выражения $\langle \langle T \psi_r(t) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle$, он будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \langle \langle T \psi_r(t) \psi_0^\dagger(\tau_2) \rangle \rangle^{(1)} = \\ & (-i4J) \left(\int_{\tau_2}^0 [G(t - \tau, \mathbf{r}) G(\tau - \tau_2, \mathbf{0}) + F(t - \tau, \mathbf{r}) F(\tau - \tau_2, \mathbf{0})] d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{\tau_1}^t [G(t - \tau, \mathbf{0}) G(\tau - \tau_2, \mathbf{r}) + F(t - \tau, \mathbf{0}) F(\tau - \tau_2, \mathbf{r})] d\tau \right) \quad (2.19) \end{aligned}$$

Заметим, что функция F , вычисленная в начале координат, равна 0 т.к. её Фурье представление-нечётная функция от импульса. Полагая длительность включения потоков в выражении (2.15) много меньше, чем время между ними т.е $t \gg t - \tau_2$ и $t \gg 0 - \tau_1$, мы можем заменить зависимость функции Грина от разности времён из разных промежутков на зависимость от t (это можно сделать при условии, что вихри далеки друг от друга либо в пространстве, либо во времени, однако если $|r - 3Jt| \approx 1$) то зависимость

от τ будет существенна). После этого можно вынести её за знак интегрирования. И получим:

$$\langle\langle T\psi_r(t)\psi_0^\dagger(\tau_2)\rangle\rangle^{(1)} = (-i4J) G(t, \mathbf{r}) \left(\int_{\tau_2}^0 G(\tau - \tau_2, \mathbf{0})d\tau + \int_{\tau_1}^t G(t - \tau, \mathbf{0})d\tau \right) \quad (2.20)$$

Аналогичный результат можно получить и в более высоких порядках. Откуда $\langle\langle T\psi_r(t)\psi_0^\dagger(\tau_2)\rangle\rangle = G(t, \mathbf{r})\phi(t - \tau_1)\bar{\phi}(0 - \tau_2)$, где ϕ -некоторые быстроубывающие функции. Для кольцевых диаграмм можно пренебречь взаимодействием потоков друг с другом т.к. время между их включением много больше времени их жизни, тогда $e^C \approx \langle T \exp[-i \int V_r(\tau)d\tau] \rangle \langle T \exp[-i \int V_0(\tau)d\tau] \rangle$. Заметим, что включения потоков вызывает быстрые осцилляции с частотой $\Omega \approx 0.04J$ см [8], поэтому при интегрировании по τ_1 и τ_2 основной вклад вносят участки близкие к t и 0 соответственно. Также заметим что первое слагаемое в формуле (2.18) сократится при подсчёте неприводимого коррелятора, поэтому далее будут учитываться лишь неприводимые диаграммы. После интегрирования получим:

$$\int d\tau_1 d\tau_2 \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) s_r(\tau_1) s_0(\tau_2) \rangle = -\frac{16}{h_0^2} \langle \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \rangle \quad (2.21)$$

Множитель $(\frac{1}{ih_0})^2$ возник, т.к. вклад от прямых диаграмм вещественен, а e^C -при интегрировании даёт i в знаменателе, в данном случае интегрирование производится дважды.

При интегрировании по τ_1 и τ_2 дали вклад лишь времена близкие к t и 0 -соответственно. Если рассматривать случая, когда $t > \tau_2 > 0 > \tau_1$ а потоки включены в промежутках (t, τ_1) и $(0, \tau_2)$ аналогичным образом, то за счёт осцилляций, вклад в интеграл вносят области, когда τ_1 близко к t , но это не может быть выполнено т.к. $\tau_1 < 0$. Следовательно вклад области интегрирования, в которой выполнено это условие пренебрежимо мал. После учёта всех способов расставить времена получим:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr} = \frac{64h_z^2}{h_0^2} \langle T \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \rangle \quad (2.22)$$

Используя теорему Вика и выражения для функций Грина, получим, что неприводимый спиновый коррелятор (индекс irr) во втором порядке теории возмущений имеет вид:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = \frac{16 h_z^2 (r^2 - 3(Jt)^2) \cos^2(\frac{2\pi}{3}r \cos(\gamma)) - r^2 \cos^2(\gamma)}{\pi^2 h_0^2 (r^2 - 3(Jt)^2)^3} \quad (2.23)$$

Глава 3

Четвёртый порядок теории возмущений

3.1 Теория возмущений

Запишем четвёртый порядок для спинового коррелятора:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle^{(4)} = \frac{h_z^4}{4!} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) s_{r_1}^z(\tau_1) s_{r_2}^z(\tau_2) s_{r_3}^z(\tau_3) s_{r_4}^z(\tau_4) \rangle \quad (3.1)$$

Прделаем с этим выражением аналогичные операции, а именно, перепишем спиновые операторы через фермионные, с помощью коммутационных соотношений избавимся от операторов потока. На следующем шаге, используя представление для прямых и петлевых диаграмм, мы получим, что неприводимые корреляторы можно представить как функции Грина зависящие от разности времён из 3 удалённых интервалов, образованными двумя временами. Производя три интегрирования по временным и координатным переменным получим множитель $(\frac{1}{i\hbar_0})^3$ перед всем выражением. А само выражение для неприводимого коррелятора, с учётом только неприводимых диаграмм, будет иметь вид:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}^{(4)} = 2^6 \frac{4h_z^4}{(i\hbar_0)^3} \sum_{r_1} \int d\tau_1 \langle T \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \psi_{r_1}(\tau_1) \psi_{r_1}^\dagger(\tau_1) \rangle \quad (3.2)$$

Применяя к этому выражению теорему Вика, мы получим выражения для неприводимого спинового коррелятора записанного через петлевые ферми-

онные диаграммы:

$$\begin{aligned} & \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}^{(4)} = \\ & 2^6 \frac{4h_z^4}{(ih_0)^3} \int dy (G(x)G(0-y)G(y-x) + G(x)F(0-y)F(y-x) + \\ & \quad G(-x)F(x-y)F(y-0) + G(-x)G(x-y)G(y-0) + \\ & \quad F(x)F(0-y)G(y-x) + F(x)G(0-y)F(y-x) + \\ & \quad F(-x)F(x-y)G(y-0) + F(-x)G(x-y)F(y-0)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь для удобства были введены 3-х мерные координаты $x = (t, \mathbf{r})$, $y = (\tau_1, \mathbf{r}_1)$ а интегрирование по y подразумевает интегрирование по τ_1 и суммирование по r_1 . Переходя к Фурье гармоникам, получим:

$$\begin{aligned} & \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}^{(4)} = \\ & -2^6 \frac{4h_z^4}{(ih_0)^3} \left[G(x) \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)G(\mathbf{p}, \varepsilon) + F(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i(-(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \varepsilon t)} + \right. \\ & \quad G(-x) \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)G(\mathbf{p}, \varepsilon) + F(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i((\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \varepsilon t)} + \\ & \quad 2F(x) \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i(-(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \varepsilon t)} + \\ & \quad \left. 2F(-x) \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i((\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \varepsilon t)} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычисление свёрток функций Грина приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)G(\mathbf{p}, \varepsilon) + F(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i((\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \varepsilon t)} = \\ & \quad \frac{-r \cos(\gamma)(\sqrt{3}Jt(Z_1 - Z_2) + (Z_1 + Z_2)r \cos(\gamma))}{4\pi\sqrt{3}(3(Jt)^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \quad 2 \int \frac{d\varepsilon d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (G(\mathbf{p}, \varepsilon)F(\mathbf{p}, \varepsilon)) e^{i((\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \varepsilon t)} = \\ & \quad \frac{-ir(\sqrt{3}Jt(Z_1 + Z_2) + (Z_1 - Z_2)r \cos(\gamma)) \sin(\gamma)}{4\pi\sqrt{3}(3(Jt)^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.4) получим ответ, для 4ого порядка неприводимого спинового коррелятора:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}^{(4)} = \frac{2^6 h_z^4 r \cos(\gamma) \sin(\frac{4\pi}{3} r \cos(\gamma))}{\pi^2 h_0^3 \sqrt{3} J (3(Jt)^2 - r^2)^2} \quad (3.6)$$

Это выражение применимо при не слишком больших r т.к. мы видим, что четвёртый порядок теории возмущений убывает медленнее, чем второй.

3.2 Сдвиг Дираковской точки

Попробуем просуммировать весь ряд теории возмущений. Для начала попробуем получить выражение для $\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle$ (4) с помощью второго порядка теории возмущений и малого изменения приближённого Гамильтониана, определённого вблизи Дираковских точек (именно он и был нужен при вычислениях). Вблизи Дираковских точек $f(\mathbf{Q}_i + \delta \mathbf{p}) = \delta p e^{\pm i\alpha}$, где $\delta \mathbf{p} = \delta p (\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Возмущение Гамильтониана, которое воспроизведёт выражение 3.4 - сдвиг Дираковских точек $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i \pm \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ Тогда (2.23) будет иметь вид:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = \frac{16 h_z^2 (r^2 - 3(Jt)^2) \cos^2\left(\left(\frac{2\pi}{3} + \delta\right)r \cos(\gamma)\right) - r^2 \cos^2(\gamma)}{\pi^2 h_0^2 (r^2 - 3(Jt)^2)^3} \quad (3.7)$$

Первый порядок этого выражения по δ :

$$\delta \frac{\partial}{\partial \delta} \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle |_{\delta=0} = -\frac{16 h_z^2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} r \cos(\gamma)\right) \delta r \cos(\gamma)}{\pi^2 h_0^2 (3(Jt)^2 - r^2)^2} \quad (3.8)$$

Что в точности переходит в выражение (3.4) при $\delta = -4 \frac{h_z^2}{\sqrt{3} J h_0}$. Пока мы смогли воспроизвести ряд только в 4ом порядке. Далее будет показано, что ряд теории возмущений для спинов можно свести к неприводимому коррелятору плотность-плотность для фермионов с возмущённым Гамильтонианом. Возмущение нового Гамильтониана будет квадратично и оно будет приводить к сдвигу Дираковских точек, который мы угадали.

Глава 4

Суммирование ряда теории возмущений

4.1 Сведение теории возмущений для спиновых операторов к фермионному представлению

Рассмотрим ряд для спинового коррелятора:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = \sum_n \frac{(-ih_z)^{2n}}{2n!} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{2n}} \int d\tau_1 \dots d\tau_{2n} \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) s_{r_1}^z(\tau_1) \dots s_{r_{2n}}^z(\tau_{2n}) \rangle \quad (4.1)$$

Пусть $t_1 \dots t_{2n+2}$ -хронологически упорядоченная перестановка времён в корреляторе подынтегрального выражения, а $l_1 \dots l_{2n+2}$ -их координаты, соответственно. Перепишем данное выражение через фермионные операторы:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = \sum_n \frac{4(-i2h_z)^{2n}}{2n!} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{2n}} \int d\tau_1 \dots d\tau_{2n} \langle \psi_{l_1}^{\alpha_1}(t_1) \phi_{l_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots \dots \psi_{l_{2n+2}}^{\alpha_{2n+2}}(t_{2n+2}) \phi_{l_{2n+2}}^{\alpha_{2n+2}}(t_{2n+2}) \rangle \quad (4.2)$$

Перенесём все операторы $\phi(0)$ в правый конец коррелятора, оставляя между ними исходный порядок, как мы делали это во второй главе. Из-за этого всё выражение умножится на $(-1)^{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}}$ за счёт того, что оператору ϕ стоящему на k -ом месте с конца требуется "преодолеть" $k-1$ операторов ψ . Также заметим, что набор координат $l_1 \dots l_{2n+2}$ должен состоять из $n+1$ пары координат, это следует из отсутствия потоков в основном состоянии. Сгруппируем ϕ с одинаковыми координатами вместе, после чего сгруппируем ψ в том же порядке, заметим что знак выражения не поменяется т.к. каждой перестановке операторов ϕ соответствует аналогичная перестановка операторов ψ . Из-за того, что операторы ϕ были пронесены в конец выражения,

возникла T-упорядочение экспоненты описывающее влияния потенциала включения и выключения потоков. Во второй главе было показано, что существование потоков эффективно уменьшает область интегрирование по τ , т.к. требует малости времени включения потока, если же в какой-то момент включены две пары потоков, то из этого следует условие на малость двух временных интервалов, что влечёт уменьшение области интегрирования и такими вклады мы можем пренебречь, аналогичный приём используется в крестовой диаграммной технике, когда мы не учитываем диаграммы с пересечением пунктирных линий. Из этого условия следует, что операторы ψ после этих преобразований остались T-упорядоченными. В итоге получим:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{4(-i2h_z)^{2n}}{2n!} \sum_{r_1, r_2 \dots r_{n-1}} \int d\tau_1 \dots d\tau_{2n} \langle T \psi_{s_1}(t_1) \psi_{s_1}^\dagger(t_2) \dots \psi_{s_{n+1}}(t_{2n+1}) \psi_{s_{n+1}}^\dagger(t_{2n+2}) e^{-i \int d\tau V(\tau)} \rangle \quad (4.3)$$

Где

$$V(\tau) = \theta(t_1 - \tau) \theta(\tau - t_2) V_{s_1}(\tau) + \dots + \theta(t_{2n+1} - \tau) \theta(\tau - t_{2n+2}) V_{s_{n+1}}(\tau) \quad (4.4)$$

-потенциал включённых потоков. $s_1 \dots s_{n+2}$ -некоторая перестановка координат $r, 0, r_1 \dots r_{n-1}$. Суммирование по координатам теперь ведётся по $n-1$ переменной в силу того, что в наборе $r_1 \dots r_{2n}, r, 0$ каждая координата встречается дважды, каждая пара -соответствует включению и выключению потоков, но r и 0 не могут быть в одной паре. Множитель $(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}}$

Перепишем подынтегральное выражение:

$$\langle T \psi_{s_1}(t_1) \psi_{s_1}^\dagger(t_2) \dots \psi_{s_{n+1}}(t_{2n+1}) \psi_{s_{n+1}}^\dagger(t_{2n+2}) e^{-i \int d\tau V(\tau)} \rangle = e^C \sum \varepsilon_\pi \langle \langle T \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2}) \rangle \rangle \dots \langle \langle T \psi_{s_{i_{2n-1}}}(t_{i_{2n-1}}) \psi_{s_{i_{2n}}}^\dagger(t_{i_{2n}}) \rangle \rangle \quad (4.5)$$

Где $\langle \langle T \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2}) \rangle \rangle = \langle T \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2}) e^{-i \int_0^t V(\tau) d\tau} \rangle e^{-C}$, e^C -сумма всех петлевых диаграмм, суммирование ведётся по всем возможным разбиениям на пары а ε_π -знак получившейся перестановки.

В выражении $\langle \langle \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2}) \rangle \rangle$ можно пренебречь влиянием потенциалов потоков, включенных не во время t_{i_2} и потенциалом потоков выключенных не во время t_{i_1} . После этого пренебрежения, оставшееся выражение содержит только два потенциала потоков и полностью аналогично выражению (2.19), тогда его можно переписать, как

$$\langle \langle \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2}) \rangle \rangle = \langle \psi_{s_{i_1}}(t_{i_1}) \psi_{s_{i_2}}^\dagger(t_{i_2-1}) \rangle \phi(t_{i_1} - t_{i_1+1}) \bar{\phi}(t_{i_2-1} - t_{i_2}) \quad (4.6)$$

После чего выражение (4.5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \langle T\psi_{s_1}(t_1)\psi_{s_1}^\dagger(t_2)\dots\psi_{s_{n+1}}(t_{2n+1})\psi_{s_{n+1}}^\dagger(t_{2n+2})e^{-i\int d\tau V(\tau)} \rangle = \\ & e^C |\phi(t_1 - t_2)\dots\phi(t_{2n+1} - t_{2n+2})|^2 \langle \psi_{s_1}(t_1)\psi_{s_1}^\dagger(t_1)\dots\psi_{s_{n+1}}(t_{2n+1})\psi_{s_{n+1}}^\dagger(t_{2n+1}) \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Данное выражение не изменяется при замене $t_{2i} \rightarrow t_{2i-1}$ или $t_{2i-1} \rightarrow t_{2i}$ в выражении для фермионного усреднения, т.к. эти пары времён из одного и того же временного промежутка, в который была включена пара потоков, и этот промежуток мал по сравнению со временем между включениями потоков. Пусть потоки в точке r были включены(выключены) в момент времени t а обратная операция была произведена во время τ_r . Аналогично определим время τ_0 , как время включения(выключения) потоков выключенных(включённых) в точке 0 во время 0. Проинтегрируем по τ_r и τ_0 (с учётом замечания сделанного выше, мы можем сделать так, что усреднение операторов не будет зависеть от этих времён) это выражение и изменим нумерация оставшихся переменных, сохранив порядок, из-за этого возникнет множитель $4 * 2n * (2n - 1) (\frac{1}{i\hbar_0})^2$. Множитель 4 возникает т.к. области интегрирования в которых в точке t или 0 потоки выключается или включается дают одинаковые вклады, множитель $2n * (2n - 1)$ -возникает т.к. из $2n$ времён нам надо выбрать 2 которые будет стоять в паре с t и 0. Интегрируя по переменным от которых не зависит произведение операторов с учётом перенумерации, получим:

$$\begin{aligned} \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = & \sum_n 16(-1)^{n-1} \frac{(-i2\hbar_z)^{2n}}{(i\hbar_0)^{n+1}} \sum_{r_1, r_2 \dots r_{n-1}} \int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \langle T \psi_{r_1}(\tau_1) \psi_{r_1}^\dagger(\tau_1) \dots \\ & \psi_{r_{n-1}}(\tau_{n-1}) \psi_{r_{n-1}}^\dagger(\tau_{n-1}) \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

Интегрирование ведётся по области, в которой $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 \dots > \tau_{n-1}$. Вынесем множитель $64 \frac{\hbar_z^2}{\hbar_0^2}$ за скобку и распространим область интегрирования на всё пространство, получим:

$$\begin{aligned} \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle = & 64 \frac{\hbar_z^2}{\hbar_0^2} \sum_n \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{4\hbar_z^2}{\hbar_0} \right)^2 \sum_{r_1, r_2 \dots r_{n-1}} \int d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \langle T \psi_{r_1}(\tau_1) \psi_{r_1}^\dagger(\tau_1) \dots \\ & \psi_{r_{n-1}}(\tau_{n-1}) \psi_{r_{n-1}}^\dagger(\tau_{n-1}) \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) является рядом теории возмущения для выражения $\langle T \psi_r(t) \psi_r^\dagger(t) \psi_0(0) \psi_0^\dagger(0) \rangle$, для Гамильтониана $H = H_0 + V$. H_0 -фермионный гамильтониан невозмущённой задачи, $V = \frac{4\hbar_z^2}{\hbar_0} \sum_r \psi_r \psi_r^\dagger$.

4.2 Возмущённый Гамильтониан

Выраженный через Фурье-компоненты Майорановских фермионов, возмущённый Гамильтониан будет иметь вид:

$$H = \sum_{BZ/2} (b_1^\dagger \ b_2^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{p})+i\delta \\ f^\dagger(\mathbf{p})-i\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Где $\delta = \frac{4h_z^2}{h_0}$.

Этот Гамильтониан имеет две Дираковские точки: $\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} \pm(\frac{2\pi}{3} - \frac{\delta}{\sqrt{3}J}) \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Полученные Дираковские точки полностью совпадают с теми, что мы получали ранее, когда пытались угадать вид возмущения. Запишем окончательный ответ для неприводимого спинового коррелятора:

$$\langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr} = \frac{16 h_z^2 (r^2 - 3(Jt)^2) \cos^2\left(\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{4h_z^2}{\sqrt{3}Jh_0}\right)r \cos(\gamma)\right) - r^2 \cos^2(\gamma)}{\pi^2 h_0^2 (r^2 - 3(Jt)^2)^3} \quad (4.11)$$

Это выражение применимо в области: $\max(Jt, r) \gg 1$ и $Jt - r \gg 1$. Это связано с приближениями, которые были сделаны в пункте 2.5. Считалось, что потоки созданные спинами пространственно или по времени удалены друг от друга а также не лежат близко к световому конусу.

4.3 Структурный фактор

Важной экспериментально наблюдаемой величиной является динамический структурный фактор спиновой жидкости, т.е. Фурье-образ спиновой корреляционной функции. Именно эта величина измеряется с помощью неупругого рассеяния нейтронов. Обозначим $S(t, r) = \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}$, тогда структурный фактор дается ее Фурье-образом $S(w, \mathbf{p})$. Функция $S(t, r) = \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}$ известна нам (см. формулу (4.11)) в асимптотической области больших расстояний $r \gg 1$ и больших времен $t \gg 1/J$; кроме того, велика должна быть и разность $|r| - \sqrt{3}Jt$. Знание асимптотического выражения (4.11) недостаточно для того чтобы вычислить полностью структурный фактор $S(w, \mathbf{p})$, однако мы можем сосчитать наиболее интересную часть структурного фактора: его зависимость при низких частотах, и при малых импульсах, а также импульсах, близких к особым точкам спектра $\mathbf{p}_+ = \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{8h_z^2}{\sqrt{3}Jh_0}, 0\right)$ и $\mathbf{p}_- = \left(-\frac{4\pi}{3} + \frac{8h_z^2}{\sqrt{3}Jh_0}, 0\right)$.

Для того, чтобы выделить особенности $S(w, \mathbf{p})$ в окрестностях этих точек, удобно произвести вычитание значений этой функции в точках $(0, 0)$

$\mathbf{p}_+ = (\frac{4\pi}{3} - \frac{8h_z^2}{\sqrt{3}Jh_0}, 0)$, $\mathbf{p}_- = (-\frac{4\pi}{3} + \frac{8h_z^2}{\sqrt{3}Jh_0}, 0)$. Таким образом мы получим, в окрестности точки $(0, 0)$:

$$S(w, \mathbf{p}) - S(0, 0) = \frac{4h_z^2}{3J^2h_0^2}(\sqrt{w^2 - 3J^2p^2} + \frac{3J^2p^2 \cos^2(\phi)}{\sqrt{w^2 - 3J^2p^2}}) \quad (4.12)$$

Где $p = |\mathbf{p}|$, ϕ -угол между \mathbf{p} и осью x . Выражение применимо при малых w, p . В области $w^2 - 3J^2p^2 < 0$ вычисленный в таком приближении вклад равен нулю. В действительности, при использовании точного выражения для $S(t, r) = \langle T s_r^z(t) s_0^z(0) \rangle_{irr}$, он отличен от нуля, но не содержит корневой сингулярности, имеющейся в области $w^2 - 3J^2p^2 > 0$ и приведенной в (4.12).

Аналогичное вычисление в окрестностях точек \mathbf{p}_+ и \mathbf{p}_- дает

$$S(w, \mathbf{p}) - S(0, \mathbf{p}_\pm) = \frac{4h_z^2}{3J^2h_0^2} \sqrt{w^2 - 3J^2\delta p^2} \quad (4.13)$$

Здесь $\delta p = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_\pm|$ -отклонение от \mathbf{p}_+ или \mathbf{p}_- -соответственно. В области $w^2 - 3J^2\delta p^2 < 0$ результат, с той же использованной точностью, также пропадает.

Стоит отметить, что в главном порядке по h_z точки \mathbf{p}_\pm являются Дираковскими точками $\mathbf{Q}_{1,2} = \left(\frac{\pm 2\pi}{\sqrt{3}} \right)$ соответственно, точнее отличаются от них на вектор обратной решётки.

Глава 5

Заключение

В данной работе была получена спиновая корреляционная функция для модели Китаева с внешним полем. Было показано, что ряд теории возмущений для исходной задачи, которая формулировалась в терминах спинов, можно свести к ряду теории возмущений для коррелятора плотность-плотность и возмущённого фермионного Гамильтониана. В данном случае возмущение являлось квадратичным и привело к сдвигу Дираковской точки.

Степенной закон убывания коррелятора связан с тем, что поле направлено вдоль одной оси, если поле имеет все 3 проекции, то в спектре появляется щель $\Delta \propto h_x h_y h_z$ и коррелятор становится экспоненциально убывающим см. [8].

Следующим шагом в работе над этой задачей будет рассмотрение возмущения в виде суммы Гейзенберговского взаимодействия и несимметричного в нулевом магнитном поле (см. Введение) . Такая постановка задачи обусловлена тем, что последовательное применение этих двух операторов рождает такую же конфигурацию потоков, что и оператор спина см.[13] . Поэтому можно ожидать степенное убывание коррелятора, но можно пойти дальше, рассмотренным методом мы можем свести спиновую задачу к фермионной и определить вид коррелятора.

Глава 6

Список литературы

- [1] L. Savary and L. Balents, ”*Quantum Spin Liquids*”, arXiv preprint arXiv:1601.03742 (2016)
- [2] J. Vannimenus and G. Toulouse ”*Theory of the frustration effect: 11. Ising spins on a square lattice* ” Commun. Phys. 2, 115 (1977)
- [3] Anderson, P. W. ”*Resonating valence bonds: a new kind of insulator.*” Mater. Res. Bull. 8, 153–160 (1973).
- [4] L. Balents, ”*Spin liquids in frustrated magnets*”, Nature 464, 199 (2010).
- [5] J. G. Rau, E. K.-H. Lee, and H.-Y. Kee, ”*Generic Spin Model for the Honeycomb Iridates beyond the Kitaev Limit*” Phys. Rev. Lett. 112, 077204 (2014).
- [6] Masahiko G. Yamada, Hiroyuki Fujita and Masaki Oshikawa ”*Designing Kitaev spin liquids in metal-organic frameworks*” arXiv preprint arXiv: 1605.04471 (2016)
- [7] G. Jackeli and G. Khaliullin, ”*Mott Insulators in the Strong Spin-Orbit Coupling Limit: From Heisenberg to a Quantum Compass and Kitaev Models*” Phys. Rev. Lett. 102, 017205 (2009).
- [8] A. Kitaev, “*Anyons in an exactly solved model and beyond*”, Ann. Phys. 321, 2(2006)
- [9] K.S. Tikhonov, M.V. Feigel'man and A.Y. Kitaev, “*Power-law spin correlations in a perturbed honeycomb spin model*”, Phys. Rev. Lett. 106, 067203 (2011)
- [10] G. Baskaran, Saptarshi Mandal and R. Shankar, “*Exact results for spin dynamics and fractionization in the Kitaev Model*”, Phys. Rev. Lett. 98, 247201 (2007)

- [11] A.V. Lunkin, K.S. Tikhonov, M.V. Feigel'man, "*Long-range spin correlations in a honeycomb spin model with magnetic field*", *Pis'ma v ZhETF*, 103 (2), 124-127 (2016)
- [12] P. Nozieres and C. de Dominicis, "*Singularities in the X-Ray Absorption and Emission of Metals. III. One-Body Theory Exact Solution*", *Phys. Rev. Lett.* 178, 1097 (1969).
- [13] Xue-Yang Song, Yi-Zhuang You, and Leon Balents, "*Low-energy Spin Dynamics of the Honeycomb Spin Liquid Beyond the Kitaev Limit*", arXiv preprint arXiv:1604.04365 (2016)