Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Проверка дуального описания O(3) σ-модели

(Дипломная работа бакалавра)

студента 322 группы
Наумов Антон Юрьевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Литвинов А. В.

Черноголовка 2017

Содержание

1 Введение

В современной квантовой теории поля больше внимание уделяется явлению дуальности, суть которого состоит в следующем. Рассмотрим две теории, лагранжианы которых зависят от некоторого параметра. Они называются дуальными, если их наблюдаемые связаны друг с другом некоторым соотношением. Часто оказывается, при некоторых значениях параметра одна из этих теорий находится в режиме сильной связи, а другая — в слабой. Вычисляя по теории возмущений наблюдаемые в одной из них, мы получаем наблюдаемые для другой теории в режиме сильной связи — то есть получаем возможность узнать поведение первой системы в непертурбативной области.

Впервые дуальность была обнаружена на решёточной модели — модели Изинга, которая оказалась самодуальной [1]. Первые полевые дуальные модели были найдены Колеманом [2] и Мандельштамом [3]: это модель Тирринга и модель синус-Гордона. Позже были найдены и другие случаи дуальности, см. например, обзор [4].

Даная работа касается исследования дуального описания деформированной O(N) σ-модели. Исходная O(N) σ-модель описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{O(N)} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \mathbf{n}(x)\cdot\partial^\mu \mathbf{n}(x)\right) + \frac{u(x)}{2}\left(\mathbf{n}^2(x)-1\right), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}(x)$ — N-компонентное поле, $\mu \in \{1,2\}$, а поле $u(x)$ имеет смысл множителя Лагранжа. Все поля в данной работе зависят от двух переменных $\{x_0, x_1\}$, а метрика имеет сигнатуру (+,–). Уравнение движения, которое получается после варьирования по u, имеет вид:

$$\mathbf{n}^2(x) = 1, \tag{1.2}$$

то есть мы имеем дело, по сути, со свободной N-компонентной теорией, поля которой живут (N-1)-мерно сфере.

Назовём деформированной O(N) σ-моделью систему с лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{f_\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \mathbf{n}\cdot\partial^\mu \mathbf{n}\right) + \frac{u}{2} f_\lambda(\mathbf{n}), \tag{1.3}$$

Функцию $f_\lambda(\mathbf{n})$ назовём деформацией O(N) σ-модели. Пока что мы наложим на неё лишь одно условие: что $f_\lambda(\mathbf{n}) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{n}^2 - 1$, то есть в этом пределе поля вновь живут на сфере. При других λ они, очевидно, оккупируют (N-1)-мерное многообразие:

$$f_\lambda(\mathbf{n}) = 0 \tag{1.4}$$

Хорошо известно, что недеформированная O(N) σ-модель является интегрируемой. Её классические интегралы движения были найдены Польмаером [5], аргументы в пользу того, что из них можно составить бесконечное число интегралов, которые сохраняются при квантовом описании, приведены Поляковым [6], а также Голдшмидом и Виттеном [7]. Спектр частиц образует O(N) мультиплет. Известно, что интегрируемость накладывает жёсткие условия на рассеяние — вплоть до того, что S-матрицу можно вычислить явно. Для O(N) σ-модели это было сделано Замолодчиковыми [8]. Будем обозначать эту матрицу S_{zz}, размерность N будет понятна из контекста.

Имеется идея, что можно подобрать такую $f_\lambda(\mathbf{n})$, что эта модель останется интегрируемой. Обозначим матрицу деформированной модели как S_λ. Предполагается, что существует единственная деформация, при которой $S_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} S_{zz}$ (для разных N это будут, естественно, разные матрицы) [8]. С другой стороны можно показать, что у S_λ есть область по λ, в которой она имеет пертурбативный вид, что даёт надежду на существование лагранжиана, теория возмущений для которого даёт S_λ . Более подробно об этом будет рассказано во втором разделе данной работы.

Пока же, забегая вперёд, скажем, что для O(3)-модели такая работа была проделана Фатеевым, Онофри и Замолодчиковым [9], причём дуальный лагранжиан имеет следующий вид [10]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f,3} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2 + i\overline{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi + \frac{\pi b^2}{2(1+b^2)}\left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)^2 - \\ -m\overline{\Psi}\Psi\cosh\left(\sqrt{4\pi}b\varphi\right) - \frac{m^2}{8\pi b^2}\sinh^2\left(\sqrt{4\pi}b\varphi\right),\end{aligned} \tag{1.5}$$

где φ — скалярное поле, Ψ — поле Дирака, а параметр определяется соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{2(1+b^2)} \tag{1.6}$$

Ими также найдена метрика, задающая функцию поверхности:

$$ds^2 = \frac{\kappa}{\lambda}\left[\frac{1}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)}d\zeta^2 + \frac{1-\zeta^2}{1-\kappa^2\zeta^2}d\phi^2\right], \tag{1.7}$$

где

$$\kappa = -\tanh 2\lambda t \tag{1.8}$$

а t — ренормгрупповое время.

Для больших N такая работа пока не доделана, хотя Литвиновым уже предложен, (но не опубликован) лагранжиан, который должен быть дуальным для к O(N) модели для нечетных N. Этот лагранжиан зависит, естественно, от λ, и при $\lambda \to \frac{1}{2}$ имеет пертрубативный вид, как и лагранжиан (1.5).

В этой работе будет проверено, что лагранжиан (1.5) и в древесном приближении действительно дают матрицу Замолодчиковых [8].

2 O(N) σ-модель и её дуальное описание

В этом разделе будет показано, как из интегрируемости O(N) σ-модели можно найти явный вид её матрицы рассеяния.

2.1 Классические и квантовые интегралы движения O(N) σ-модели

В статье [5] Польмаер показал, кто у классической O(N) σ-модели имеется бесконечное множество интегралов движения. В координатах $\sigma = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, $\tau = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$ классические уравнения движения имеют вид:

$$\mathbf{n}_{\sigma\tau} - u\mathbf{n} = 0 \qquad\qquad \mathbf{n}^2 = 1 \tag{2.1}$$

Первые несколько токов, приводящих к сохраняющимся зарядам, имеют вид:

$$\begin{gathered}
\left\{\tfrac{1}{2}\mathbf{n}_\sigma^2\right\}_\tau = 0 \\
\left\{\frac{1}{2\|\mathbf{n}_\sigma\|}\partial_\sigma\left(\frac{\mathbf{n}_\sigma}{\|\mathbf{n}_\sigma\|}\right)^2\right\}_\tau = \left\{\frac{(\mathbf{n}_\sigma\cdot\mathbf{n}_\tau)}{\|\mathbf{n}_\sigma\|}\right\}_\sigma \\
\left\{\frac{1}{2\|\mathbf{n}_\sigma\|}\left(\partial_\sigma\left[\frac{1}{\|\mathbf{n}_\sigma\|}\partial_\sigma\left(\frac{\mathbf{n}_\sigma}{\|\mathbf{n}_\sigma\|}\right)\right]\right)^2 - \frac{5}{8\|\mathbf{n}_\sigma\|^3}\left[\left(\partial_\sigma\left(\mathbf{n}_\sigma\|\mathbf{n}_\sigma\|\right)\right)^2\right]^2\right\}_\tau = \\
= \left\{-\frac{(\mathbf{n}_\sigma\cdot\mathbf{n}_\tau)}{2\|\mathbf{n}_\sigma\|^3}\left(\partial_\sigma\left(\frac{\mathbf{n}_\sigma}{\|\mathbf{n}_\sigma\|}\right)\right)^2\right\}_\sigma
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Есть и другой набор законов сохранения — они отличаются от (2.2) заменой $\sigma \leftrightarrow \tau$.

При переходе к квантовому описанию эти равенства, вообще говоря, перестают быть верными. Тем не менее можно показать, что и квантовом случае у системы будет бесконечное множество законов сохранения. Впервые это был сделано Поляковым [6], чьи рассуждения будут воспроизведены ниже. Квантовать O(N) σ-модель удобнее всего с помощью функционального интеграла, т. е. определяя наблюдаемые как средние по всевозможными конфигурациям полей:

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle &= \int \mathscr{D}\mathbf{n}(x)\; A\prod_x \delta\left(\mathbf{n}^2(x) - 1\right)\exp\left[-\frac{1}{2g_0^2}\int d^2x\,(\partial_\mu\mathbf{n}(x))^2\right] = \\
&= \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\mathscr{D}u(x)\int\mathscr{D}\mathbf{n}(x)\; A\prod_x \exp\left[-\frac{1}{2g_0^2}\int d^2x\,(\partial_\mu\mathbf{n}(x))^2 + u(x)\left(\mathbf{n}^2(x) - 1\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.3}$$

причём интегралы по u в (2.3) берутся параллельно мнимой оси. Такой способ описания позволяет явно увидеть, что поля по-прежнему живут на сфере, и потому во всех средних имеем, как и в классике:

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = 1 \qquad (\mathbf{n}_\sigma\cdot\mathbf{n}) = (\mathbf{n}_\tau\cdot\mathbf{n}) = 0 \tag{2.4}$$

Рассмотрим, например, первый из интегралов (2.2). Правая часть этого уравнения может быть не равной нулю — там могут появиться слагаемые, которые называют аномалиями. Вид этих слагаемых определяется тем, что все они должны изменяться одинаково под действием масштабных преобразований, а также преобразований Лоренца. В выбранных координатах эти преобразования имеют вид, соответственно, $(\xi, \eta) \to (\alpha\xi, \alpha\eta)$ и $(\xi, \eta) \to (\alpha'\xi, \alpha'^{-1}\eta)$. К тому же они должны, как и правая часть, быть O(N)-скалярами. Используя всё это, а также свойства (2.4), получаем единственный возможный вид этого выражения:

$$\left\{\mathbf{n}_\sigma^2\right\}_\tau = \beta \left\{(\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\tau)\right\}_\sigma \tag{2.5}$$

Оно имеет дивергентный вид, то есть тоже приводит к закону сохранения.

Теперь рассмотрим комбинацию $\{\mathbf{n}_{\sigma\sigma}^2\}_\tau$. Перебирая всевозможные дополнительные слагаемые, а также используя свойства (2.4) и предыдущий закон сохранения, получим

$$\left\{\mathbf{n}_{\sigma\sigma}^2\right\}_\tau = c\left\{\mathbf{n}_\sigma^2\right\}_\sigma (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\tau) + \{...\}_\sigma \tag{2.6}$$

Подставляя в последнее выражение (2.5) и интегрируя по σ, получим:

$$\frac{d}{d\tau} I = 0 \qquad\qquad I = \int d\sigma \left(\mathbf{n}_{\sigma\sigma}^2 - c\mathbf{n}_\sigma^4\right) \tag{2.7}$$

Получившаяся величина является новым интегралом движения. На n-частичных асимптотических состояниях справедливо:

$$\langle n| \, I \, |n\rangle = const \cdot \sum_i p_{i\sigma}^3, \tag{2.8}$$

где индекс i нумерует частицы. Аналогичные рассуждения верны и для τ компоненты.

Подобным образом можно конструировать дальнейшие законы сохранения, каждый из которых будет иметь степенной вид. Подробный анализ был проделан в работе [11].

Подобная бесконечная система степенных уравнений приводит к двум существенным свойствам рассеяния:

(i) Набор масс $\{m_i\}$ налетающих и рассеянных частиц совпадает

(ii) Набор импульсов $\{p_i\}$ также не меняется в результате рассеяния.

Оказывается, что уже из этих свойств можно установить явный вид матрицы рассеяния.

2.2 S-матрица O(N) σ-модели

Свойства (i) и (ii) приводят к важному следствию для S-матрицы, а именно к свойству факторизации. Оно гласит, что процессы множественного рассеяния можно представлять как набор последовательных парных рассеяний.

На языке амплитуд это можно сформулировать следующим образом. Процессы рассеяния, в начальном состоянии которых находится n, а в конечном — m частиц, мы назовём процессом n в m. Число n назовём порядком процесса. Свойство факторизации означает, что любая амплитуда перехода n в n выражается через произведение амплитуд перехода 2 в 2. При этом возможен суммирование по внутренним состояниям (таким, как изоспин) промежуточных частиц.

Вывод свойства факторизованного рассеяния из (i) и (ii) можно найти в [12]. Здесь же мы дадим его качественное обоснование, заодно введя необходимую терминологию.

Рассмотрим волновую функцию системы n частиц. Координату k-ой частицы и её внутреннее состояние назовём x_n и α_k соответственно. Будем считать, что радиус взаимодействия частиц R много меньше размера системы — это необходимое условие факторизованного рассеяния.

Имеется N! доменов конфигурационного пространства, определяемых системой неравенств $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < ... < x_{\sigma_n}$, где σ — элемент группы перестановок S_n, мы также считаем, что $\forall i,j \quad |x_i - x_j| \gg R$. Заметим, что свойство (i) не позволяет рождаться новым частицам, то есть зафиксировав набор частиц в одном из таких доменов, мы можем полагать, что во всех остальных доменах этот набор будет таким же (с точностью до замены частиц равной массы). Пусть набор импульсов частиц упорядочен следующим образом: $p_n < p_{n_1} < ... < p_1$ (индекс здесь не "привязан" к частице). В асимптотическом домене, определяемом перестановкой σ, волновая функция для заданных внутренних состояний является набором плоских волн и в самом общем случае имеет вид:

$$\Psi_{\alpha_1...\alpha_n}(x_1,...,x_1) = \sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}...\alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{\sum_i p_{\tau_i} x_{\sigma_i}} \tag{2.9}$$

Рассмотрим теперь две амплитуды $A^{\alpha_1..\alpha_i\alpha_{i+1}...\alpha_n}[\tau]$, и $A^{\alpha_1...\alpha_{i+1}\alpha_i...\alpha_n}[\tau s^i]$, где s^i — перестановка чисел i и i+1. Забудем теперь обо всех частицах, кроме i-ой и (i+1)-ой. Тогда первая амплитуда соответствует падающей волне при рассеянии этих частиц, а вторая — рассеянной волне. Это означает, что данные амплитуды связаны двухчастичным элементом S-матрицы. Полное выражение для второй амплитуды даётся суммой по всем внутренним состояниям:

$$A^{\alpha_1...\alpha_{i+1}\alpha_{\sigma_i}...\alpha_n}[\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i,\alpha'_{i+1}} S^{\alpha_i\alpha_{i+1}}_{\alpha'_i\alpha'_{i+1}}(p_i,p_{i+1}) A^{\alpha_1..\alpha'_i\alpha'_{i+1}...\alpha_n}[\tau] \tag{2.10}$$

Для этого равенства существенно, что взаимодействие между частицами является локальным.

Рассмотрим теперь амплитуды $A^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3..\alpha_n}[\tau]$, и $A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1..\alpha_{i+1}\alpha_i...\alpha_n}[\tau t]$, где t — перестановка (1,2,3) $\to$ (3,2,1). Эти амплитуды снова соответствуют налетающей и рассеянной волне, теперь уже для процесса 3 в 3, т.е.:

$$A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1...\alpha_n}[\tau t] = \sum_{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'} S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'}(p_1,p_2,p_3) A^{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'..\alpha_n}[\tau] \tag{2.11}$$

Однако амплитуду $A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_3...\alpha_n}[\tau t]$ можно получить и через двухчастичные элементы, последовательно выражая её через амплитуды $A^{\alpha_2\alpha_3\alpha_1...\alpha_n}[\tau s^2]$, $A^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3...\alpha_n}[\tau s^1]$, $A^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n}[\tau]$, откуда:

$$A^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1...\alpha_n}[\tau t] = \sum_{\beta_1\beta_2,\gamma_1\gamma_3,\delta_2\delta_3} S^{\alpha_2\alpha_3}_{\delta_2\delta_3}(p_2,p_3) S^{\alpha_1\delta_3}_{\gamma_1\gamma_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_1\delta_2}_{\beta_1\beta_2}(p_1,p_2) A^{\beta_1\beta_2\gamma_3..\alpha_n}[\tau] \tag{2.12}$$

Переобозначая индексы, из (2.11) и (2.12) получим:

$$S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(p_1,p_2,p_3) = \sum_{\gamma_1\delta_2\delta_3} S^{\alpha_2\alpha_3}_{\delta_2\delta_3}(p_2,p_3) S^{\alpha_1\delta_3}_{\gamma_1\varepsilon_3}(p_1,p_3) S^{\gamma_1\delta_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(p_1,p_2) \tag{2.13}$$

Заметим, что мы могли получить трехчастичную амплитуду другим набором перестановок. Мы использовали путь 123 $\to$ 213 $\to$ 231 $\to$ 312, а могли бы например 123 $\to$ 132 $\to$ 312 $\to$ 321. При этом мы должны были получить тот же самый матричный элемент 3 в 3. Это приводит к соотношению:

$$\sum_{\nu_1\nu_2\nu_3} S^{\alpha_1\alpha_2}_{\nu_1\nu_2}(p_2,p_3) S^{\nu_1\alpha_3}_{\varepsilon_1\nu_3}(p_1,p_3) S^{\nu_2\nu_3}_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(p_1,p_2) = \\ = \sum_{\nu_1\nu_2\nu_3} S^{\alpha_2\alpha_3}_{\nu_2\nu_3}(p_2,p_3) S^{\alpha_1\nu_3}_{\nu_1\varepsilon_3}(p_1,p_3) S^{\nu_1\nu_2}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(p_1,p_2) \tag{2.14}$$

Это матричное уравнение называется уравнение Янга-Бакстера. Если ввести обозначения для матриц $S_{12} = \left\{ S^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1'\alpha_2'}(p_1,p_2) \right\}$, оно примет вид:

$$S_{12}(p_1,p_2)S_{13}(p_1,p_3)S_{23}(p_2,p_2) = S_{23}(p_2,p_2)S_{13}(p_1,p_3)S_{12}(p_1,p_2) \tag{2.15}$$

Другое условие на S-матрицу можно получить, если последовательно рассмотреть прямое и обратное рассеяние каких-либо частиц, например 12 $\to$ 21 $\to$ 12. Требование совпадения исходной и конечной амплитуды приводит к уравнению:

$$S_{12}(p_1,p_2)S_{21}(p_2,p_1) = \mathbb{I} \tag{2.16}$$

Это уравнение совпадает с условием унитарности для S-матрицы. Наконец, требование кроссинг-инвариантности даёт соотношение:

$$S^{\alpha_1,\alpha_2}_{\beta_1,\beta_2}(p_1,p_2) = S^{\alpha_2,\overline{\beta}_1}_{\beta_2,\overline{\alpha}_1}(p_2,-p_1)$$

Черта здесь обозначает зарядовое сопряжение. Уравнения (2.15), (2.16) и (2.2) в совокупности называют условиями бутстрапа.

Для дальнейшего описания удобно ввести быстроту:

$$E = m\cosh\theta \qquad p = m\sinh\theta \tag{2.17}$$

Вернёмся теперь к O(N) σ-модели, причём будем интересоваться только $N \geq 3$. В силу O(N)-симметрии её S-матрица имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{jl}^{ik}(p_1,p_2) = \delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4)\Big(\delta_{ik}\delta_{jl}S_1(\theta_{12}) + \delta_{ij}\delta_{kl}S_3(\theta_{12}) +\\ +\delta_{il}\delta_{jk}S_2(\theta_{12})\Big) + (i\leftrightarrow k, p_1\leftrightarrow p_2)\end{aligned} \tag{2.18}$$

Прямое p означает пространственный импульс.

Для такого вида S-матрицы условия бутстрапа однозначно определяют все матричные элементы. Они также найдены в [8]. Интересующее нас решение имеет вид:

$$\begin{gathered} S_2(\theta) = Q(\theta)Q(i\pi-\theta) \\ S_1(\theta) = -\frac{i\Lambda_N}{i\pi-\theta}S_2(\theta) \qquad\qquad S_3(\theta) = -\frac{i\Lambda_N}{\theta}S_2(\theta), \end{gathered} \tag{2.19}$$

где

$$Q(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\Lambda_N}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\Lambda_N}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)} \qquad \Lambda_N = \frac{2\pi}{N-2}. \tag{2.20}$$

Будем называть это решение $R(\theta)$.

Для N=3 оно имеет имеет рациональный вид:

$$\begin{gathered} S_1(\theta) = \frac{2\pi i\theta}{(\theta+i\pi)(\theta-2i\pi)} \qquad S_2(\theta) = \frac{\theta(\theta-i\pi)}{(\theta+i\pi)(\theta-2i\pi)} \\ S_3(\theta) = -\frac{2\pi i(\theta-i\pi)}{(\theta+i\pi)(\theta-2i\pi)} \end{gathered} \tag{2.21}$$

2.3 Деформированная S-матрица

При отсутствии O(N)-симметрии условия бутстрапа допускают и другие решения. Одно из них — тригонометрическое — представляет для нас особенный интерес [13]. Обозначим его как $T_\lambda(\theta)$. Оно зависит от параметра λ так, что $T_\lambda(\theta) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} R(\theta)$. Отсюда возникает идея, что, возможно, существует такая деформация O(N) σ-модели, что получающаяся S-матрица хотя бы в первых порядках по λ совпадает с $T_\lambda(\theta)$. В случае N=3 решение $T_\lambda(\theta)$ принимает форму:

$$\mathscr{S}_\lambda^{ik,kl}(\theta) = (4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4)S_\lambda^{ij,kl}(\theta) \pm (i\leftrightarrow k, p_1\leftrightarrow p_2) \tag{2.22}$$

Эта матрица записана в базисе $\left(n_0, \frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_1-n_2}{2}\right)$, индексы i, j, k, l принимают значения, соответственно, $(0,+,-)$. Знак "$-$" в выражении (2.22) ставится в случае, когда оба индекса i и k не равны 0. Для конкретных значений индексов коэффициенты $S_\lambda^{ij,kl}(\theta)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
S_\lambda^{+-,-+}(\theta) &= -\frac{\sin\pi\lambda\sin2\pi\lambda}{\sinh\lambda(\theta-2i\pi)\sinh\lambda(\theta+i\pi)} \\
S_\lambda^{++,++}(\theta) &= \frac{\sinh\lambda(\theta-i\pi)}{\sinh\lambda(\theta+i\pi)} \\
S_\lambda^{00,00}(\theta) &= S_\lambda^{+0,+0}(\theta)+S_\lambda^{+-,-+}(\theta) \\
S_\lambda^{+0,+0}(\theta) &= \frac{\sinh\lambda\theta}{\sin\lambda(\theta-2i\pi)}S_\lambda^{++,++}(\theta) \\
S_\lambda^{0+,+0}(\theta) &= -\frac{i\sin2\pi\lambda}{\sin\lambda(\theta-2i\pi)}S_\lambda^{++,++}(\theta)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Остальные матричные элементы можно получить с помощью C, P и T и кроссинг-симметрии:

$$\begin{aligned}
S_\lambda^{kl,ij}(\theta) = S_\lambda^{\bar{k}\bar{l},\bar{i}\bar{j}}(\theta) = S_\lambda^{lk,ji}(\theta) = S_\lambda^{ij,kl}(\theta) \\
S_\lambda^{kl,ij}(\theta) = S_\lambda^{l\bar{k},j\bar{i}}(i\pi-\theta)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Можно доказать, что с учётом замены базиса при $\lambda\to0$ матрица (2.22) переходит в (2.18).

Мы будем называть $T_\lambda(\theta)$ деформированной S-матрицей. Именно по ней строиться деформация σ-модели. Для N=3 определяющая деформацию метрика приведена во введении (формула (1.7)).

У решений T_λ имеется важная особенность, а именно, что при $\lambda\to\frac{1}{2}$ они имеют пертурбативный вид, то есть представима в виде:

$$T_\lambda(\theta) = S_{triv} + T^{(1)}\left(\theta\right)(\lambda-\tfrac{1}{2}) + T^{(2)}\left(\theta\right)(\lambda-\tfrac{1}{2})^2+\ldots \tag{2.25}$$

где S_{triv} — тривиальная матрица рассеяния.

Для N=3 из (2.23) имеем:

$$\begin{aligned}
S_\lambda^{+-,-+}(\theta) &= \frac{4i\pi}{\sinh\theta}\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \\
S_\lambda^{++,++}(\theta) &= -1+2i\pi\tanh\left(\theta/2\right)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \\
S_\lambda^{00,00}(\theta) &= 1+\frac{8i\pi}{\sinh\theta}\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \\
S_\lambda^{+0,+0}(\theta) &= 1+\frac{4i\pi}{\sinh\theta}\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \\
S_\lambda^{0+,+0}(\theta) &= \frac{2i\pi}{\sinh\theta/2}\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Пертурбативный вид S-матрицы заставляет задуматься о существовании некоторой теории, матрица рассеяния которой, будучи вычисленной по теории возмущений, совпадёт с $T_\lambda(\theta)$. Такой теории будет посвящён следующий подраздел.

2.4 Лагранжиан Фатеева

В работе Фатеева [10] был найден Лагранжиан, дающий S-матрицу $T_\lambda(\theta)$ в случае N=3. Собственно это и есть лагранжиан (1.5). Можно показать, что это теория и деформированная O(N) σ-модель имеют общий набор интегралов движения, что намекает на их их дуальность.

С помощью бозон-фермионного соответствия лагранжиан (1.5) можно свести к лагранжиану вида:

$$\mathcal{L}_1 = \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\varphi}\right) + \sum_{i=1}^{4} \Lambda_i(\lambda) e^{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\varphi})} + counterterms, \tag{2.27}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — 2-компонентное скалярное поле, а также:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= (\sqrt{4\pi}b, i\sqrt{4\pi}\sqrt{1+b^2}) \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= (\sqrt{4\pi}b, -i\sqrt{4\pi}\sqrt{1+b^2}) \\
\boldsymbol{\alpha}_3 &= (-\sqrt{4\pi}b, i\sqrt{4\pi}\sqrt{1+b^2}) \\
\boldsymbol{\alpha}_4 &= (-\sqrt{4\pi}b, -i\sqrt{4\pi}\sqrt{1+b^2})
\end{aligned} \tag{2.28}$$

У этой теории есть бесконечное число интегралов движения, в чем можно убедиться с помощью теории возмущений по Λ_i. В работе [14] показано, что пертурбативно эти же интегралы интегралы движения есть у следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\varphi}\right) + \sum_{i,j} \Lambda_{ij}(\lambda) \left(\boldsymbol{\alpha}_i, \partial_\sigma \boldsymbol{\varphi}\right) \left(\boldsymbol{\alpha}_j, \partial_\tau \boldsymbol{\varphi}\right) e^{(\boldsymbol{\beta}_{ij}, \boldsymbol{\varphi})} + counterterms, \tag{2.29}$$

где $\boldsymbol{\beta}_{ij} = \frac{2}{\|\alpha_i + \alpha_j\|^2}(\alpha_i + \alpha_j)$, Λ_{ij} — константы.

Для перенормируемости этой теории необходимо правильным образом подобрать контрчлены. Применяя метод ренормгруппы в однопетлевом приближении, можно показать, контрчлены результируют в σ-модель с метрикой (1.7).

3 Проверка S-матрицы на древесном уровне для O(3) модели

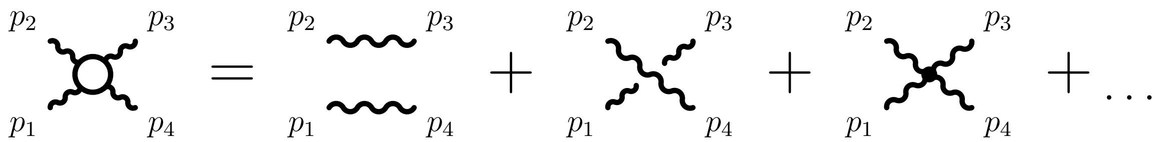
Перейдём теперь непосредственно к проверке S-матрицы (2.18) на древесном уровне. Разложим лагранжиан (1.5) вплоть до порядка b^2:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f = \tfrac{1}{2}\left(\partial\varphi\right)^2 - \tfrac{m^2}{2}\varphi^2 + i\overline{\Psi}\partial\!\!\!/\psi - m\overline{\Psi}\Psi + \\
+ \tfrac{\pi b^2}{2}\left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)^2 - \tfrac{16\pi m^2 b^2}{4!}\varphi^4 - \tfrac{4\pi m^2 b^2}{2!}\overline{\Psi}\Psi\varphi^2 + O(b^4)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

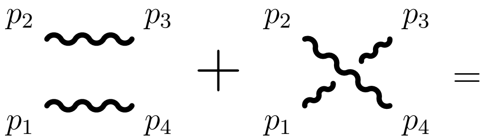
Нетрудно видеть, что только эти члены дадут вклад на древесном уровне в двухчастичные матричные элементы. Проведём последовательную проверку формул (2.26).

3.1 Четерёхбозонная вершина

Начнём с матричного элемента $S_\lambda^{00,00}(\theta)$. На древесном уровне в него в носят вклад следующие диаграммы:

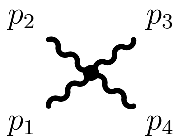


Первые две диаграммы отвечают тривиальной части и дают вклад:



$$= (4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2 \left(\delta\left(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_3\right)\delta\left(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_4\right) + \delta\left(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_4\right)\delta\left(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3\right)\right), \tag{3.2}$$

что согласуется с (2.18) и (2.26). Третья диаграмма даёт выражение:



$$= -16i\pi m^2 b^2 (2\pi)^2 \delta^{(2)}\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right) \tag{3.3}$$

Преобразуем дельта-функцию:

$$\begin{aligned}
&\delta^{(2)}\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right) = \\
&\qquad = \delta\left(m\cosh\theta_1 + m\cosh\theta_2 - m\cosh\theta_3 - m\cosh\theta_4\right)\times \\
&\qquad\qquad \times\delta\left(m\sinh\theta_1 + m\sinh\theta_2 - m\sinh\theta_3 - m\sinh\theta_4\right) = \\
&= \frac{1}{m^2\left|\sinh\theta_{12}\right|}\left(\delta(\theta_1-\theta_3)\delta(\theta_2-\theta_4) + \delta(\theta_1-\theta_4)\delta(\theta_2-\theta_3)\right) = \\
&\qquad = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2\left|\sinh\theta_{12}\right|}\left(\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4) + \delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3)\right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

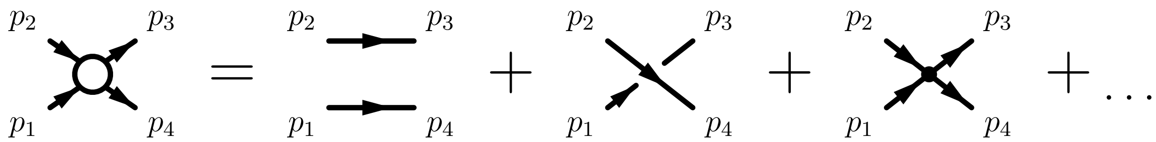
В итоге для третьей диаграммы получаем получаем:

$$\begin{aligned}
&-16i\pi m^2 b^2 (2\pi)^2 \delta^{(2)}\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right) = \\
&= (4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{8i\pi}{\left|\sinh\theta_{12}\right|}\left(\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4) + \delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3)\right)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

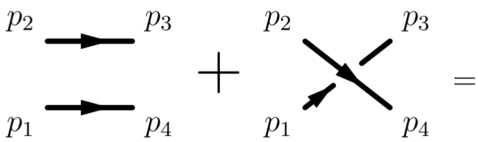
здесь мы использовали то, что $\lambda - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}b^2 + o(b^2)$. Получившаяся добавка согласуется с (2.22) и (2.26).

3.2 Четырёхфермионные вершины

Перейдём теперь к рассмотрению матричного элемента $S_\lambda^{++,++}(\theta)$. Он выражается следующими диаграммами:



Тривиальные вклады:



$$= (4\pi)^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\delta\left(p_1 - p_3\right)\delta\left(p_2 - p_4\right) - \delta\left(p_1 - p_4\right)\delta\left(p_2 - p_3\right)\right) \tag{3.6}$$

Для вычисления следующего порядка необходимо найти явный вид спиноров в двумерном пространстве-времени. Алгебра Клиффорда задаётся следующими образующими:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Положительно-частотное решение уравнения Дирака имеет вид, как обычно, $\Psi(x) = e^{-ipx}$, где :

$$u(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ e^{\theta/2} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

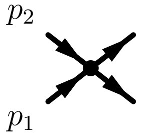
Константа выбрана с учётом нормировки $\overline{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger(x)\gamma_0\Psi(x) = 2m$.

Четырехфермионное взаимодействие в (3.1) определяется слагаемым $\frac{\pi b^2}{2}\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)^2$. В четырехфермионную вершину вносят вклад 4 свёртки:

$$\begin{array}{ll} 1) \ \left\langle p_4, p_3 | \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi | p_2, p_1 \right\rangle & 2) \ \left\langle p_4, p_3 | \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi | p_2, p_1 \right\rangle \\ 3) \ \left\langle p_4, p_3 | \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi | p_2, p_1 \right\rangle & 4) \ \left\langle p_4, p_3 | \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi | p_2, p_1 \right\rangle \end{array} \tag{3.9}$$

Нетрудно видеть, что свёртки 1 и 2 дают одинаковые выражения, равно как и свёртки 3 и 4.

Обозначим вклады от свёрток следующим образом:



$$= \left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right)(2\pi)^2\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_4) \tag{3.10}$$

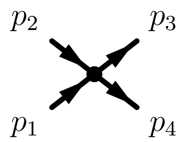
Посчитаем вклад от первых двух свёрток, не забыв про множитель $-\frac{\pi b^2}{2}$ перед каждой из них, а также про$-i$, наследуемое от разложения оператора эволюции:

$$
\begin{aligned}
&A_1 + A_2 = -2(-i)\left(-\frac{\pi b^2}{2}\right)\Big(\overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)\Big)\Big(\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_2)\Big) = \\
&= -i\pi b^2\Big(u^\dagger(p_4)\gamma^0\gamma^0 u(p_1)\Big)\Big(u^\dagger(p_3)\gamma^0\gamma^0 u(p_2)\Big) + \\
&\qquad + i\pi b^2\Big(u^\dagger(p_4)\gamma^0\gamma^1 u(p_1)\Big)\Big(u^\dagger(p_3)\gamma^0\gamma^1 u(p_2)\Big) = \\
&= -4i\pi m^2 b^2\left(\cosh\tfrac{\theta_4+\theta_1}{2}\cosh\tfrac{\theta_3+\theta_2}{2} - \sinh\tfrac{\theta_4+\theta_1}{2}\sinh\tfrac{\theta_3+\theta_2}{2}\right) = \\
&\qquad = -4i\pi m^2 b^2\cosh\tfrac{\theta_4+\theta_1-\theta_3-\theta_2}{2}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Аналогично считаются и две оставшиеся свёртки:

$$
A_3 + A_4 = 4i\pi m^2 b^2\cosh\tfrac{\theta_4+\theta_2-\theta_3-\theta_1}{2} \tag{3.12}
$$

Используя выражение (3.4) для дельта-функции, получаем:

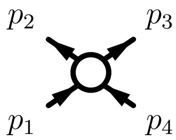
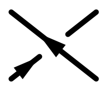
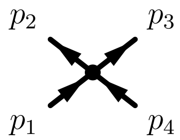


$$
= \qquad (3.13)
$$

$$
= 2i\pi m^2 b^2\tanh\tfrac{\theta_{12}}{2}(4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4) + \delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3)\right)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)
$$

Полученные для $S_\lambda^{++,++}(\theta)$ выражения (3.6) и (3.13) согласуются с (2.18) и (2.26).

Рассмотрим теперь матричные элементы $S_\lambda^{+-,+-}(\theta)$ и $S_\lambda^{+-,-+}(\theta)$. Они собираются в диаграммы:

 $=$  $+$  $+\dots$

Матричный элемент $S_\lambda^{+-,+-}(\theta)$ даёт всё тривиальное слагаемое и часть слагаемого первого порядка. В то же время получается из $S_\lambda^{++,+}(\theta)$ Используя T- и кроссинг-симметрию, находим из $S_\lambda^{++,++}(\theta)$:

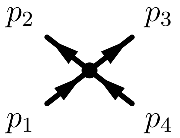
$$
S_\lambda^{-+,-+}(\theta) = -1 - 2i\pi\coth(\theta/2)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) + o\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \tag{3.14}
$$

Тривиальная часть диаграммного ряда получается из этого элемента абсолютно аналогично предыдущим пунктам (важно помнить, что в выражении 2.22) при i=+, j=– берётся знак "+").

Рассмотрим слагаемое первого порядка. Оно определяется свёртками:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ \big\langle p_4,\overline{p}_3|\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi|\overline{p}_2,p_1\big\rangle \qquad 2)\ \ \big\langle p_4,\overline{p}_3|\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi|\overline{p}_2,p_1\big\rangle \\
&3)\ \ \big\langle p_4,\overline{p}_3|\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi|\overline{p}_2,p_1\big\rangle \qquad 4)\ \ \big\langle p_4,\overline{p}_3|\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi|\overline{p}_2,p_1\big\rangle
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Введем обозначение:



$$= (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)\,(2\pi)^2\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_4) \tag{3.16}$$

Здесь нам потребуется отрицательно-частотное решение уравнения Дирака:

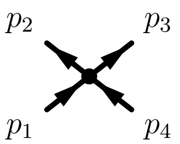
$$v(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ -e^{\theta/2} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Посчитаем теперь вклады от свёрток:

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= -2i\pi b^2\left(\overline{u}(p_4)\gamma_\mu v(p_3)\right)\left(\overline{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\right) = \\ &= -8im^2\pi b^2\left(\sinh\tfrac{\theta_3+\theta_4}{2}\sinh\tfrac{\theta_2+\theta_1}{2} - \cosh\tfrac{\theta_3+\theta_4}{2}\cosh\tfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right) = \\ &= 8im^2\pi b^2\cosh\tfrac{\theta_3+\theta_4-\theta_1-\theta_2}{2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} B_3 + B_4 &= 2i\pi b^2\left(\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_1)\right)\left(\overline{v}(p_3)\gamma_\mu v(p_2)\right) = \\ &= 8im^2\pi b^2\left(\cosh\tfrac{\theta_1+\theta_4}{2}\cosh\tfrac{\theta_2+\theta_3}{2} - \sinh\tfrac{\theta_1+\theta_4}{2}\sinh\tfrac{\theta_2+\theta_3}{2}\right) = \\ &= 8im^2\pi b^2\cosh\tfrac{\theta_1+\theta_4-\theta_2-\theta_3}{2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

В результате получим:

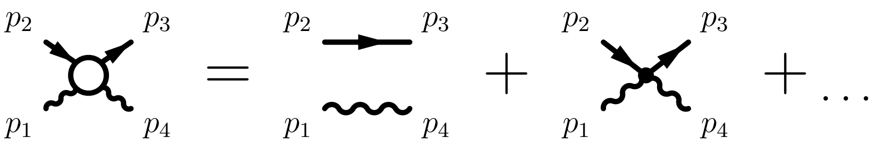


$$\begin{aligned} &= (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)\,(2\pi)^2\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_4) = \\ &= \frac{(4\pi)^2 4i\varepsilon_1\varepsilon_2}{\sinh\theta_{12}}\delta(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_4)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right) + \\ &\qquad + (4\pi)^2 2im^2\varepsilon_1\varepsilon_2 \coth\theta_{12}\,\delta(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_3)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

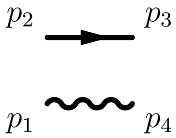
Первое слагаемое относится к $S_\lambda^{+-,-+}(\theta)$, а второе — к $S_\lambda^{-+,-+}(\theta)$. Выражения согласуются с формулами (2.22), (2.26) и (3.14).

3.3 Бозон-фермионная вершина

Проверим наконец $S_\lambda^{+0,+0}(\theta)$ и $S_\lambda^{0+,+0}(\theta)$. Аналогично предыдущему пункту, они вносят вклад в диаграммы:

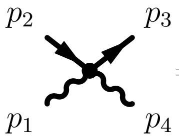


В тривиальную часть вклад даёт только $S_\lambda^{+0,+0}(\theta)$:



$$= (4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\delta\left(p_1 - \mathrm{p}_3\right)\delta\left(p_2 - p_4\right) \tag{3.21}$$

Бозон-фермионное взаимодействие определяется слагаемым $\frac{4\pi m^2 b^2}{2!}\overline{\Psi}\Psi\varphi^2$. В результате подсчёта свёртки, получим:



$$=(-i)4\pi m^2 b^2 \overline{u}(p_4)u(p_1)(2\pi)^2\delta^{(2)}\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right) =$$

$$= 4i\pi(4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\cosh\frac{\theta_2-\theta_4}{2}}{\sinh\theta_{12}}\left(\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4)+\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3)\right)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) = \tag{3.22}$$
$$= (4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{4i\pi}{\sinh\theta_{12}}\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_4)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+(4\pi)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{2i\pi}{\sinh\frac{\theta_{12}}{2}}\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_4)\delta(\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)$$

Первое слагаемое относится к $S_\lambda^{+0,+0}(\theta)$, а второе — к $S_\lambda^{0+,+0}(\theta)$. Оба выражения согласуются с формулами (2.22) и (2.26).

4 Заключение

В работе проверено, что на древесном уровне Лагранжиан (1.5) согласуется с S-матрицей (2.18).

В дальнейшем планируется провести аналогичную работу для высших N. Лагранжианы, описывающие пертурбативную область, предложены Литвиновым, но пока ещё неопубликованны. Также планируется проведение проверок в однопетлевом приближении, и поиск метрик, аналогичных метрике (1.7).

Список литературы

[1] H. A. Kramers and G. H. Wannier (1941). "Statistics of the two-dimensional ferromagnet". Physical Review. 60: 252–262. doi:10.1103/PhysRev.60.252.

[2] Coleman, S.: Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model. Phys. Rev. D11, 2088 (1975). DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevD.11.2088

[3] Mandelstam, S.: Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation. Phys. Rev. D11, 3026 (1975). doi: 10.1103/PhysRevD.11.3026

[4] J. Polchinski, Dualities of fields and strings, arXiv:1412.5704

[5] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints, Commun. Math. Phys. 46 (1976) 207–221. doi: 10.1007/BF01609119

[6] Polyakov A.M., Hidden Symmetry of the Two-Dimensional Chiral Fields, Phys.Lett. 72B (1977) 224-226(1977)

[7] Y. Y. Goldschmidt and E. Witten, Conservation laws in some two-dimensional models, Phys. Lett. B91 (1980) 392–396/ doi: 10.1016/0370-2693(80)91004-7

[8] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, Factorized S matrices in two-dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models, Annals Phys. 120 (1979) 253–291. doi: 10.1016/0003-4916(79)90391-9

[9] V. A. Fateev, E. Onofri, and A. B. Zamolodchikov, The Sausage model (integrable deformations of O(3) sigma model), Nucl. Phys. B406 (1993) 521–565. https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90001-6

[10] Integrable Deformations of Sine-Liouville Conformal Field Theory and Duality. arXiv:1705.06424

[11] Арефьева И.Я., Кулиш П.П., Нисимов Е.Р. и Пачева С.Ж., ЛОМИ-препринт Е-I-1978.

[12] Лашкевич, Методы теории одномерных квантовых систем (семестровый курс), https://chair.itp.ac.ru/index.php?sub=curriculum/oned&year=2017&sem=10

[13] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Model factorized S matrix and an integrable Heisenberg chain with spin 1., Sov. J. Nucl. Phys. 32 (1980) 298–303. [Yad. Fiz.32,581(1980)].

[14] Alexeu Litvinov, Lev Spodyneiko, On W algebras commuting with a set of screenings, doi: 10.1007/JHEP11(2016)138