МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Пещеренко Николай Сергеевич

Неборновское резонансное рассеяние электронов на точечных примесях в полосе

010900 – прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель –
д. ф.-м. н.
Иоселевич Алексей Соломонович

Черноголовка 2017

Оглавление

1 Введение **2**

1.1 Постановка задачи 2

1.2 План работы 2

2 Проводимость в борновском приближении **4**

2.1 Вычисление усреднённой функции Грина 4

2.2 Расчёт проводимости 6

2.3 Вычисление плотности состояний 8

3 Рассеяние на примеси в неборновском приближении **12**

3.1 Вычисление функции Грина в полосе 12

3.2 Перенормировка времени рассеяния 14

3.3 Вычисление проводимости 15

4 Нерезонансный случай **17**

5 Резонансный случай **19**

5.1 Аналитические свойства перенормированной амплитуды рассеяния 19

5.2 Усреднение сопротивления по положению примеси 20

5.3 Аналитические свойства сопротивления 22

5.4 Поведение сопротивления вблизи старого резонанса 23

5.5 Новый резонанс 25

5.6 Анализ случая $p_F D \to \pi N + 0$ 25

5.7 Анализ случая $p_F D \to \pi N - 0$ 27

6 Результаты **29**

6.1 $p_F D \to \pi N + 0$ 29

6.2 $p_F D \to \pi N - 0$ 30

A Усреднение поправки в нерезонансном случае **32**

Список литературы **35**

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В данной работе рассматривается рассеивающий потенциал в двумерной полосе с нулевыми граничными условиями. Рассеяние исследуется в друдевском приближении в пределе $p_F D \gg 1$, где D-ширина полосы. Целью данной работы является вычисление сопротивления данной системы.

В такой системе у сопротивления, вычисленного в борновском приближении, будут наблюдаться нефизические особенности – расходимости, связанные с тем, что плотность состояний при прохождении уровня химпотенциала через дно зоны расходится. Как мы увидим, при учёте неборновских поправок исчезнет нефизическая расходимость, но, кроме этого, возникнут новые резонансные явления в сопротивлении.

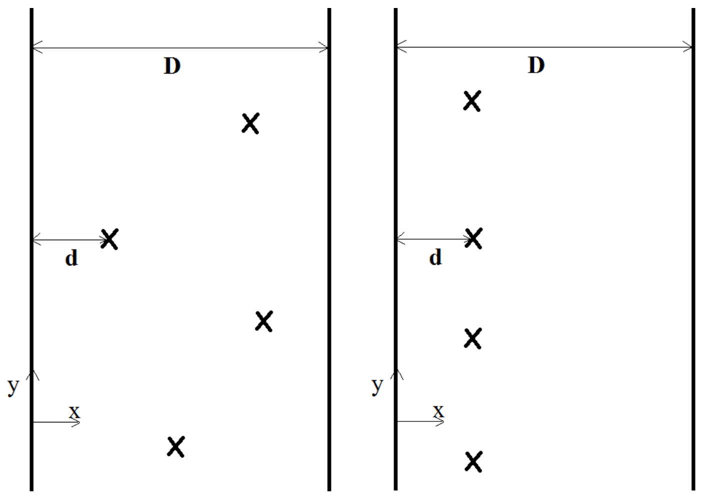

Рис. 1. Исследуемая полоса с примесями. Слева – равномерное распределение положения примесей, справа – δ-легирование (все примеси на одном и том же расстоянии от края полосы).

В данной работе будут рассмотрены два случая положения примесей: фиксированное расстояние от границы полосы (δ-легирование) и равномерное распределение.

1.2 План работы

Работа организована следующим образом:

- в разд. 2 вычислена проводимость в борновском приближении, в частности, выявлено наличие резонансов в сопротивлении;

- в разд. 3 выводится общая формула для проводимости в неборновском приближении;

- в разд. 4 анализируется вклад неборновских поправок в сопротивление вдали от старого резонанса;
- в разд. 5 анализируется поведение сопротивления вблизи старого резонанса;
- в разд. 6 представлены результаты работы.

2 Проводимость в борновском приближении

2.1 Вычисление усреднённой функции Грина

Рассмотрим рассеивающий потенциал в двумерной полосе, границы которой задаются уравнениями $x = 0$, $x = D$:

$$V(r) = u\sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i}). \tag{1}$$

Проводимость такой системы можно вычислить при помощи мацубаровской техники по формуле:

$$\sigma(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n}\big[\Pi(i\omega_n) - \Pi(0)\big], \tag{2}$$

где Π - петля с операторами тока в вершинах:

$$\langle\Pi_{yy}(i\omega_n)\rangle = e^2T\sum_{\varepsilon_k}\sum_{\alpha}\langle\alpha|\langle\hat{G^M}(i\varepsilon_k + i\omega_n)\hat{v_y}\hat{G^M}(i\varepsilon_k)\hat{v_y}\rangle|\alpha\rangle. \tag{3}$$

Угловые скобки означают усредение по положению примеси с постоянной плотностью вероятности.

Как известно, в случае точечных примесей среднее от произведения функций Грина равно произведению средних, поэтому вычислим усреднённую функцию Грина, пользуясь для этого диагональным представлением $\hat{G}_0$:

$$\langle\alpha|\hat{G}_0|\alpha\rangle = \frac{1}{\varepsilon - \xi_\alpha + i0\mathrm{sgn}\varepsilon}. \tag{4}$$

Здесь $|\alpha\rangle = |n, k\rangle$ и $\psi_\alpha = \psi_n(x)\frac{e^{iky}}{\sqrt{L_y}}$, где $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{D}}\sin\left(\frac{\pi n x}{D}\right)$.

В свою очередь, $\xi_\alpha = \frac{k^2}{2m} + \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \mu$. Первые три члена в ряде для G имеют вид:

$$\hat{G} \approx \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0. \tag{5}$$

Вычислим вид первого члена:

$$G^{(1)} = \langle\alpha|\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{G}_0|\alpha\rangle^2\langle\alpha|\hat{V}|\alpha\rangle. \tag{6}$$

Усредняя $G^{(1)}$ по положению примеси (т.е. выполняя интегрирования $\Pi_i\int\frac{d^2r_i}{S}$), найдём:

$$\Sigma^{(1)} = u\sum_i\langle\psi_n^2(r_i)L_y^{-1}\rangle = nu. \tag{7}$$

Здесь N - количество примесей, $n = N/S$. Этот член даёт просто сдвиг химпотенциала.

Далее, для второго порядка получаем:

$$G^{(2)} = \langle\alpha|\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0|\alpha\rangle = \sum_{\alpha'}\langle\alpha|\hat{G}_0|\alpha\rangle^2\langle\alpha'|\hat{G}_0|\alpha'\rangle\left|\langle\alpha|\hat{V}|\alpha'\rangle\right|^2, \tag{8}$$

$$\Sigma^{(2)} = \sum_{\alpha'}\frac{u^2}{\varepsilon - \xi_{\alpha'} + i0\mathrm{sgn}\varepsilon}\left|\sum_i e^{i(k'-k)y_i}\psi_n(x_i)\psi_{n'}(x_i)L_y^{-1}\right|^2. \tag{9}$$

Усредним это выражение по положению примесей:

$$\sum_{i,j}\left(L_y^{-2}e^{i(k'-k)(y_i-y_j)}\psi_n(x_i)\psi_{n'}(x_i)\psi_n(x_j)\psi_{n'}(x_j)\right) = L_y^{-2}\sum_{i=j}\psi_n^2(x_i)\psi_{n'}^2(x_i) +$$
$$+ L_y^{-2}\sum_{i\neq j}\left(e^{i(k'-k)(y_i-y_j)}\psi_n(x_i)\psi_{n'}(x_i)\psi_n(x_j)\psi_{n'}(x_j)\right). \tag{10}$$

Выполним усреднение второго слагаемого:

$$L_y^{-2}\sum_{i\neq j}\langle e^{i(k'-k)(y_i-y_j)}\psi_n(x_i)\psi_{n'}(x_i)\psi_n(x_j)\psi_{n'}(x_j)\rangle = L_y^{-2}\delta_{k,k'}\delta_{n,n'}D^{-2}\left(N^2 - N\right). \tag{11}$$

Т. о., второе слагаемое не даёт вклада в собственно-энергетическую часть в том смысле, что этот вклад в $G^{(2)}$ происходит из уже найденной $\Sigma^{(1)}$.

Усредним первое слагаемое:

$$L_y^{-2}\sum_{i=j}\langle\psi_n^2(x_i)\psi_{n'}^2(x_i)\rangle = NL_y^{-2}\frac{4}{D^3}\int_0^D dx\sin^2\left(\frac{\pi n x}{D}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n' x}{D}\right) =$$
$$= ND^{-2}L_y^{-2}\left(1 + \delta_{n,n'}/2\right) \tag{12}$$

Т. о., имеем:

$$\Sigma^{(2)} = \frac{nu^2}{D}\sum_{\alpha'}\frac{1 + \delta_{n,n'}/2}{\varepsilon - \xi_{\alpha'} + i0\mathrm{sgn}\varepsilon} =$$
$$= \frac{nu^2}{D}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\sum_{n'}\frac{1 + \delta_{n,n'}/2}{\varepsilon - \frac{k'^2}{2m} - \frac{\pi^2 n'^2}{2mD^2} + \mu + i0\mathrm{sgn}\varepsilon}. \tag{13}$$

Далее применим формулу Сохоцкого: $\frac{1}{x+i0} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ и вычислим $\mathrm{Im}\Sigma^{(2)}$ ($\mathrm{Re}\Sigma^{(2)}$

даст несущественную поправку второго порядка к химпотенциалу):

$$\mathrm{Im}\Sigma^{(2)} = -\pi\frac{nu^2}{D}\sum_{n'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\delta\left(\varepsilon - \frac{k'^2}{2m} - \frac{\pi^2 n'^2}{2mD^2} + \mu\right) -$$
$$-\frac{\pi nu^2}{2D}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon - \frac{k'^2}{2m} - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} + \mu} = -\frac{1}{2\tau}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2\tau} = n\pi u^2 \nu(\varepsilon). \tag{15}$$

Здесь плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ определяется так:

$$\nu = D^{-1}\sum_n \int \frac{dk}{2\pi}\delta\left(E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \frac{k^2}{2m} + \mu\right) + \frac{1}{2D}\int\frac{dk}{2\pi}\delta\left(E_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \frac{k^2}{2m} + \mu\right). \tag{16}$$

Т. о., было выяснено, что

$$\langle\alpha|\hat{G}|\alpha\rangle = \frac{1}{\varepsilon - \xi_\alpha - nu + \frac{i}{2\tau}sgn\varepsilon}. \tag{17}$$

2.2 Расчёт проводимости

Для нахождения проводимости вычислим $\langle\Pi_{yy}(i\omega_n)\rangle$ с использованием мацубаровской техники:

$$\langle\Pi_{yy}(i\omega_n)\rangle = e^2 T\sum_{\varepsilon_k}\sum_\alpha \langle\alpha|\langle\hat{G^M}(i\varepsilon_k + i\omega_n)\hat{v_y}\hat{G^M}(i\varepsilon_k)\hat{v_y}\rangle|\alpha\rangle. \tag{18}$$

Для точечных примесей можно написать, что:

$$\langle\Pi_{yy}(i\omega_n)\rangle = e^2 T\sum_{\varepsilon_k}\sum_\alpha \frac{k^2}{m^2}\frac{1}{i\varepsilon_k + i\omega_n - \xi_\alpha - nu + \frac{i}{2\tau}\mathrm{sgn}(\varepsilon_k+\omega_n)}$$
$$\frac{1}{i\varepsilon_k - \xi_\alpha - nu + \frac{i}{2\tau}\mathrm{sgn}(\varepsilon_k)}. \tag{19}$$

Вычислим интеграл по k (он входит в сумму по α), вводя обозначения:

$$\widetilde{\varepsilon}_k' = \varepsilon_k + \omega_n + \frac{1}{2\tau}\mathrm{sgn}(\varepsilon_k + \omega_n),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \frac{1}{2\tau}\mathrm{sgn}\varepsilon_k,$$

$$\xi_\alpha' = \xi_\alpha - nu.$$

Интеграл тогда примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k^2}{m^2} \frac{1}{\left(i\widetilde{\varepsilon}_k' - \xi_\alpha'\right)\left(i\widetilde{\varepsilon}_k - \xi_\alpha'\right)}. \tag{20}$$

Данный интеграл набирается вблизи $\xi^{'} = 0$ на масштабе $\delta\xi \approx \max[\omega_n, \tau^{-1}]$.

Итак, можно выполнить интегрирование по ξ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi \sqrt{2m\left(\mu - nu - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right)}}{\left(i\widetilde{\varepsilon}_k' - \xi - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right)\left(i\widetilde{\varepsilon}_k - \xi - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2m}\pi} \sqrt{\mu - nu - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\left(i\widetilde{\varepsilon}_k' - \xi - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right)\left(i\widetilde{\varepsilon}_k - \xi - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\mu - nu - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} \frac{\mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}_k' - \mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}_k}{\widetilde{\varepsilon}_k' - \widetilde{\varepsilon}_k}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для дальнейшего продвижения необходимо взять сумму по n. Введём «транспортную» плотность состояний:

$$\tilde{\nu}(E) = 2D^{-1} \sum_\alpha \left(\frac{k}{p}\right)^2 \delta\left(E_\alpha - E\right)$$

и покажем, что интересующая нас сумма выражается через $\tilde{\nu}(E)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(E) = 2D^{-1} \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{k}{p}\right)^2 \delta\left(E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \frac{k^2}{2m}\right) = \\ = 2D^{-1} \sum_n \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2m}}{2\pi E} \sqrt{\varepsilon} \delta\left(E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \varepsilon\right) d\varepsilon = \\ = \frac{D^{-1}\sqrt{2m}}{\pi E} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} = \frac{D^{-2}}{E} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{a^2 - n^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь было введено обозначение $a = \frac{pD}{\pi}$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{m}} \sum_n \sqrt{E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} = \frac{\pi}{mD} \sum_n \sqrt{a^2 - n^2} = \\ = \frac{\pi E D}{m} \tilde{\nu}(E). \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь мы положили $E = \mu - nu$.

Т. о., получаем:

$$\langle \Pi_{yy}(i\omega_n)\rangle = e^2 \frac{\pi ED}{m} T \sum_{\varepsilon_k} \frac{\mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}'_k - \mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}_k}{\widetilde{\varepsilon}'_k - \widetilde{\varepsilon}_k}. \tag{24}$$

Вычислим оставшуюся сумму:

$$T \sum_{\varepsilon_k} \frac{\mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}'_k - \mathrm{sgn}\widetilde{\varepsilon}_k}{\widetilde{\varepsilon}'_k - \widetilde{\varepsilon}_k} = T \sum_{\varepsilon_k} \frac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_k + \omega_n) - \mathrm{sgn}\varepsilon_k}{\omega_n + \frac{1}{2\tau}\left(\mathrm{sgn}(\varepsilon_k + \omega_n) - \mathrm{sgn}\varepsilon_k\right)} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_n}{\omega_n + \tau^{-1}}. \tag{25}$$

Здесь предполагалось $\omega_n > 0$, т. к. σ на действительной частоте будет получена продолжением с верхней полуплоскости.

Т. о., окончательно получаем σ при $\omega = 0$:

$$\sigma = \frac{1}{2} e^2 \tau v_F^2 \tilde{\nu}(\varepsilon_F) D. \tag{26}$$

2.3 Вычисление плотности состояний

В полученную итоговую формулу (26) для проводимости входят две плотности состояний: обычная

$$\nu(\varepsilon) = D^{-1} \sum_{\alpha} \delta\left(\varepsilon - E_\alpha\right)$$

и транспортная

$$\tilde{\nu}(\varepsilon) = D^{-1} \sum_{\alpha} 2 \left(\frac{k}{p}\right)^2 \delta\left(\varepsilon - E_\alpha\right).$$

Используя формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx,$$

вычислим эти плотности состояний:

$$\begin{aligned}
\nu_F = \nu(\varepsilon_F) = D^{-1} \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} \delta\left(E_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \frac{k^2}{2m}\right) = \\
= \frac{1}{D\pi} \sqrt{\frac{m}{2}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{E - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}}} = \frac{m}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - n^2}} = \\
= \frac{m}{2\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{2\pi i k x} - \frac{m}{2\pi^2 a} = \\
= \frac{m}{2\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi J_0(2\pi k a) - \frac{m}{2\pi^2 a} = \frac{m}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(2\pi k a)\right) - \frac{m}{2\pi^2 a}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь $a = \frac{p_F D}{\pi} \gg 1$. Т. о., мы получили, что $\nu_F = \nu_F^{(0)} \left(1 + \Delta\right)$, где:

$$\Delta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0(2\pi k a) - \frac{1}{\pi a}. \tag{28}$$

Вычислим транспортную плотность состояний:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu_F} = 2D^{-1} \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{k}{p_F}\right)^2 \delta\left(E_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \frac{k^2}{2m}\right) = \\
= 2D^{-1} \sum_n \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon} \delta\left(E_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} - \varepsilon\right) d\varepsilon = \\
= \frac{D^{-1}\sqrt{2m}}{\pi\varepsilon_F} \sum_{n=1}^{n_{max}} \sqrt{E_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} = \frac{D^{-2}}{\varepsilon_F} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{a^2 - n^2} = \\
= \frac{D^{-2}}{2\varepsilon_F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} e^{2\pi i k x} dx - \frac{D^{-2}}{2\varepsilon_F} a = \\
= \frac{D^{-2}}{2\varepsilon_F} a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t e^{2\pi i k a \sin t} dt - \frac{p_F}{2D\pi\varepsilon_F} = \\
= \frac{D^{-2}}{2\varepsilon_F} a^2 \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt e^{2\pi i k a \sin t} dt - \right. \\
\left. - \frac{\partial^2}{\partial(2\pi i k a)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt e^{2\pi i k a \sin t} dt\right) - \frac{p_F}{2D\pi\varepsilon_F} = \\
= \frac{p_F^2}{2\pi\varepsilon_F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_1(2\pi k a)}{2\pi k a} - \frac{m}{\pi p_F D} = \frac{m}{2\pi} \left(1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(2\pi k a)}{2\pi k a} - \frac{2}{\pi a}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Аналогично, $\tilde{\nu_F} = \nu_F^{(0)} \left(1 + \tilde{\Delta}\right)$, где $\tilde{\Delta} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(2\pi k a)}{2\pi k a} - \frac{2}{\pi a}$.

В дальнейшем мы будем выделять поправки к сопротивлению на фоне усреднённого по беспорядку сопротивления бесконечной плоскости. Поправка имеет вид:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1 + \Delta}{1 + \tilde{\Delta}} \approx \Delta - \tilde{\Delta}. \tag{30}$$

Пользуясь асимптотикой функций $J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$ и $J_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right)$ при $z \gg 1$, находим:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{2}{\pi\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi k a - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\pi^2 a^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi k a - \frac{3\pi}{4}\right)}{k^{3/2}} + \frac{1}{\pi a}. \tag{31}$$

Легко видеть, что первая сумма расходится при $a = N$.

Выясним, по какому закону она расходится. Для этого удобно ввести функцию

$$S(z) = e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{izn}}{\sqrt{n}},$$

через которую первый член в (31) переписывается в виде: $\frac{2}{\sqrt{\pi p_F D}} \mathrm{Re} S(2p_F D)$.

Асимптотика функции $S(z)$ при $z - 2\pi N = \delta z \ll 1$ имеет вид:

$$S(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\delta z}}, \delta z > 0;$$

$$S(z) \approx -i\sqrt{\frac{\pi}{|\delta z|}}.$$

Таким образом, находим, что при $p_F D - \pi N > 0$ имеем корневую расходимость:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \sqrt{\frac{2}{p_F D(p_F D - \pi N)}}. \tag{32}$$

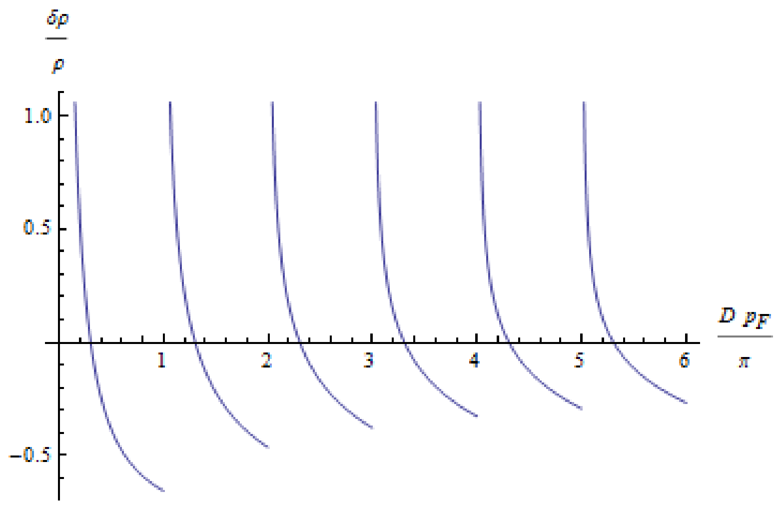

Рис. 2. График зависимости $\frac{\delta\rho}{\rho}(p_F D)$ в борновском приближении.

При $p_F D \to \pi N - 0$ расходимость отсутствует.

Расходимость поправки легко интерпретировать: в борновском приближении $\rho \sim \nu_F$. В нашем случае спектр свободного гамильтониана имеет вид $\frac{\pi^2 n^2}{2mD^2} + \frac{k^2}{2m}$, т. е. присутствуют одномерные подзоны (нумеруются числом n). В таком случае, как известно, плотность состояний расходится корневым образом, т. е. ведёт себя как $\frac{1}{\sqrt{E-E_n}}$, где E_n - положение дна подзоны с номером n, что и было получено нами для ρ.

Итак, нами была получена нефизическая расходимость. Попробуем учесть неборновские поправки и выяснить, к каким изменениям в полученной картине они приводят.

3 Рассеяние на примеси в неборновском приближении

3.1 Вычисление функции Грина в полосе

Рассмотрим одну примесь $V(r) = V\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$, где $\mathbf{r_0} = (d, 0)$, причём границы полосы всё так же задаются условиями $x = 0$, $x = D$.

Уравнение Дайсона для функции Грина в полосе имеет вид:

$$\widehat{G} = \widehat{G}_0 + \widehat{G}_0\widehat{V}\widehat{G}. \tag{33}$$

Здесь $\widehat{G}$ - функция Грина в полосе при наличии примеси, $\widehat{G}_0$ - функция Грина свободной частицы в полосе.

Переходя к координатному представлению, получим:

$$G(r_0, r) = G_0(r_0, r) + G_0(r_0, r_0)VG(r_0, r). \tag{34}$$

Отсюда легко выражается $G(r_1, r_2)$:

$$G(r_0, r) = \frac{G_0(r_0, r)}{1 - G_0(r_0, r_0)V}. \tag{35}$$

Теперь найдём $G_0(r_0, r)$: она должна удовлетворять уравнению Шрёдингера

$$(\varepsilon - \widehat{H})G_0(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)$$

и обращаться в 0 при $x = 0$ и $x = D$.

Для нахождения функции Грина воспользуемся методом изображений. А именно, попробуем удовлетворить граничному условию при $x = 0$, для чего напишем:

$$G(x, x^{'}) = G_0(x, x^{'}) - G_0(-x, x^{'}).$$

Теперь необходимо удовлетворить граничному условию на $x = D$:

$$G(x, x^{'}) = G_0(x, x^{'}) - G_0(-x, x^{'}) + G_0(2D + x, x^{'}) - G_0(2D - x, x^{'}).$$

Но теперь не выполняется условие на границе $x = 0$.

Т. о., из метода изображений получается бесконечная сумма для $G(x, x^{'})$:

$$\begin{aligned} G(x,x^{'}) = G_0(x,x^{'}) - G_0(-x,x^{'}) + G_0(2D+x,x^{'}) - G_0(-2D-x,x^{'}) + \\ + G_0(4D+x,x^{'}) - G_0(-4D-x,x^{'}) + \ldots - \\ - G_0(2D-x,x^{'}) + G_0(-2D+x,x^{'}) - G_0(4D-x,x^{'}) + G_0(-4D+x,x^{'}) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(G_0(2nD+x,x^{'}) - G_0(-2nD-x,x^{'}) - \\ - G_0(2(n+1)D-x,x^{'}) + G_0(-2(n+1)D+x,x^{'})). \end{aligned} \tag{36}$$

Пользуясь трансляционной инвариантностью G_0, окончательно находим:

$$\begin{aligned} G(d,d) = \sum_{n=0}^{\infty}(G_0(2nD) - G_0(2nD+2d) - \\ - G_0(2(n+1)D-2d) + G_0(2(n+1)D)) = G_0(0) - G_0(2d) + 2\sum_{n=1}^{\infty}G_0(2nD) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}(G_0(2nD+2d) + G_0(2nD-2d)). \end{aligned} \tag{37}$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначение:

$$G(d,d) = G_0(d,d) + iU,$$

где функция U даётся выражением:

$$U = i\left(G_0(2d) - \sum_{n=1}^{\infty}(2G_0(2nD) - G_0(2nD+2d) - G_0(2nD-2d))\right). \tag{38}$$

Здесь $G_0(r) = iH_0^{(1)}(p_F r)$ - точная функция Грина на плоскости.

Т. к. $p_F D \gg 1$, можно воспользоваться асимптотикой функции Ганкеля:

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-\pi/4)}\left(1 - \frac{i}{8z} - \frac{9}{128z^2}\right) = u(z)e^{i(z-\pi/4)}. \tag{39}$$

Выражение (38) для U в пределе $p_F D \gg 1$ принимает вид:

$$\begin{aligned} U = \Bigg(- H_0^{(1)}(2p_F d) - H_0^{(1)}(2p_F(D-d)) + \sum_{n=1}^{\infty}(2u(2np_F D)e^{i(2np_F D-\pi/4)} - \\ - u(2np_F D+2p_F d)e^{i(2np_F D+2p_F d-\pi/4)}) - \sum_{n=2}^{\infty}u(2np_F D-2p_F d)e^{i(2np_F D-2p_F d-\pi/4)})\Bigg). \end{aligned} \tag{40}$$

3.2 Перенормировка времени рассеяния

Неборновские поправки проявляются в необходимости учесть в выражении для собственно-энергетической части многократное рассеяние на одной и той же примеси.

Т. о., имеем:

$$\Sigma = \sum_d \langle \alpha | \widehat{T} | \alpha \rangle. \tag{41}$$

Здесь $\widehat{T} = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0\widehat{V} + ...$, а под суммой по d подразумевается суммирование по всем примесям.

Вычислим $\mathrm{Im}\Sigma$ (это соответствует перенормировке входящего в проводимость времени рассеяния) из теоремы унитарности для $\widehat{T}$ (вывод теоремы унитарности взят из [2], гл. 3, задача 15):

$$\langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle - \langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle^* = \sum_{\alpha''} \langle \alpha | \widehat{T} | \alpha'' \rangle \langle \alpha'' | \widehat{G}^R - \widehat{G}^A | \alpha'' \rangle \langle \alpha'' | \widehat{T} | \alpha' \rangle. \tag{42}$$

Т. к. в диагональном представлении $\langle \alpha'' | \widehat{G}^R - \widehat{G}^A | \alpha'' \rangle = -2\pi i \delta \left(\varepsilon - \xi_{\alpha''} \right)$, то, используя это равенство и полагая $\alpha' = \alpha$, получим:

$$\mathrm{Im}\Sigma = -\pi \sum_d \sum_{\alpha'} |\langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle|^2 \delta \left(\varepsilon - \xi_{\alpha'} \right). \tag{43}$$

Обратимся к случаю бесконечной плоскости. Легко видеть, что, если амплитуда рассеяния не зависит от углов, то, обозначая $\langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle = \Lambda_\infty = \mathrm{const}$ (в случае бесконечной плоскости, разумеется, $|\alpha\rangle \to |k\rangle$), получим, что $\frac{1}{2\tau} = \pi N \nu(\varepsilon) |\Lambda_\infty|^2$.

Теперь вернёмся к случаю полосы и найдём связь между $\langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle$ и Λ_∞. Рассмотрим точечную примесь сначала на бесконечной плоскости и формально просуммируем для неё ряд для амплитуды рассеяния:

$$\Lambda_\infty = \langle k | \widehat{T} | k \rangle = V + V G_0(d,d) V + ... = \frac{V}{1 - G_0(d,d)V}. \tag{44}$$

В полосе выражение для функции Грина изменяется: $G(d,d) = G_0(d,d) + iU$, – соответственно, имеем:

$$\begin{gathered} \langle \alpha | \widehat{T} | \alpha' \rangle = \langle \alpha | r_0 \rangle \langle r_0 | \alpha' \rangle \left(V + V G(d,d) V + ... \right) = \\ = \frac{2}{D} \sin\left(\frac{\pi n d}{D}\right) \sin\left(\frac{\pi n' d}{D}\right) \frac{V}{1 - G(d,d)V} = \frac{2}{D} \sin\left(\frac{\pi n d}{D}\right) \sin\left(\frac{\pi n' d}{D}\right) \Lambda^{(\mathrm{ren})} \end{gathered} \tag{45}$$

. Здесь мы ввели обозначение $\Lambda^{(\mathrm{ren})} = \frac{\Lambda_\infty}{1 - i\Lambda_\infty U}$. Таким образом, выражение для τ^{-1} перепишется так:

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi \sum_{\alpha', d} \frac{4}{D^2} \sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right) \sin^2\left(\frac{\pi n' d}{D}\right) |\Lambda^{(\mathrm{ren})}|^2 \delta(\varepsilon - \xi_{\alpha'}). \tag{46}$$

3.3 Вычисление проводимости

С учётом выражения для τ^{-1} имеем:

$$\sigma = e^2 \sum_n \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\varepsilon_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} \tau =$$

$$= e^2 \sum_n \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\varepsilon_F - \frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{4}{D^2} \sum_d \sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right) |\Lambda^{(\mathrm{ren})}|^2 \sum_{\alpha'} \sin^2\left(\frac{\pi n' d}{D}\right) \delta(\varepsilon - \xi_{\alpha'})}. \tag{47}$$

Оценим сумму по n, заменив суммирование на интегрирование:

$$\sum_n \frac{\sqrt{a^2 - n^2}}{\sum_d A(d) \sin^2(\frac{\pi n d}{D})} \approx \int_1^a \frac{dn\sqrt{a^2 - n^2}}{\sum_d A(d) \sin^2(\frac{\pi n d}{D})} \approx$$

$$\approx \int_0^a \frac{dn\sqrt{a^2 - n^2}}{\frac{1}{2}\sum_d A(d)} = \frac{\pi a^2}{2\sum_d A(d)}. \tag{48}$$

Здесь синусы под интегралом заменены на средние значения (быстро осциллируют на фоне $\sqrt{a^2 - n^2}$), т. к. в нашем рассмотрении мы предполагаем, что:

$$p_F d \gg 1 \text{ и } p_F(D - d) \gg 1$$

(более детальное обсуждение этого вопроса имеется ниже, в разделе 4 «Нерезонансный случай»).

Здесь и ниже используется обозначение $a = \frac{p_F D}{\pi}$.

Итак, имеем:

$$\sigma = \frac{e^2 p_F^2 D^2}{16\pi m} \frac{1}{\sum_d |\Lambda^{(\mathrm{ren})}|^2, \nu(\varepsilon, d)}, \tag{49}$$

где:

$$\nu(\varepsilon, d) = D^{-1} \sum_\alpha \sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right) \delta\left(\varepsilon - \xi_\alpha\right). \tag{50}$$

Вычислим $\nu(\varepsilon, d)$, используя формулу суммирования Пуассона:

$$\nu(\varepsilon,d) = D^{-1}\sum_\alpha \sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right)\delta\left(\varepsilon-\xi_\alpha\right) =$$
$$= D^{-1}\sum_n \int \frac{dk}{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right)\delta\left(\varepsilon-\xi_\alpha\right) =$$
$$= \frac{D^{-1}}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2}}\sum_n\int_0^{+\infty}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right)\delta\left(\varepsilon_F-\varepsilon-\frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}\right) =$$
$$= \frac{D^{-1}}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2}}\sum_n\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right)}{\sqrt{\varepsilon_F-\frac{\pi^2 n^2}{2mD^2}}} = \frac{m}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n_{\max}}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n d}{D}\right)}{\sqrt{a^2-n^2}} =$$
$$= \frac{m}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\sin^2\left(\frac{\pi x d}{D}\right)e^{2\pi i k x} =$$
$$= \frac{m}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2}J_0(2\pi k a)-\frac{\pi}{4}\Big\{J_0(2\pi a(k+d/D))+J_0(2\pi a(k-d/D))\Big\}\right] =$$
$$= \frac{m}{2\pi}\Bigg[1+2\sum_{k=1}^{\infty}J_0(2\pi k a)-J_0(2\pi a d/D)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{J_0(2\pi a(k-d/D))+J_0(2\pi a(k+d/D))\Big\}\Bigg]. \tag{51}$$

Легко видеть, что $\nu(\varepsilon,d) = \frac{m}{2\pi}\left(1+\mathrm{Re}U\right)$.

Выделим осцилляции сопротивления на фоне среднего значения для бесконечной плоскости: $\sigma_0 = \frac{1}{2}e^2\tau v_F^2\tilde{\nu}(\varepsilon_F)D$, где $\tau^{-1} = 2\pi n\nu(\varepsilon_F)|\Lambda_\infty|^2$.

Для относительного изменения сопротивления имеем:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \sum_d \frac{1+ReU}{|1-i\Lambda_\infty U|^2}-1. \tag{52}$$

Далее, исследуем отдельно резонансный и нерезонансный случай.

4 Нерезонансный случай

В этом случае в выражении (52) можно выполнить разложение по малости U:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho}\bigg|_{Born} + \frac{\delta\rho}{\rho}\bigg|_{Non-Born}, \tag{53}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\bigg|_{Born} = \mathrm{ReU}, \tag{54}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\bigg|_{Non-Born} = -2\mathrm{ReU}\cdot\mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\} - |\Lambda_\infty U|^2 + 4(\mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\})^2. \tag{55}$$

Из вида ReU в формуле (51) имеем: ReU $= \Delta + \Delta_1(d)$. Здесь Δ - та же самая, что фигурировала при рассмотрении борновского приближения.

Для $\Delta_1(d)$ справедливо выражение:

$$\Delta_1(d) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2p_F(kD+d)-\pi/4\right)}{\sqrt{\pi p_F(kD+d)}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2p_F(kD-d)-\pi/4\right)}{\sqrt{\pi p_F(kD-d)}}. \tag{56}$$

Подставляя выражение для $\Lambda_\infty = \lambda e^{i\arcsin\lambda}$ и выражение (40) для U, найдём:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U}) = -\lambda^2\big[\mathrm{J_0(2p_Fd) + J_0(2p_F(D-d))}\big] - \\ -\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\big[N_0(2p_Fd) + N_0(2p_F(D-d))\big] + \\ +\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi n p_F D}}\sin\left(2np_FD - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) - \right. \\ \left. -\frac{1}{\sqrt{\pi p_F(nD+d)}}\sin(2np_FD + 2p_Fd - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) - \\ -\lambda\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi p_F(nD-d)}}\sin(2np_FD - 2p_Fd - \pi/4 + \arcsin\lambda),\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U}) = -\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\big[\mathrm{J_0(2p_Fd) + J_0(2p_F(D-d))}\big] - \\ +\lambda^2\big[N_0(2p_Fd) + N_0(2p_F(D-d))\big] + \\ +\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi n p_F D}}\cos\left(2np_FD - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) - \right. \\ \left. -\frac{1}{\sqrt{\pi p_F(nD+d)}}\cos(2np_FD + 2p_Fd - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) - \\ -\lambda\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi p_F(nD-d)}}\cos(2np_FD - 2p_Fd - \pi/4 + \arcsin\lambda).\end{aligned} \tag{58}$$

Из полученных выражений видно, что поправка начинает расходиться при $d \to 0$. Это происходит из-за того, что в этом пределе Λ_∞ также начинает зависеть от d. Поэтому далее будем считать, что $p_F d \gg 1$, и $p_F(D-d) \gg 1$, и Λ_∞ не зависит от d:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U}) = -\lambda \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n p_F D}}} \sin\left(2\mathrm{np_F D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) - \\ - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD+d)}} \sin(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda) - \\ - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD-d)}} \sin(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda),\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U}) = \lambda \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n p_F D}}} \cos\left(2\mathrm{np_F D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) - \\ - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD+d)}} \cos(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda) - \\ - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD-d)}} \cos(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda).\end{aligned} \tag{60}$$

Выполняя усреднение по d, считая его распределённым равномерно, получим следующие ответы (детали этого вычисления можно найти в приложении A):

Если $p_F D(p_F D - \pi N) \gg 1$, но $p_F D - \pi N \ll 1$, то:

$$\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{Non-Born} \approx \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2} + 6\lambda^4}{p_F D(p_F D - \pi N)}. \tag{61}$$

В случае $p_F D \to \pi N - 0$ получаем:

$$\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{Non-Born} \approx \frac{5\lambda^2 - 6\lambda^4 - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{p_F D(\pi N - p_F D)}. \tag{62}$$

5 Резонансный случай

5.1 Аналитические свойства перенормированной амплитуды рассеяния

Выражение для перенормированной амплитуды имеет вид:

$$\Lambda^{(ren)} = \frac{\Lambda_\infty}{1 - i\Lambda_\infty U}. \tag{63}$$

Т. к. функция U подавлена малым множителем $(p_F D)^{-1/2}$, а $|\Lambda| < 1$, то полюс $\Lambda^{(\mathrm{ren})}$ может возникать лишь в случае расходимости U.

Выясним, когда функция U может вести себя резонансным образом.

Выражение для U имеет вид:

$$U = \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n p_F D}} e^{i(2np_F D - \pi/4)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD+d)}} e^{i(2np_F D + 2p_F d - \pi/4)}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD-d)}} e^{i(2np_F D - 2p_F d - \pi/4)}) \right). \tag{64}$$

Введём в рассмотрение функцию:

$$S_a(z) = e^{-i\pi/4 + iza} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{izn}}{\sqrt{n+a}},$$

$S_0(z) \equiv S(z)$, тогда выражение для U перепишется так:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi p_F D}} \left(2S_0(2p_F D) - S_{d/D}(2p_F D) - S_{-d/D}(2p_F D) \right). \tag{65}$$

Если $p_F D \to \pi N$, в то время как $p_F d \neq \pi M$, то U расходится корневым образом:

$$\begin{aligned} 2S_0(2p_F D) - S_{d/D}(2p_F D) - S_{-d/D}(2p_F D) = \\ = e^{-i\pi/4} \int_1^{\infty} dn e^{in\delta z} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{e^{iz_1}}{\sqrt{n+a}} - \frac{e^{-iz_1}}{\sqrt{n-a}} \right) \approx \\ \approx 2e^{-i\pi/4} \left(1 - \cos z_1\right) \int_1^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n}} e^{in\delta z}. \end{aligned} \tag{66}$$

Здесь $z_1 = 2p_F d$.

Итак,

$$U \approx \begin{cases} 2\,(1-\cos z_1)\,\frac{1}{\sqrt{\pi p_F D}}\sqrt{\frac{\pi}{\delta z}}, & \delta z = 2(p_F D - \pi N) > 0; \\ -2i\,(1-\cos z_1)\,\frac{1}{\sqrt{\pi p_F D}}\sqrt{\frac{\pi}{|\delta z|}}, & \delta z < 0. \end{cases} \tag{67}$$

Однако эта расходимость может быть подавлена при $\delta z_1 = |z_1 - 2\pi M| \ll 1$: для этого достаточно, чтобы $|\delta z_1| \ll |\delta z p_F D|^{1/4}$.

Теперь, рассматривая $\Lambda^{(\mathrm{ren})}$ как функцию комплексного переменного δz, найдём её полюс:

$$\delta z = -\frac{16\sin^4(p_F d)}{p_F D}\Lambda_\infty^2 = -\frac{16\sin^4(p_F d)}{p_F D}\lambda^2\left(1 - 2\lambda^2 + 2i\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right). \tag{68}$$

Из полученной формулы легко видеть, что, не проводя усреднения по положению примесей, мы получили бы набор пиков слева от старого резонанса $p_F D = \pi N$ в полосе шириной $\sim \frac{\lambda^2}{N}$. Оценим ширины получающихся пиков.

Вблизи резонанса знаменатель выражения (63) представим в виде:

$$\left(\pi N\delta z + 16\sin^2(p_F d)\lambda^2\right)^2 + \left(32\sin^4(p_F d)\lambda^3\right)^2.$$

Отсюда характерная ширина пика $\frac{\lambda^3}{N}$. При усреднении по беспорядку должна получиться плавная огибающая с большей (как мы увидим, параметрически) шириной. Высота пика $\frac{\rho}{\rho_0} \sim \frac{1}{\lambda^2}$.

5.2 Усреднение сопротивления по положению примеси

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \sum_d \frac{1 + \mathrm{Re}U}{|1 - i\Lambda_\infty U|^2} - 1 = \frac{\rho}{\rho_0} - 1. \tag{69}$$

Отсюда и ниже происходит смена обозначений.

Ранее ρ - неборновское сопротивление бесконечной плоскости, $\delta\rho$ - разность сопротивления конечной и бесконечной плоскости.

Теперь ρ_0 - сопротивление бесконечной плоскости, ρ - сопротивление полосы.

Усредним выражение $\frac{1+\mathrm{ReU}}{|1-i\Lambda_\infty U|^2}$ по d, имея в виду случай близости к старому резонансу. Как мы выяснили ранее, асимптотика U вблизи резонанса имеет вид:

$$U \approx \frac{2\sqrt{2}\sin^2(p_F d)}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}. \tag{70}$$

Пусть $p_F D - \pi N > 0$. Расписывая знаменатель, имеем:

$$\frac{1}{1 + |\Lambda_\infty U|^2 + 2\mathrm{Im}\,(\Lambda_\infty U)} = \\ = \frac{1}{1 + \frac{8\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)} \sin^4(p_F d) + \frac{4\sqrt{2}\lambda^2 \sin^2(p_F d)}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}}. \tag{71}$$

Используем значения следующих интегралов:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + a\sin^4 x + 2b\sin^2 x} = \\ = \frac{\pi}{2(1+a+2b)\sqrt{b^2-a}} \Bigg((a+b) \Bigg(-\sqrt{1+b-\sqrt{-a+b^2}} + \\ + \sqrt{1+b+\sqrt{-a+b^2}} \Bigg) + \sqrt{b^2-a} \Bigg(\sqrt{1+b-\sqrt{-a+b^2}} + \\ + \sqrt{1+b+\sqrt{-a+b^2}} \Bigg) \Bigg), \tag{72}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1 + a\sin^4 x + 2b\sin^2 x} = \\ = \frac{\pi}{2(1+a+2b)\sqrt{b^2-a}} \Bigg((1+b) \Bigg(\sqrt{1+b-\sqrt{-a+b^2}} - \\ - \sqrt{1+b+\sqrt{-a+b^2}} \Bigg) + \sqrt{b^2-a} \Bigg(\sqrt{1+b-\sqrt{-a+b^2}} + \\ + \sqrt{1+b+\sqrt{-a+b^2}} \Bigg) \Bigg). \tag{73}$$

В данном случае $a = \frac{8\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)}$, $b = \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}$. Путём простого преобразования можно показать, что выражение для сопротивления имеет вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\pi}{\left(1 + \frac{8\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)} + \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}\right)^{3/4}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(1 + \frac{8\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)} \cdot \frac{1-\lambda^2}{\left(1 + \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}\right)^2}\right)^{-1/2}\right)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \left(1 + \frac{8\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)} \cdot \frac{1-\lambda^2}{\left(1 + \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}\right)^2}\right)^{-1/2}\right)} \cdot$$

$$\left. \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}\right) \right\}. \tag{74}$$

Это общая формула для сопротивления, которую нам необходимо исследовать.

Имеются две различные области: вблизи старого резонанса $p_F D(p_F D - \pi N) \ll \lambda^2$ и, как мы покажем ниже, область нового резонанса $p_F D(p_F D - \pi N) \sim \lambda^2$.

В дальнейшем мы сконцентрируемся на случае $|\lambda| \ll 1$ (в этом случае резонанс наиболее резкий, как и в случае $1 - \lambda \ll 1$), тогда появится дополнительная область $\lambda^2 \ll p_F D(p_F D - \pi N) \ll 1$.

5.3 Аналитические свойства сопротивления

Покажем, что у найденной функции $\frac{\rho}{\rho_0}$ есть полюс на мнимой оси по переменной $p_F D$ (в дальнейшем для удобства будем рассматривать комплексную переменную

$$\delta z = 2p_F D(p_F D - \pi N).$$

Из вида выражений (72), (73) легко находится условие на полюс: $1 + a + 2b = 0$, где

$$a = \frac{16\lambda^2}{|\delta z|},\ b = 4\lambda \mathrm{Im}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arcsin\lambda}}{\sqrt{\delta \mathrm{z}}}.$$

Вводя фазу $\delta z = |\delta z| e^{i\varphi}$, легко находим:

$$|\delta z| + 8\lambda\sqrt{|\delta z|}\sin\left(\arcsin\lambda - \frac{\varphi}{2}\right) + 16\lambda^2 = 0. \tag{75}$$

Из требования наличия неотрицательного решения получаем ответ:

$$\delta z/2 = p_F D(p_F D - \pi N) = -8\lambda^2 e^{2i\arcsin\lambda} = -8\lambda^2\left(1 - 2\lambda^2 + 2i\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right). \tag{76}$$

Рассмотрим случай $\lambda \ll 1$. Тогда $\mathrm{Re}\delta z \gg \mathrm{Im}\delta z$, и полюс близок к вещественной оси. Найдём положение максимума: $p_F D(p_F D - \pi N) = -8\lambda^2$, откуда:

$$p_F D = \pi N - \frac{8\lambda^2}{\pi N}. \tag{77}$$

Находим высоту максимума (она выражается только через λ, т. к. в коэффициенты a, b входит комбинация $p_F D(p_F D - \pi N) = -8\lambda^2$):

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda^{3/2}} \approx \frac{0.71}{\lambda^{3/2}}. \tag{78}$$

5.4 Поведение сопротивления вблизи старого резонанса

Здесь будет удобно дать независимый вывод. Подставив в (72) выражения для a и b при условии $a,\ b \gg 1$, получим:

$$\sqrt{b^2 - a} = i\frac{2\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + b - \sqrt{-a + b^2}} &\approx \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}} - i\frac{2\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2\sqrt{2}\lambda}}{\left(p_F D(p_F D - \pi N)\right)^{1/4}} e^{-i\pi/4 + i\arcsin\lambda/2},\end{aligned} \tag{80}$$

$$\left\langle \frac{1}{|1-i\Lambda_\infty U|^2} \right\rangle = \frac{N}{p_F D} \frac{\pi}{2i2\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \sqrt{2\sqrt{2}\lambda}\,(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4}\,2i$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}-\sqrt{1-\sqrt{1-\lambda^2}}\right) =$$
$$= \frac{N}{p_F D}\frac{\pi}{2^{7/4}\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}\,(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}-\sqrt{1-\sqrt{1-\lambda^2}}\right). \tag{81}$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} =$$
$$= \frac{N}{p_F D}\frac{\pi}{2^{7/4}\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}\,(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}-\sqrt{1-\sqrt{1-\lambda^2}}\right) +$$
$$+ \frac{N}{p_F D}\frac{\pi}{2^{5/4}\lambda^{3/2}\sqrt{1-\lambda^2}}\,(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4}\left\{\left(\sqrt{1-\lambda^2}-\lambda\right)\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\,+\right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{1-\lambda^2}+\lambda\right)\sqrt{1-\sqrt{1-\lambda^2}}\right\}. \tag{82}$$

Т. о., в старом резонансе расходимость оказалась подавленной (сопротивление обращается в ноль при $p_F D \to \pi N + 0$ как $(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4}$).

В пределе малых λ выражение (82) принимает вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{N}{p_F D}\frac{\pi}{2^{3/4}\lambda^{3/2}}\,(p_F D(p_F D-\pi N))^{1/4} \tag{83}$$

Рассмотрим случай $p_F D - \pi N < 0$. Тогда $a = \frac{16\lambda^2}{p_F D|\delta z|}$, $b = -\frac{4\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D|\delta z|}}$.

Имеем:

$$\sqrt{b^2-a} = i\frac{4\lambda^2}{\sqrt{p_F D|\delta z|}}, \tag{84}$$

$$\sqrt{1+b-\sqrt{-a+b^2}} \approx \sqrt{-\frac{4\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D|\delta z|}} - i\frac{4\lambda^2}{\sqrt{p_F D|\delta z|}}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{\lambda}}{(p_F D|\delta z|)^{1/4}}\sqrt{-\sqrt{1-\lambda^2}-i\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{(p_F D|\delta z|)^{1/4}} e^{-i\pi/2+i\arcsin\lambda/2}, \tag{85}$$

$$\left\langle \frac{1}{|1-i\Lambda_\infty U|^2} \right\rangle = \frac{N}{p_F D}\frac{\pi}{2i4\lambda^2}\,(p_F D|\delta z|)^{1/4}\,2\sqrt{\lambda}(-2i)\sin\left(-\pi/2+\arcsin\lambda/2\right) =$$
$$= \frac{N\pi}{p_F D}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(p_F D|\delta z|)^{1/4}}{\lambda^{3/2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{86}$$

Слагаемое вида $\left\langle \frac{\mathrm{ReU}}{|1-i\Lambda_\infty U|^2} \right\rangle$ здесь несущественно, т. к. при $p_F D \to \pi N - 0$ у $S(2p_F D)$ нет расходимости, и в интересующем нас порядке этот член зануляется ($U \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p_F D}} S(2p_F D)$).

Окончательно получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{N\pi}{p_F D} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(p_F D|\delta z|)^{1/4}}{\lambda^{3/2}} \sqrt{1+\sqrt{1-\lambda^2}}, \tag{87}$$

где $\delta z = 2\,(p_F D - \pi N)$.

5.5 Новый резонанс

Полученные формулы для $\frac{\rho}{\rho_0}$ были выведены в предположении $\lambda^2 \gg \sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}$, $\lambda\sqrt{1-\lambda^2} \gg \sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}$. Однако в области $\lambda \sim \sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}$ в действительности имеется дополнительный резонанс. В этом можно убедиться, построив график зависимости $\frac{\rho}{\rho_0}$ от $p_F D$ вблизи старого резонанса:

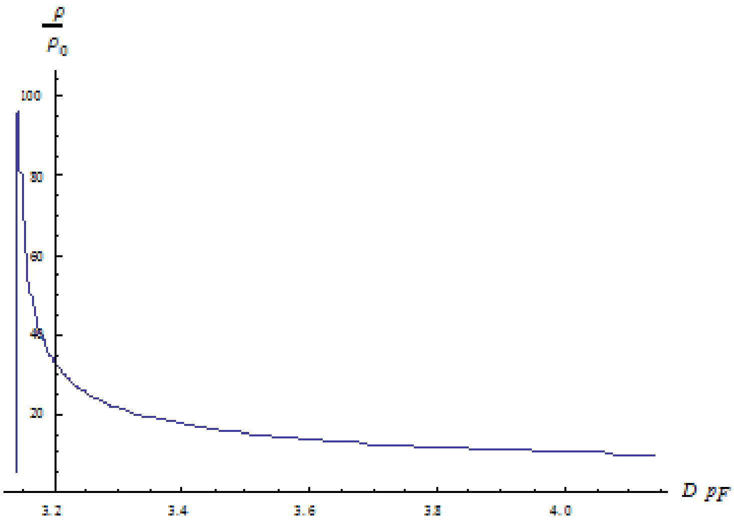

Рис. 3. Зависимость сопротивления от $p_F D$ при $\lambda = 0.026$.

Заметный резонанс присутствует до значения $\lambda = 0.1$, при дальнейшем увеличении λ резонанс сильно сглаживается.

5.6 Анализ случая $p_F D \to \pi N + 0$

Найдём асимптотическую формулу для «хвоста» резонанса из (74):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}. \tag{88}$$

Эта формула в точности воспроизводит ответ, полученный из борновского приближения.

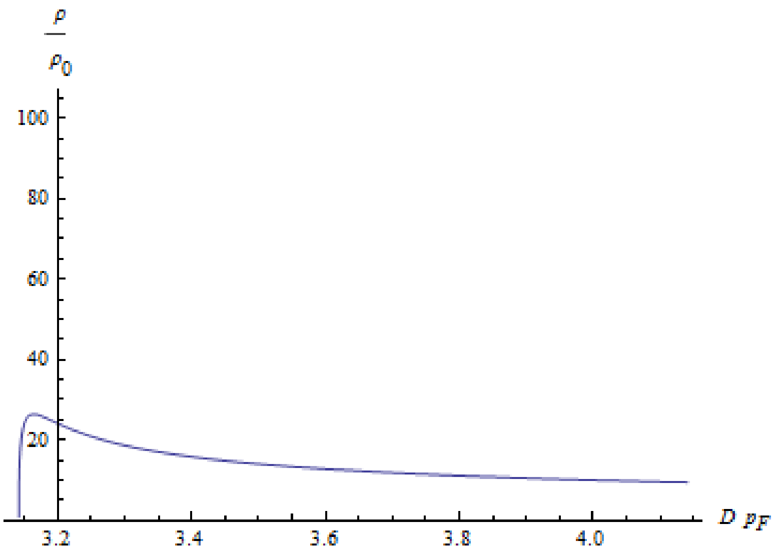

Рис. 4. Зависимость сопротивления от $p_F D$ при $\lambda = 0.1$.

Теперь выясним, как ведёт себя поправка в резонансной области. Для этого в выражении (74) учтём то, что $\lambda \ll 1$. А именно, удержим члены вида $\frac{\lambda^2}{p_F D(p_F D - \pi N)} = a^2$ (т. к. в точке резонанса, как мы увидим, $\frac{\lambda^2}{p_F D(p_F D-\pi N)} \sim 1$) и пренебрежём членами вида $a^2\lambda$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{(1+8a^2)^{3/4}}\left\{ -\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+8a^2}}\right)\right]^{1/2} + \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{2}a\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+8a^2}}\right)\right]^{1/2}\right\}\frac{1}{\lambda} = F(a)\frac{1}{\lambda}. \tag{89}$$

Такое разложение, разумеется, «законно» только в области $p_F D(p_F D - \pi N) \sim \lambda^2$, где $a \sim 1$. У функции $F(a)$ имеется максимум в точке $a = 0.48$, и в этой точке $F(a) = 0.45$ (эти значения найдены численно). Соответственно, $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{0.45}{\lambda}$ и резонанс находится в точке $p_F D = \pi N + 4.34\frac{\lambda^2}{\pi N}$.

Здесь возрастание $\frac{\rho}{\rho_0}$ при $\lambda \to 0$ не должно вызывать недоразумений. Действительно, в этой формуле ρ_0 – удельное сопротивление бесконечной плоскости на единицу (усреднённое по беспорядку), поэтому $\rho_0 \sim \frac{1}{\tau} \sim \lambda^2$ и $\rho \sim \lambda$.

Найдём зависимость ширины резонанса δx от λ и $p_F D$. Формулу (89) можно представить в виде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f(p_F D) = F(a)\frac{1}{\lambda},$$

откуда $\delta x \sim \frac{\lambda^2}{p_F D}$.

Таким образом, ширина резонанса, как и должно быть, уменьшается с ростом $p_F D$. Мы связываем возникновение этого пика со следом от расходимости плотности состояний, т. е. борновское приближение хорошо работает вплоть до области $p_F D(p_F D - \pi N) \sim \lambda^2$, а дальше неборновские поправки обращают сопротивление в ноль. Однако роль неборновских поправок этим не ограничится. Как мы увидим ниже, они приводят к дополнительному резонансу слева от πN.

5.7 Анализ случая $p_F D \to \pi N - 0$

Из общих формул (69), (72) для сопротивления получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{8\lambda^2}{p_F D(\pi N - p_F D)} - \frac{4\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D(\pi N - p_F D)}}\right)^{3/4}} \cdot$$
$$\cdot \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(1 + \frac{8\lambda^4}{p_F D(\pi N - p_F D)} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D(\pi N - p_F D)}}\right)^2}\right)^{-1/2}\right)} \cdot \right.$$
$$\cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p_F D(\pi N - p_F D)}} - \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right) +$$
$$\left. + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \left(1 + \frac{8\lambda^4}{p_F D(\pi N - p_F D)} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{p_F D(\pi N - p_F D)}}\right)^2}\right)^{-1/2}\right)} \right]. \tag{90}$$

Мы ожидаем увидеть наличие резкого максимума в точке $p_F D = \pi N - \frac{8\lambda^2}{\pi N}$.

Как и в предыдущем пункте, введём параметр $a = \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{p_F D(\pi N - p_F D)}}$. В точке резонанса $a = 1$. Наличие такого резонанса видно из Рис. 5.

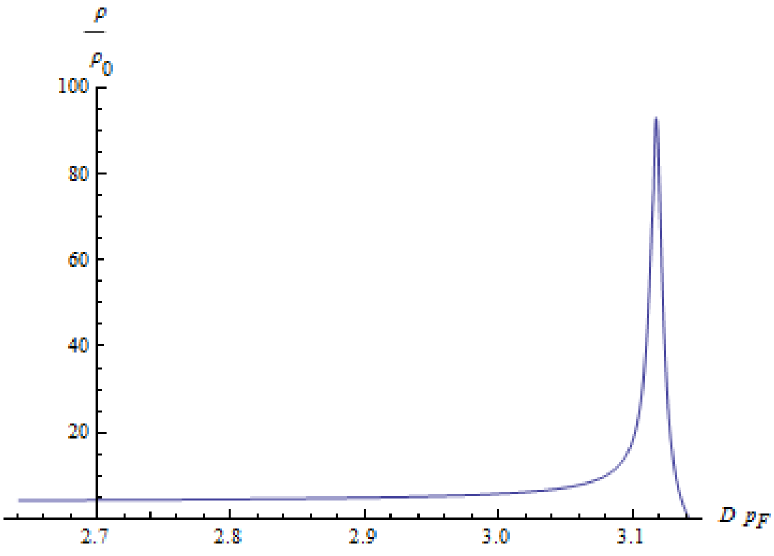

Рис. 5. Зависимость сопротивления от $p_F D$ при $\lambda = 0.1$.

В случае $1-a \ll \lambda$ сопротивление описывается выражением:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\left((1-a)^2 + a\lambda^2\right)^{3/4}}. \tag{91}$$

В области $1-a \sim \lambda$ выражение несколько усложняется:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1-a\sqrt{1-\lambda^2}}{a\lambda}\right)^2\right)^{3/4}} \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\left(1+\left(\frac{\lambda a}{1-a\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2\right)^{-1/2}\right)}\frac{a-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^{5/2}a^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a^{3/2}\lambda^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\left(1+\left(\frac{\lambda a}{1-a\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2\right)^{-1/2}\right)}\right]. \tag{92}$$

Данное выражение зависит от трёх комбинаций: $\frac{a\lambda}{1-a\sqrt{1-\lambda^2}}$, $\frac{a^{3/2}\lambda^{5/2}}{a-\sqrt{1-\lambda^2}}$, $a\lambda$. Находя отсюда масштаб изменения всей функции (т.е. характерную ширину резонанса Γ), получим: $\Gamma \sim \frac{\lambda^{5/2}}{N}$. Это параметрически больше, чем ширина в случае δ-легирования ($\frac{\lambda^3}{N}$), полученная при обсуждении аналитических свойств амплитуды рассеяния.

Наконец, при $1-a \gg \lambda$ имеем: $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{(1-a)^{3/2}}(1-a/2)$, что при $p_F D(\pi N - p_F D) \gg \lambda^2$ переходит в $\frac{\delta\rho}{\rho} = 1+a$.

6 Результаты

Нами было исследовано сопротивление полосы с примесями.

Было выяснено, что в борновском приближении сопротивление расходится при $p_F D \to \pi N + 0$. Неборновские поправки обращают в ноль ρ в точке старого резонанса, и, кроме этого, возникают дополнительные максимумы слева и справа от πN.

Максимум слева мы связываем с наличием у примеси квазистационарного состояния, а максимум справа - со следом от расходимости плотности состояний.

В усреднённом случае правый максимум имеет ширину $\delta(p_F D)_{res} \sim \frac{\lambda^2}{N}$ и высоту $\frac{\rho}{\rho_0} \sim \lambda^{-1}$. Левый максимум уже ($\delta(p_F D)_{res} \sim \frac{\lambda^{5/2}}{N}$) и выше ($\frac{\rho}{\rho_0} \sim \lambda^{-3/2}$). В случае δ-легирования левый максимум становится ещё уже и выше: $\delta(p_F D)_{res} \sim \frac{\lambda^3}{N} \sin^4(p_F d)$ и $\frac{\rho}{\rho_0} \sim \lambda^{-2}$. Правый максимум остаётся почти таким же, как в усреднённом случае.

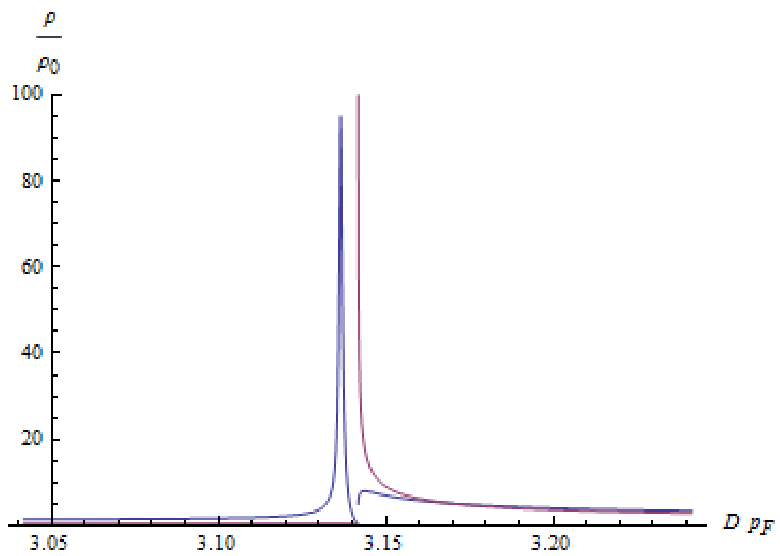

Рис. 6. Зависимость поправки от $p_F D$. $\lambda = 0.046$ Здесь красная линия - борновское приближение

Более детально поведение $\frac{\rho}{\rho_0}(p_F D)$ представлено ниже.

6.1 $p_F D \to \pi N + 0$

Таким образом, вблизи старого резонанса имеются 4 различные области:

I: $p_F D(p_F D - \pi N) \ll \lambda^2 \ll 1$. Здесь $\frac{\rho}{\rho_0} \sim \lambda^{-3/2} \left(p_F D(p_F D - \pi N)\right)^{1/4}$.

II: $p_F D(p_F D - \pi N) \sim \lambda^2$. Это область резонанса. Положение резонанса: $p_F D = \pi N + 4.34\frac{\lambda^2}{\pi N}$. Амплитуда резонанса $\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{0.47}{\lambda}$. Полуширина $\delta(p_F D)_{res} \sim \frac{\lambda^2}{p_F D}$. Поведение поправки описывается формулой (89).

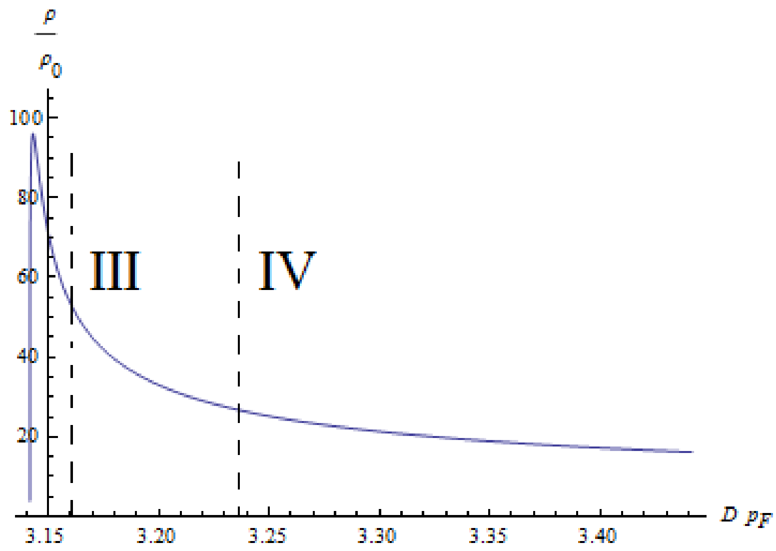

Рис. 7. Зависимость поправки от $p_F D$ при $\lambda = 0.026$.

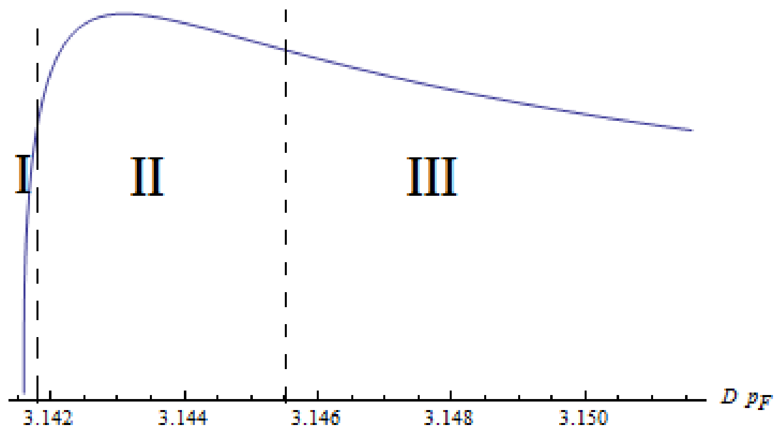

Рис. 8. Зависимость поправки от $p_F D$ при $\lambda = 0.026$.

III: $\lambda^2 \ll p_F D(p_F D - \pi N) \ll 1$. Здесь $\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_F D(p_F D - \pi N)}}$.

IV: $p_F D(p_F D - \pi N) \gg 1$. Это пертурбативный режим. $\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{Non-Born} \approx \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}+6\lambda^4}{p_F D(p_F D - \pi N)}$.

6.2 $p_F D \to \pi N - 0$

I: $p_F D(\pi N - p_F D) \ll \lambda^2 \ll 1$. Здесь $\frac{\rho}{\rho_0} \sim \lambda^{-3/2} \left(p_F D(\pi N - p_F D)\right)^{1/4}$.

II: $p_F D(\pi N - p_F D) \sim \lambda^2$. Это область резонанса. Положение резонанса: $p_F D = \pi N - 8\frac{\lambda^2}{\pi N}$. Амплитуда резонанса $\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{0.71}{\lambda^{3/2}}$. Полуширина $\delta(p_F D)_{res} \sim \frac{\lambda^2}{p_F D}$. Поведение поправки описывается формулой (92).

III: $1 - a \gg \lambda$. Здесь $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{(1-a)^{3/2}}\left(1 - a/2\right)$, $a = \frac{2\sqrt{2}\lambda}{p_F D(\pi N - p_F D)}$.

IV: $p_F D(\pi N - p_F D) \gg 1$. Это пертурбативный режим. $\left.\frac{\delta\rho}{\rho}\right|_{Non-Born} \approx \frac{-\lambda\sqrt{1-\lambda^2}-6\lambda^4+5\lambda^2}{p_F D(\pi N - p_F D)}$.

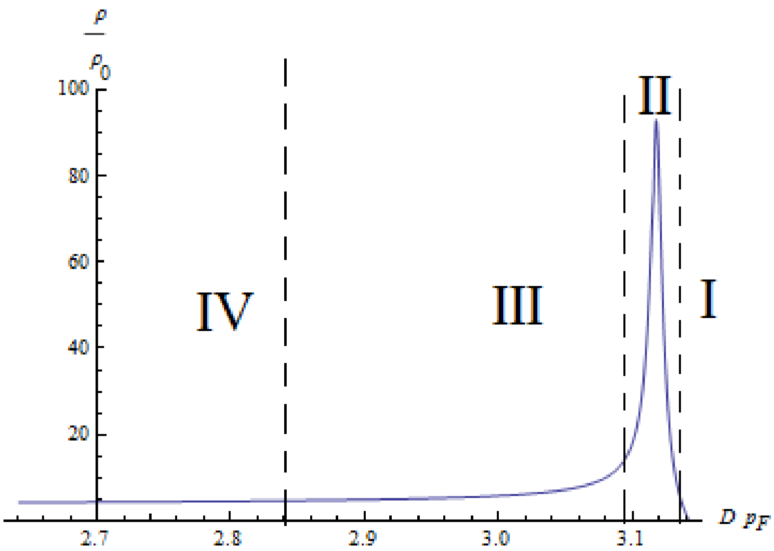

Рис. 9. Зависимость сопротивления от $p_F D$ при $\lambda = 0.1$.

Благодарности

Я выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Алексею Соломоновичу Иоселевичу за множественные обсуждения и помощь в решении этой задачи.

A Усреднение поправки в нерезонансном случае

$$\langle \mathrm{Re}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle = \lambda \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n} \mathrm{p_F} \mathrm{D}}} \cos\left(2\mathrm{n}\mathrm{p_F}\mathrm{D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right), \tag{93}$$

$$\langle \mathrm{Im}\,(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle = -\lambda \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n} \mathrm{p_F} \mathrm{D}}} \sin\left(2\mathrm{n}\mathrm{p_F}\mathrm{D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right). \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Re}^2\,(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle = \lambda^2 \left(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n} \mathrm{p_F} \mathrm{D}}} \cos\left(2\mathrm{n}\mathrm{p_F}\mathrm{D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right)\right)^2 + \\
+ \lambda^2 \left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD + d)}} \cos(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right)^2 \right\rangle + \\
+ \lambda^2 \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD - d)}} \cos(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right)^2 \right\rangle + \\
+ 2\lambda^2 \Bigg\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD + d)}} \cos(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) \cdot \\
\cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD - d)}} \cos(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) \Bigg\rangle,
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Im}^2\,(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle = \lambda^2 \left(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n} \mathrm{p_F} \mathrm{D}}} \sin\left(2\mathrm{n}\mathrm{p_F}\mathrm{D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right)\right)^2 + \\
+ \lambda^2 \left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD + d)}} \sin(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right)^2 \right\rangle + \\
+ \lambda^2 \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD - d)}} \sin(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right)^2 \right\rangle + \\
+ 2\lambda^2 \Bigg\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD + d)}} \sin(2np_F D + 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) \cdot \\
\cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p_F (nD - d)}} \sin(2np_F D - 2p_F d - \pi/4 + \arcsin\lambda)\right) \Bigg\rangle.
\end{aligned} \tag{96}$$

Покажем, как вычисляется среднее вида:

$$\left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(A_n + \varphi)\right)^2 \right\rangle. \tag{97}$$

$$\left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(A_n+\varphi) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n a_k \cos(A_n+\varphi)\cos(A_k+\varphi) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n,k=0}^{\infty} a_n a_k \cos(A_n - A_k) = \frac{1}{4}\sum_{n,k=0}^{\infty} a_n a_k e^{i(A_n-A_k)} + \frac{1}{4}\sum_{n,k=0}^{\infty} a_n a_k e^{i(A_k-A_n)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{iA_n}\right|^2. \tag{98}$$

Т. о., получаем выражения для $\langle \mathrm{Im}^2(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle$, $\langle \mathrm{Re}^2(\Lambda_\infty \mathrm{U})\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Re}^2\left(\Lambda_\infty \mathrm{U}\right)\rangle = \lambda^2 \left(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n p_F D}}} \cos\left(2\mathrm{np_F D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) \right)^2 + \\ + \frac{\lambda^2}{2\pi p_F D}\left(\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right|^2 + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right|^2 \right) + \\ + \frac{\lambda^2 e^{2i\arcsin\lambda}}{4\pi p_F D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right) + \\ + \frac{\lambda^2 e^{-2i\arcsin\lambda}}{4\pi p_F D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ip_F Dn + i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2ip_F Dn + i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right),\end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Im}^2\left(\Lambda_\infty \mathrm{U}\right)\rangle = \lambda^2 \left(\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{n p_F D}}} \sin\left(2\mathrm{np_F D} - \pi/4 + \arcsin\lambda\right) \right)^2 + \\ + \frac{\lambda^2}{2\pi p_F D}\left(\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right|^2 + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right|^2 \right) - \\ - \frac{\lambda^2 e^{2i\arcsin\lambda}}{4\pi p_F D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right) - \\ - \frac{\lambda^2 e^{-2i\arcsin\lambda}}{4\pi p_F D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ip_F Dn + i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2ip_F Dn + i\pi/4}}{\sqrt{n-1/2}}\right).\end{aligned} \tag{100}$$

Осталось усреднить выражение $-2\Delta_1(d)\mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\}$.

Подставляя явные выражения для Δ_1 и $\mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\}$, получим:

$$\begin{aligned}\langle -2\Delta_1(d)\mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\}\rangle = -\frac{2\lambda}{\pi p_F D}\Bigg(\lambda \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right|^2 + \\ + \mathrm{Im}\Bigg(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dk - i\pi/4}}{\sqrt{k+1/2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ip_F Dn - i\pi/4}}{\sqrt{n+1/2}}\right) e^{i\arcsin\lambda} \Bigg)\Bigg).\end{aligned} \tag{101}$$

Рассмотрим случай $p_F D \to \pi N + 0$:

$$\langle \mathrm{Im}^2 \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx \frac{\lambda^2 (6\lambda^2 + 1)}{4 \mathrm{p_F D} (\mathrm{p_F D} - \pi \mathrm{N})}, \tag{102}$$

$$\langle \mathrm{Re}^2 \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx \frac{\lambda^2 (7 - 6\lambda^2)}{4 \mathrm{p_F D} (\mathrm{p_F D} - \pi \mathrm{N})}, \tag{103}$$

$$\langle \mathrm{Im} \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx -\sqrt{\frac{2}{\mathrm{p_F D}}} \frac{\lambda^2}{\sqrt{\mathrm{p_F D} - \pi \mathrm{N}}}, \tag{104}$$

$$\langle -2\Delta_1(d) \mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\} \rangle = \frac{\lambda}{p_F D (p_F D - \pi N)} \left(\sqrt{1 - \lambda^2} - \lambda \right). \tag{105}$$

В случае $p_F D \to \pi N - 0$ имеем:

$$\langle \mathrm{Re}^2 \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx \frac{3\lambda^2 (1 + 2\lambda^2)}{4 \mathrm{p_F D} (\pi \mathrm{N} - \mathrm{p_F D})}, \tag{106}$$

$$\langle \mathrm{Im}^2 \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx \frac{3\lambda^2 (3 - 2\lambda^2)}{4 \mathrm{p_F D} (\pi \mathrm{N} - \mathrm{p_F D})}. \tag{107}$$

Т. к. в этом случае у Δ нет особенности, то, находя $\langle \mathrm{Im} \left(\Lambda_\infty \mathrm{U} \right) \rangle \approx -\sqrt{\frac{2}{\mathrm{p_F D}} \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\pi \mathrm{N} - \mathrm{p_F D}}}}$ и $\langle -2\Delta_1(d) \mathrm{Im}\{\Lambda_\infty U\} \rangle = -\frac{\lambda}{p_F D (\pi N - p_F D)} \left(\sqrt{1 - \lambda^2} + \lambda \right)$, получаем:

$$\left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{Non-Born} \approx \frac{5\lambda^2 - 6\lambda^4 - \lambda\sqrt{1 - \lambda^2}}{p_F D (\pi N - p_F D)}. \tag{108}$$

Список литературы

[1] A. S. Ioselevich. *Oscillations of magnetoresistance in a clean hollow cylinder with fluctuating radius.* Письма в ЖЭТФ, 101 (5), 390-395 (2015) [JETP Letters, 101(5), 358-363 (2015)].

[2] Л. С. Левитов, А. В. Шитов. *Функции Грина: задачи и решения.*

Издательство МЦНМО, Москва, 2016.

[3] J. Zittartz and J. S. Langer. *Theory of bound states in a random potential.* Phys. Rev. 148, 741 (1966).

[4] А. А. Гуцалюк. *Осцилляции магнитосопротивления в тонких висмутовых проволоках.* Выпускная квалификационная работа магистра (2015).

[5] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике.* М., Физматгиз, 1962.

[6] H. Shiba. *Classical spins in superconductors.* Prog. Theor. Phys. (1968) 40 (3): 435-451.

[7] L. Yu. *Bound state in superconductors with paramagnetic impurities.* Acta Phys. Sin. 21, 75 (1965).

[8] A. I. Rusinov. *On the theory of gapless superconductivity in alloys containing paramagnetic impurities.* Sov. Phys. JETP 29, 11016 (1969).

[9] A. V. Balatsky, I. Vekhter, and J.-X. Zhu. *Impurity-induced states in conventional and unconventional superconductors.* Rev. Mod. Phys. 78, 373 (2006).