

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Поверхностная плотность состояний вблизи края
спектра в сверхпроводниках с неоднородной
константой взаимодействия»
(выпускная квалификационная работа)

студента 322 группы
Разумовского М.В.
научный руководитель
к.ф.-м.н., доц. Фоминов Я.В.

Черноголовка 2017

Оглавление

1. Введение	2
1.1. Постановка задачи	2
1.2. Основные уравнения и обозначения	3
1.2.1. Уравнение Узаделя и условие самосогласования	3
1.2.2. Система обозначений для энергетических величин	5
1.2.3. Решение уравнения Узаделя в однородном случае	5
1.2.4. Задача Абрикосова-Горькова	6
1.2.5. Работа Ларкина-Овчинникова	7
2. Нахождение плотности состояний	8
2.1. Флуктуационный пропагатор	8
2.2. Вычисление E_g	9
2.3. Нахождение плотности состояний в окрестности $E = E_g$	13
2.4. Нахождение плотности состояний при $E = \Delta_0$	14
3. Заключение	16

Глава 1.

Введение

1.1. Постановка задачи

Мотивацией для данной работы послужили эксперименты, проведённые группой Клода Шапелье в Гренобле в 2011 году. Одной из целей экспериментов являлось изучение графеновых плёнок, выращенных на поверхности рения. В этих экспериментах в образце содержалось достаточное количество немагнитных примесей для того, чтобы рассматривать рений в грязном пределе¹. В некоторых случаях получалось так, что атомы углерода проникали внутрь образца рения, создавая некоторый градиент концентрации. В таком образце рения было произведено измерение плотности состояний на поверхности с помощью STM. Оказалось, что полученная зависимость согласуется с теорией БКШ качественно, но не количественно. В рамках теории БКШ справедлива теорема Андерсона, которая утверждает, что термодинамические характеристики сверхпроводника не меняют своих значений при наличии в образце немагнитных примесей. Однако результатом эксперимента являлось то, что плотность состояний образца рения, в котором имелся градиент концентрации углерода, отличалась от плотности состояний, предсказываемой в рамках теории БКШ.

Если рассматривать углерод как обычную немагнитную примесь, то можно попробовать объяснить такое различие некоторой зависимостью коэффициента диффузии D от координат. Однако в этом случае уравнение Узаделя всё равно допускает однородное решение, свойством которого является независимость плотности состояний от функции $D(\mathbf{r})$. Иной попыткой объяснить такое отличие является исследуемая в настоящей работе гипотеза о том, что атомы углерода могут каким-либо образом влиять на свойства кристаллической решётки и, следовательно, могут привести к изменению константы взаимодействия в модели БКШ λ . В данной работе рассмат-

¹В проводимых экспериментах рений являлся сверхпроводником второго рода с критической температурой $T_c = 1.6$ К. Грязный предел соответствует ситуации, когда $l \ll \xi$, где l – длина свободного пробега, а ξ – длина когерентности.

ривается образец объёмного сверхпроводника, в котором имеется градиент атомов углерода вдоль одной пространственной координаты x . Образец расположен в полупространстве $x > 0$. Будем предполагать, что:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x), \quad (1.1)$$

где $\lambda_0 > 0$ – это значение константы взаимодействия для сверхпроводника в отсутствие дополнительного допирования углеродом в рамках модели БКШ. Напомним, что она связана с щелью при нулевой температуре согласно формуле:

$$\Delta_0(0) = 2\omega_D e^{-1/\lambda_0}, \quad (1.2)$$

где ω_D – дебаевская частота. На основании естественного предположения о том, что атомы углерода подавляют сверхпроводимость, будем предполагать, что $\lambda_1(x) < 0$, а в силу лишь небольшого количественного отклонения экспериментальных данных от теории, положим, что λ_1 мало (точное условие малости λ_1 будет сформулировано позднее).

В данной работе основной задачей является поиск аналитического результата для зависимости плотности состояний от энергии при $x = 0$ (на поверхности). Случай $x = 0$ представляет особый интерес, поскольку в эксперименте плотность состояний была измерена с помощью сканирующего туннельного микроскопа (STM) именно на поверхности образца. Получить аналитическое выражение для плотности состояний во всей области спектра не представляется возможным, поэтому получены выражения для плотности состояний только в некоторых энергетических режимах вблизи края спектра. Также приводится вывод формулы для щели в спектре сверхпроводника E_g в зависимости от неоднородности $\lambda(x)$.

1.2. Основные уравнения и обозначения

1.2.1. Уравнение Узаделя и условие самосогласования

Приведём здесь уравнение Узаделя, которое может быть применимо для грязных сверхпроводников с неоднородным параметром порядка:

$$\begin{cases} \omega F_\omega(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}D(F_\omega(\mathbf{r})\nabla^2 G_\omega(\mathbf{r}) - G_\omega(\mathbf{r})\nabla^2 F_\omega(\mathbf{r})) = \Delta(\mathbf{r})G_\omega(\mathbf{r}) \\ G_\omega^2(\mathbf{r}) + F_\omega^2(\mathbf{r}) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь $G_\omega(\mathbf{r})$ и $F_\omega(\mathbf{r})$ это фурье-образы по мнимому времени от квазиклассических функций Грина, в которых оставлена только изотропная часть². D – коэффициент

²подробный вывод уравнений (1.1) проделан в [1].

диффузии, который содержит в себе информацию о примесях, $\omega = 2\pi T(n + \frac{1}{2})$ – нечётная мацубаровская частота, $\Delta(\mathbf{r})$ – параметр порядка, в общем случае зависящий от пространственных координат. Уравнения (1.3) дополняются условием самосогласования, связывающим величины λ и Δ :

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})\pi T \sum_{\omega} F_{\omega}(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Как нетрудно увидеть, уравнения (1.3) и (1.4) образуют замкнутую систему относительно величин G_{ω} , F_{ω} и Δ . Функция $\lambda(\mathbf{r})$ предполагается заданной. Если удастся решить такую систему, то с помощью функций Грина можно определить многие характеристики системы. В частности, плотность состояний может быть найдена по формуле:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \text{Re}(G_{\omega})|_{\omega=-iE}. \quad (1.5)$$

Согласно постановке задачи, описанной в разделе 1.1, будем рассматривать квазиодномерный случай и поэтому величины, относительно которых решается система уравнений (1.3) и (1.4), будем считать зависящими только от одной пространственной координаты x . Отметим также, что в силу выполнения второго уравнения системы (1.3) оказывается удобным переписать первое уравнение в тригонометрической параметризации. Для этого введём величину θ согласно соотношениям: $\cos \theta(x) = G_{\omega}(x)$, $\sin \theta(x) = F_{\omega}(x)$. Учитывая всё это, можно привести уравнения (1.3) к виду:

$$\frac{D}{2}\theta'' - \omega \sin \theta + \Delta \cos \theta = 0. \quad (1.6)$$

Для исследования плотности состояний оказывается удобным перейти к вещественной энергии E с помощью подстановки: $\omega = -iE$. Тогда уравнение (1.6) переписется в виде:

$$\frac{D}{2}\theta'' + iE \sin \theta + \Delta \cos \theta = 0. \quad (1.7)$$

Для анализа выражения для плотности состояний еще немного преобразуем уравнение (1.7). Введём величину ψ согласно следующему соотношению: $\theta = \frac{\pi}{2} + i\psi$. Тогда формула (1.5) переписется в виде:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \text{Im}(\text{sh } \psi). \quad (1.8)$$

А уравнение (1.7) преобразуется к такому виду:

$$\frac{D}{2}\psi'' + E \text{ch } \psi - \Delta \text{sh } \psi = 0. \quad (1.9)$$

Поясним, в чем выгода перехода от переменной θ к переменной ψ . Всё дело в том, что если ψ чисто действительно, то плотность состояний согласно (1.8) будет равна нулю,

что соответствует подщелевой части спектра. Таким образом, щель E_g – это такое пороговое значение, выше которого отсутствуют действительные решения уравнения (1.9).

Также зафиксируем здесь формулу для длины когерентности :

$$\xi = \sqrt{\frac{D}{2\Delta_0}}, \quad (1.10)$$

где Δ_0 – параметр порядка в модели БКШ.

1.2.2. Система обозначений для энергетических величин

Выберем удобную систему обозначений для величин, имеющих размерность энергии. Через ε будем обозначать обезразмеренную энергию:

$$\varepsilon = \frac{E}{\Delta_0}, \quad (1.11)$$

через Γ отстройку щели E_g от Δ_0 :

$$\Gamma = \Delta_0 - E_g, \quad (1.12)$$

а также:

$$\gamma = \frac{\Gamma}{\Delta_0} = 1 - \varepsilon_g, \quad (1.13)$$

$$\epsilon = \frac{E - E_g}{\Delta_0} = \varepsilon - \varepsilon_g, \quad (1.14)$$

где $\varepsilon_g = \frac{E_g}{\Delta_0}$.

1.2.3. Решение уравнения Узаделя в однородном случае

В этом параграфе приведём в качестве справки решения уравнения Узаделя в однородном случае. Если рассматривать уравнения (1.3) и (1.4) в объёмном сверхпроводнике в рамках модели БКШ, то на мацубаровских частотах их решение будет вещественным:

$$\begin{cases} G_\omega = \cos \theta_0 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}}, \\ F_\omega = \sin \theta_0 = \frac{\Delta_0}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}}, \\ \Delta = \Delta_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Осуществим в этом уравнении переход к вещественной энергии и воспользуемся обозначением (1.11). Тогда это решение можно легко переписать в таком виде:

$$\theta_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + i \operatorname{arcth} \varepsilon, & \text{если } \varepsilon < 1, \\ i \operatorname{arccth} \varepsilon, & \text{если } \varepsilon > 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

Или для переменной ψ :

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arcth} \varepsilon, & \text{если } \varepsilon < 1, \\ \operatorname{arccth} \varepsilon + \frac{i\pi}{2}, & \text{если } \varepsilon > 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

Отсюда видно, что ψ логарифмически расходится при стремлении $\varepsilon \rightarrow 1$. Конкретнее: $\psi \approx \frac{1}{2} \ln(\frac{2}{1-\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 1$. Зафиксируем также простое свойство, следующее из условия самосогласования в модели БКШ:

$$\sum_{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} = \frac{1}{\lambda_0 \pi T}. \quad (1.18)$$

1.2.4. Задача Абрикосова-Горькова

Для анализа полученных результатов оказывается чрезвычайно полезным сравнение с классическими работами. Ниже мы увидим, что результаты, полученные в этой работе, удобно сравнить с результатами, полученными Абрикосовым и Горьковым в модели, в которой рассматривается сверхпроводник с замороженными магнитными примесями [2]. Магнитные примеси характеризуются параметром η , который в случае слабых примесей определяется согласно соотношению [2]:

$$\eta = 1/\Delta\tau_s, \quad (1.19)$$

где Δ – параметр порядка, а τ_s – среднее время свободного пробега относительно переворота спина, связанное с магнитными примесями. Уравнение Узалея, решаемое в этой задаче, отличается наличием дополнительного слагаемого, зависящего от η , от случая, когда магнитные примеси отсутствуют:

$$-\varepsilon \operatorname{ch} \psi + \operatorname{sh} \psi - \frac{\eta}{2} \operatorname{sh} 2\psi = 0. \quad (1.20)$$

Результатом анализа этого уравнения, осуществлённого с помощью замечаний, выписанных в конце параграфа 1.2.1, является выражение для щели E_g :

$$E_g = \Delta(1 - \eta^{2/3})^{3/2}. \quad (1.21)$$

Как мы видим, щель в спектре такого сверхпроводника может оказаться отличной от Δ и даже стать равной нулю¹. С точки зрения нашей работы интересна та ситуация,

¹Такое явление называется бесщелевой сверхпроводимостью. Подробнее этот вопрос обсуждается в [3, гл. 21]

когда E_g не слишком сильно отличается от Δ , то есть параметр η мал. Плотность состояний вблизи щели в задаче Абрикосова-Горькова может быть найдена по формуле:

$$\frac{\nu_{\text{AG}}(E)}{\nu_0} = (3/2)^{1/2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\gamma_{\text{AG}}}, \quad (1.22)$$

где:

$$\gamma_{\text{AG}} = \frac{3}{2} \eta^{2/3} \quad (1.23)$$

1.2.5. Работа Ларкина-Овчинникова

Отметим, что в классической работе [4] уже решалась задача о нахождении плотности состояний в случае, если λ не являлась постоянной в пространстве. В данной работе мы рассматриваем случай, когда $\lambda(\mathbf{r})$ меняется на масштабах много меньших длины когерентности или порядка длины когерентности, что соответствует неоднородностям маленького или промежуточного размеров. В случае же неоднородностей большого размера, то есть когда $\lambda(\mathbf{r})$ меняется на масштабах много больших длины когерентности, сверхпроводимость подстраивается под локальное значение Δ , [4]. Это означает, что плотность состояний может быть вычислена по формуле из теории БКШ, в которой вместо постоянной Δ необходимо записать функцию $\Delta(\mathbf{r})$:

$$\frac{\nu(E)}{\nu_0} = \frac{|E| \theta(|E| - \Delta(\mathbf{r}))}{\sqrt{E^2 - \Delta(\mathbf{r})^2}}. \quad (1.24)$$

Также в работе [4] затрагивался случай неоднородностей малого размера, однако λ полагалась случайной величиной, заданной с помощью коррелятора $\langle \lambda(\mathbf{r}) \lambda(\mathbf{r}') \rangle$. Для нас случай неоднородностей большого размера не представляет интереса, так как в рамках этой ситуации нельзя было бы обосновать результаты эксперимента. Главное отличие настоящей работы от работы [4] – то, что мы рассматриваем случай заданной зависимости $\lambda(\mathbf{r})$.

Глава 2.

Нахождение плотности состояний

В этой главе приведём вывод аналитических результатов, выражающих зависимость плотности состояний от энергии вблизи края спектра. Также выведем формулу для зависимости щели от неоднородности константы связи.

2.1. Флуктуационный пропагатор

Напомним, что исходная постановка задачи состоит в том, что задана зависимость (1.1), зная которую, в результате решения системы уравнений Узаделя (1.3) – (1.4), можно найти гриновские функции и параметр порядка $\Delta(x)$. Будем полагать, что:

$$\Delta(x) = \Delta_0 + \Delta_1(x). \quad (2.1)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с фурье-образами функций $\Delta_1(x)$ и $\lambda_1(x)$, то представляется удобным продолжить эти функции на отрицательную полуось x чётным образом. В связи с этим введём величину линейного отклика Δ на изменение λ согласно следующему соотношению:

$$\frac{\Delta_{1p}}{\Delta_0} = L_0(p) \frac{\lambda_{1p}}{\lambda_0^2}. \quad (2.2)$$

Здесь Δ_{1p} и λ_{1p} – это фурье-образы соответственно функций $\Delta_1(x)$ и $\lambda_1(x)$. Функция $L_0(p)$ называется флуктуационным пропагатором. Приведём здесь вывод выражения для $L_0(p)$. Из (1.1) – (1.4) мы можем написать, что:

$$\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x). \quad (2.3)$$

Тогда, подставляя (2.1), (2.3) и (1.15) в (1.6) и совершая преобразование Фурье, получаем:

$$\theta_{1p} = \frac{\omega \Delta_{1p}}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}(\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2} + \frac{Dp^2}{2})}. \quad (2.4)$$

Продельвая аналогичные действия с уравнением самосогласования (1.4), можно прийти к выражению:

$$\Delta_{1p} = \lambda_0 \pi T \sum_{\omega} \left[\theta_{1p} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} + \frac{\lambda_{1p}}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta_0}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} \right]. \quad (2.5)$$

Тогда из (1.18), (2.2), (2.4) и (2.5) можно получить [4]:

$$L_0^{-1}(p) = \pi T \sum_{\omega} \frac{\Delta_0^2 + \frac{Dp^2}{2} \sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}}{(\omega^2 + \Delta_0^2)(\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2} + \frac{Dp^2}{2})}. \quad (2.6)$$

Теперь, получив общее выражение для флуктуационного пропагатора, можно понять, на каких масштабах меняется $\Delta_1(x)$. Поскольку λ меняется на масштабах или много меньше ξ или порядка ξ , то λ_{1p} меняется на масштабе не меньше, чем $\frac{1}{\xi}$. Анализируя формулу (2.6), можно увидеть, что $L_0(p)$ меняется на масштабах порядка $\frac{1}{\xi}$ при $T = 0$. Тогда из (2.2) следует, что $\Delta_1(x)$ должно меняться на масштабах порядка ξ . Как мы увидим в дальнейшем, будет очень существенно, какие значения принимает $L_0(0)$. Из (2.6) можно получить:

$$L_0^{-1}(0) = \pi T \sum_{\omega} \frac{\Delta_0^2}{(\omega^2 + \Delta_0^2)^{3/2}}. \quad (2.7)$$

Приведём здесь выражения для этой величины в разных температурных режимах [5]:

$$L_0^{-1}(0) = \begin{cases} 7\zeta(3)\Delta_0^2(T)/(2\pi T_c)^2, & T_c - T \ll T_c, \\ 1, & T \ll T_c. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2. Вычисление E_g

Как мы уже указывали параграфе 1.2.4, щель E_g может быть, вообще говоря, отличной от Δ . В данном параграфе займёмся поиском выражения для E_g . Во всех дальнейших выкладках для удобства заменим размерную координату x на безразмерную x/ξ , которую также будем обозначать буквой x . Тогда, учитывая всё выше сказанное, из (1.9) можно получить:

$$\psi'' + \varepsilon \operatorname{ch} \psi - (1 - \delta_1(x)) \operatorname{sh} \psi = 0, \quad (2.9)$$

где $\delta_1(x) = -\frac{\Delta_1(x)}{\Delta_0}$ – некоторая убывающая и интегрируемая на $[0, +\infty)$ функция. Напомним, что характерный масштаб изменения функции $\Delta_1(x)$ равен 1. Решаемое уравнение (2.9) вместе с граничными условиями можно представить в виде:

$$\begin{cases} \psi'' - \varkappa^2 \operatorname{sh}(\psi - \psi_0) = -\delta_1(x) \operatorname{sh} \psi, \\ \psi'(0) = 0, \\ \psi(+\infty) = \psi_0 = \operatorname{arcth}(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.10)$$

где:

$$\varkappa = (1 - \varepsilon^2)^{1/4}. \quad (2.11)$$

Мы видим, что $\varkappa$ задаёт новый пространственный масштаб $\xi_E = \frac{1}{\varkappa}$. Поскольку λ слабо отклоняется от λ_0 , можно ожидать что E_g не сильно будет отличаться от Δ_0 . Поэтому при дальнейших выкладках нас будет интересовать ситуация, когда ε находится вблизи единицы. В этом случае оказывается, что:

$$\xi_E \gg 1. \quad (2.12)$$

Так как масштаб, на котором меняется правая часть уравнения (2.10), отвечающая за неоднородность много меньше масштаба $\frac{1}{\varkappa}$, на котором меняется само решение, то он представляется в виде дельта-функционального слагаемого. Значит можно попробовать учесть его как некоторое граничное условие. Проинтегрируем уравнение (2.10) на отрезке от 0 до некоторого x_0 , где

$$1 \ll x_0 \ll \xi_E. \quad (2.13)$$

Предположив на основании (2.13), что в проинтегрированном уравнении (2.10) можно пренебречь вторым слагаемым, в итоге приходим к условию:

$$\psi'|_0 = -d_1 \operatorname{sh} \psi(0), \quad (2.14)$$

где

$$d_1 = \int_0^{+\infty} \delta_1(x) dx. \quad (2.15)$$

Таким образом, задача (2.10) сводится к решению однородного уравнения но с измененным граничным условием:

$$\begin{cases} \psi'' - \varkappa^2 \operatorname{sh}(\psi - \psi_0) = 0, \\ \psi'|_0 = -d_1 \operatorname{sh} \psi(0), \\ \psi(+\infty) = \psi_0 = \operatorname{arcth}(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) имеет два частных решения:

$$\psi = \psi_0, \quad (2.17)$$

$$\psi = \psi_0 + 4 \operatorname{arcth}(ae^{-\varkappa x}). \quad (2.18)$$

Из граничного условия в нуле в (2.16) можно получить уравнение на коэффициент a :

$$\frac{4a\varkappa}{1-a^2} = d_1 \operatorname{sh}(\operatorname{arcth} \varepsilon + 4 \operatorname{arcth} a). \quad (2.19)$$

С учётом этого, после преобразований из уравнения (2.19) получаем:

$$\frac{4\varkappa^3}{d_1} = \frac{(a+1)^3}{a(1-a)}. \quad (2.20)$$

Отметим, что при получении последнего уравнения были использованы полезные равенства:

$$\operatorname{sh}(4 \operatorname{arcth} x) = \frac{4(x^3 + x)}{(1-x^2)^2}, \quad \operatorname{ch}(4 \operatorname{arcth} x) = \frac{1+6x^2+x^4}{(1-x^2)^2}. \quad (2.21)$$

Теперь проанализируем уравнение (2.20). Требование вещественности ψ , выраженного формулой (2.18), приводит к тому, что аргумент арктангенса должен быть действительным и по модулю меньшим единицы, следовательно $a \in [-1, 1]$. При действительных a левая часть уравнения (2.20) является чисто действительной. Но, когда левая часть действительная, она всегда больше нуля. Значит $a \in [0, 1]$. На этом отрезке согласно рис. 2.1 правая часть формулы (2.20) имеет локальный минимум при некотором $a = a_g$. Как несложно видеть из (2.11) и (2.20), этот минимум будет соответствовать максимуму E , то есть E_g .

Тогда имеем:

$$a_g = 2 - \sqrt{3} \approx 0.27, \quad (2.22)$$

$$E_g = \Delta_0 \left[1 - \frac{3^2}{2^{7/3}} d_1^{4/3} \right]. \quad (2.23)$$

Теперь, используя флуктуационный пропагатор, в формуле (2.23) можно перейти от зависимости от Δ (она содержится в d_1) к зависимости от λ . Тогда:

$$d_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta_1(x)}{\Delta_0} dx = -\frac{\Delta_{1p}|_{p=0}}{2\Delta_0}. \quad (2.24)$$

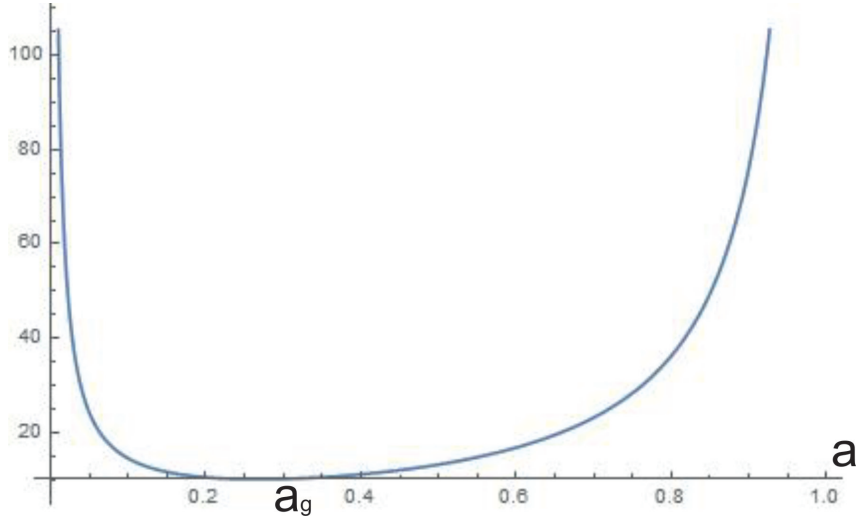


Рис. 2.1. График правой части уравнения (2.20) при $a \in [0, 1]$.

Подставляя сюда (2.2), получаем:

$$d_1 = -\frac{L_0(0)}{\lambda_0^2} \int_0^{+\infty} \lambda_1(x) dx. \quad (2.25)$$

Остановимся поподробнее на этой формуле. Обозначим характерный масштаб, на котором меняется $\lambda(x)$ за r_c . В параграфе (1.2.5) мы отмечали, что $r_c \sim 1$ или $r_c \ll 1$. Достаточным условием применимости результата для щели (2.23) является малость параметра d_1 . Это условие, как можно оценить из (2.25), представимо в виде:

$$|\lambda_1(0)|r_c \ll \lambda_0^2. \quad (2.26)$$

Предполагая, что это условие выполнено, мы приходим к тому что d_1 малый параметр. Тогда E_g близко к Δ_0 , что соответствует предположению о том, что ε близко к единице. Из малости d_1 можно прийти к следующему полезному соотношению:

$$d_1 = -\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_1(x)}{\Delta_0} dx \sim \frac{|\Delta_1(0)|}{\Delta_0} \ll 1. \quad (2.27)$$

Отметим также, что из (2.23) следует, что $\Gamma \ll \Delta(0)$.

Попробуем теперь понять, нет ли каких-либо дополнительных условий на точку x_0 кроме условия (2.13), чтобы можно было пренебречь вторым слагаемым в уравнении (2.10). Необходимо, чтобы была выполнена малость этого слагаемого на фоне

первого. Написав условие малости и немного его преобразовав, можно получить:

$$x_0 \varkappa \frac{a^2 + 1}{(a^2 - 1)^2} \ll \frac{ae^{-\varkappa x_0}}{1 - a^2 e^{-2\varkappa x_0}}. \quad (2.28)$$

Но поскольку в наших предположениях мы считаем $a \sim 1$ и $x_0 \varkappa \ll 1$, это условие заведомо будет выполнено.

2.3. Нахождение плотности состояний в окрестности $E = E_g$

В этом разделе найдём, как зависит плотность состояний от энергии вблизи щели. Рассмотрим ту область энергий, для которой выполнено: $0 < \epsilon \ll \gamma$ и вычислим плотность состояний. Напомним, что величины ϵ , γ были определены в параграфе 1.2.2. Для этого с помощью теории возмущений необходимо найти поправку к критическому значению a_g в уравнении (2.20). Эта поправка приведет к появлению малой нетривиальной мнимой части ψ , которая как раз и будет отвечать за появление ненулевой плотности состояний. Итак, будем считать, что $a = a_g + \delta a$. Тогда, производя разложения в ряд в обеих частях формулы (2.20), можно получить:

$$\delta a = 2^{2/3} 3^{-1/2} a_g d_1^{-2/3} i \sqrt{\epsilon}, \quad (2.29)$$

Решение на ψ представляется в виде:

$$\psi = \psi_0 + 4 \operatorname{arcth} (a_g e^{-\varkappa x} + \delta a e^{-\varkappa x}). \quad (2.30)$$

Разлагая его в ряд до первого порядка и подставляя в (1.8), можно получить:

$$\frac{\nu(x, E)}{\nu_0} = 2^{8/3} 3^{-1/2} a_g d_1^{-2/3} \frac{e^{-\varkappa_g x} (1 + a_g e^{-\varkappa_g x})^4}{\varkappa_g^2 (1 - a_g^2 e^{-2\varkappa_g x})^3} \sqrt{\epsilon}. \quad (2.31)$$

В уравнении (2.31) префактор перед $\sqrt{\epsilon}$ удобно выразить через параметр $\gamma = 1 - \varepsilon_g$, чтобы сравнить с результатом задачи Абрикосова-Горькова. Для этого надо воспользоваться приближённым соотношением:

$$\varkappa_g = (2\gamma)^{1/4}. \quad (2.32)$$

Выпишем также формулу, выражающую связь между d_1 и γ :

$$\gamma = \frac{3^2}{2^{7/3}} d_1^{4/3}. \quad (2.33)$$

Преобразованное выражение (2.31):

$$\frac{\nu(x, E)}{\nu_0} = 2\sqrt{3}a_g \frac{e^{-\varkappa_g x}(1 + a_g e^{-\varkappa_g x})}{(1 - a_g e^{-\varkappa_g x})^3} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\gamma}. \quad (2.34)$$

И в этой модели и в задаче Абрикосова-Горькова[2] плотность состояний вблизи края щели растёт по универсальному корневому закону. Однако представляет интерес сравнение префакторов в этих моделях. В общем случае они, безусловно, отличаются, поскольку в настоящей модели рассматривается неоднородный случай. Однако с практической точки зрения нас интересует ситуация при $x = 0$:

$$\frac{\nu(0, E)}{\nu_0} = 3 \frac{\sqrt{\epsilon}}{\gamma}. \quad (2.35)$$

Сравнивая выражения (1.22) и (2.35), приходим к тому, что зависимость префактора от γ одинаковая, но численный множитель в задаче Абрикосова-Горькова меньше.

2.4. Нахождение плотности состояний при $E = \Delta_0$

В этом разделе зададимся целью определить плотность состояний при $\varepsilon = 1$. В этом случае оказывается, что $\epsilon \sim \gamma$ и нельзя воспользоваться разложением (2.29). В качестве отправной точки рассмотрим уравнение (2.20). Напомним здесь, что: $\varepsilon = \sqrt{1 - \varkappa^4}$ и $\varkappa = 0$, когда $\varepsilon = 1$. Нас будут интересовать малые $\varkappa$ поэтому воспользуемся теорией возмущений. Из (2.20) следует, что при $\varkappa = 0$ $a = -1$. Однако если подставить эти значения в (2.18), получается неопределённость вида $+\infty - \infty$, которую необходимо устранить. Для этого, аналогично тому, как мы поступали в предыдущем разделе, найдём поправку к $a = -1$ с помощью теории возмущений для уравнения (2.20). Будем искать решение уравнения (2.20) в виде $a = -1 + \alpha_1 \varkappa$. Тогда можно получить уравнение на α_1 :

$$\alpha_1^3 + \left(\frac{2}{d_1^{1/3}} \right)^3 = 0. \quad (2.36)$$

Это уравнение имеет три корня: один с нулевой мнимой частью и два других с ненулевыми и противоположными по знаку мнимыми частями. Поскольку нас интересует нетривиальный вклад в плотность состояний, то необходимо выбрать тот корень, у которого мнимая часть нетривиальна. Один из двух комплексных корней отбрасывается в соответствии с тем, что плотность состояний является существенно положительной величиной. Правильный корень определяется выражением:

$$\alpha_1 = \frac{(1 + i\sqrt{3})}{d_1^{1/3}}. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в выражение для a , затем в (2.18) и (1.5), а также полагая, что $x = 0$, получим выражение для плотности состояний в точке $E = \Delta_0$:

$$\frac{\nu(x = 0, E = \Delta_0)}{\nu_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_1^{-2/3}. \quad (2.38)$$

Отметим, что в силу малости параметра d_1 величина плотности состояний является большой величиной по сравнению с единицей. С помощью (2.33) можно переписать предыдущую формулу в виде зависимости от γ :

$$\frac{\nu(x = 0, E = \Delta_0)}{\nu_0} = \frac{3^{3/2}}{2^{13/6}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (2.39)$$

Глава 3.

Заключение

В данной работе рассматривался случай заданной зависимости константы взаимодействия от пространственной координаты. В этом случае оказалось, что щель в спектре сверхпроводящей системы отлична от модуля параметра порядка. В работе было получено выражение для щели E_g . Поскольку из-за неоднородности константа взаимодействия предполагалась не сильно отличающейся от значения в модели БКШ, то оказалось, что $|E_g - \Delta_0| \ll \Delta_0$. Также были получены аналитические результаты для зависимости плотности состояний от энергии вблизи края спектра. В большинстве формул рассматривался случай поверхности ($x = 0$), который интересен с той точки зрения, что экспериментальные данные считываются с помощью STM с поверхности образца. В случае энергий $E > E_g$ и таких, что $|E - E_g| \ll |\Delta_0 - E_g|$ плотность состояний, как и в работе [2], растёт по универсальному корневому закону. Также было произведено сравнение префакторов в этих законах и было обнаружено, что их зависимость от параметра γ , отвечающего за отстройку E_g от Δ_0 , одинакова, хотя численные коэффициенты различны. Было посчитано значение плотности состояний при $E = \Delta_0$ и оказалось, что оно является большим по сравнению с плотностью состояний на уровне Ферми в нормальном металле. Наличие неоднородности, как и в работе [4], привело к размытию сингулярности в плотности состояний при $E = \Delta_0$. Для качественного осознания проделанного в работе удобно обратиться к рисунку 3.1.

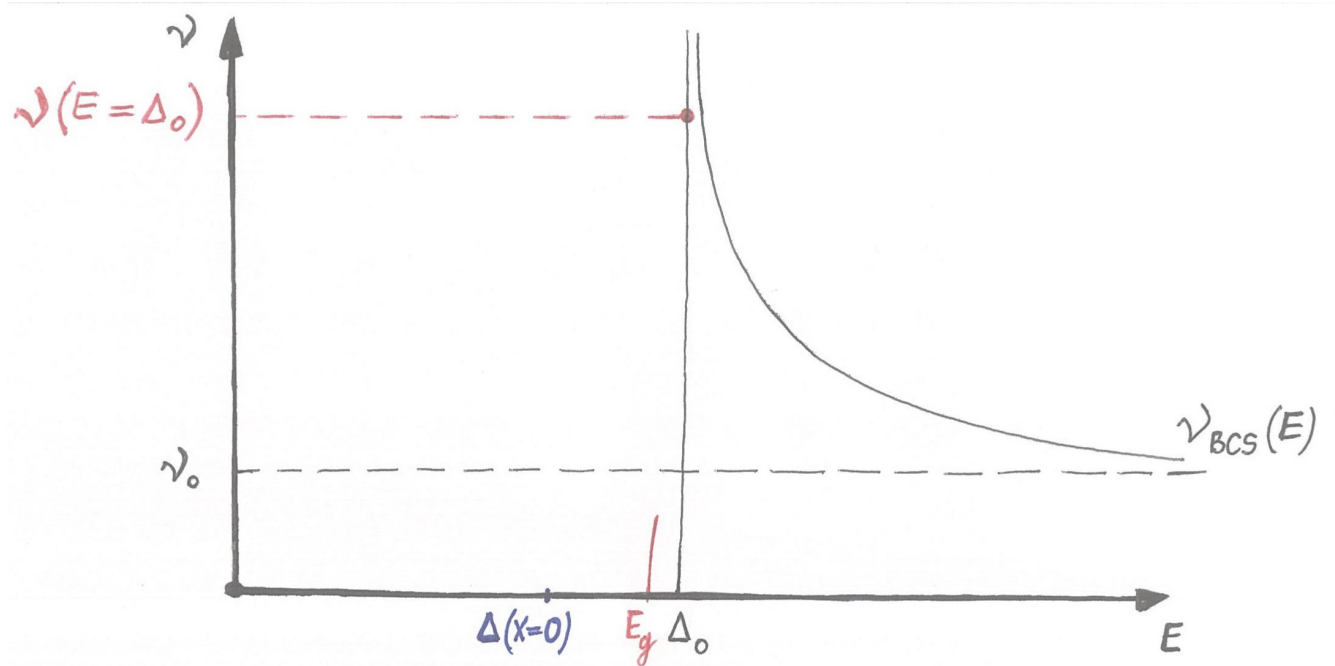


Рис. 3.1. Черным цветом отмечена зависимость плотности состояний в модели БКШ. Красным цветом обозначены найденные в работе значение E_g , зависимость $\nu(E)$ вблизи E_g и значение $\nu(E = \Delta_0)$. Для найденных решений выполняется $|\Delta_0 - E_g| \ll |\Delta_0 - \Delta(x=0)| \ll \Delta_0$, а также $\nu(E = \Delta_0) \gg \nu_0$

Литература

- [1] А. В. Свидзинский. «Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости», (1982).
- [2] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков. «К теории сверхпроводящих металлов с парамагнитными примесями», ЖЭТФ, 39(6), 1781-1796 (1960).
- [3] А. А. Абрикосов. «Основы теории металлов», (1987).
- [4] А.И.Ларкин, Ю.Н.Овчинников. «Плотность состояний в неоднородных сверхпроводниках», ЖЭТФ, 61(5), 2147-2159 (1971).
- [5] А. А. Мазаник. «Поверхностная плотность состояний в сверхпроводниках с неоднородной константой связи», диплом на соискание степени бакалавра, (2016).