

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики

Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

**Характеристики операций со
сверхпроводниковыми кубитами и влияние
шума**
(бакалаврская работа)

Студент:

Дубовицкий Кирилл Сергеевич

Научный руководитель:

Махлин Юрий Генрихович

Москва 2019

Содержание

1. Введение	3
1.1. Мотивация работы	4
1.2. Список обозначений	5
2. Случайное тестирование	6
3. Один кубит	10
3.1. Операция \overline{W}	10
3.1.1. Формализм усреднения	10
3.1.2. Изотропия относительно группы	11
3.1.3. Один параметр	11
3.2. Многократное усреднение	13
3.3. Примеры	14
3.3.1. Эволюция кубита	14
3.3.2. Шум вдоль оси Z	15
3.4. Основные результаты	16
4. Два кубита	17
4.1. Усреднение по однокубитным операциям	17
4.2. Операция $\overline{W}[\rho]$ с начальным состоянием $ \uparrow\uparrow\rangle$	20
4.3. Усреднение почти унитарного поворота	21
4.3.1. CZ	23
4.3.2. $CNOT$	29
4.3.3. \sqrt{SWAP}	30
4.4. Основные результаты	31
5. Заключение	33
6. Приложения	34
6.1. Группа Клиффорда одного кубита	34
6.2. Матрица \hat{M} в общем случае	34
6.3. Поправка из-за корреляции	36

1. Введение

Квантовые вычисления – это область, которая стремительно развивается последние несколько десятков лет. Хотя пока квантовый компьютер сравнимый по мощности с обычным не был построен, в перспективе квантовые компьютеры смогут решить задачи недоступные даже для самых мощных суперкомпьютеров. Например, алгоритм Шора [1] может быть выполнен за полиномиальное время, в отличие от экспоненциального большего для классического компьютера, или выигрыш в \sqrt{N} в алгоритме Гровера [2] для квантового компьютера. Также в наши дни размеры транзисторов в классическом компьютере достигли предела, при котором приходится учитывать квантовые эффекты, такие как туннелирование электронов.

Квантовый компьютер – это система состоящая из большого числа кубитов, элементарных составляющих квантового компьютера. Кубит – это квантовая двухуровневая система, которая реализуется в различных физических системах. Это могут быть как сверхпроводниковые кубиты, такие как Xmon [3] или, например, ионы в ловушках [4]. Алгоритм [5] на квантовом компьютере – это в общем случае приготовление кубитов в определенных начальных квантовых состояниях, затем проведение логических операций (вентилей) и в конце измерение конечного состояния кубитов. В большинстве алгоритмов ограничиваются однокубитными и двухкубитными логическими операциями, потому что таких операций достаточно, чтобы получить любое многокубитное состояние.

Для того чтобы действительно проводить алгоритмы эффективнее, чем сейчас это умеет классический компьютер, нужна система из множества кубитов, не теряющая когерентность при выполнении тысяч логических операций. Реализация такой системы связана с немалым количеством трудностей. Одной из проблем являются ошибки, возникающие при проведении алгоритмов. Ошибки происходят из-за наличия шумов в кубитах, неточностей при выполнении операций и помех в оборудовании. Поэтому одна из задач, которая стоит перед создателями квантового компьютера – это избавиться от ошибок или, хотя бы, свести их к такому уровню, при котором они будут незначительны. Для это крайне важно понимать природу этих ошибок, уметь их измерять и осознавать к чему они могут привести.

Одним из способов изучения качества выполнения операции является её полная томография. В идеальном случае, логическая операция – это унитарный оператор, действующий на волновые функции. Но из-за наличия ошибок, операция описывается супероператором над матрицей плотности системы и в общем случае может быть записана через операторы Краусса. Процесс томографии выглядит следующим образом: кубит приготавливают в конкретном состоянии, проводят изучаемую операцию и измеряют, что получилось. Так делают много раз для определенного начального состояния для набора статистики. Потом тоже самое делают для другого начального состояния. В итоге,

получается набор из 9-ти параметров для однокубитных операций и 225-ти параметров для двухкубитных, что уже является явным перебором точности. Среди других недостатков этого метода – отсутствие понимания того, как операция поведет себя будучи выполненной в последовательности. Также проблемой этого способа является тот факт, что в последние годы ошибки по величине уже значительно малы - порядка 10^{-4} , и поэтому имеются трудности измерения столь малых величин. От части, потому что еще есть ошибки приготовления состояния и считывания результатов, которые надо уметь отделять от ошибки логической операции. В связи с перечисленными недостатками в наше время активно используется другой способ измерения ошибок - тестирование основанное на случайной выборке.

Впервые метод случайного тестирования, "Randomized Benchmarking" в англоязычной литературе, был представлен Э. Ниллом [6] в 2007 году. В этом абзаце я лишь вкратце опишу этот метод, подробное описание будет дано в следующем разделе. Случайное тестирование заключается в следующем. Над системой проводится случайная последовательность логических операций из определенного набора. Изучается насколько полученный результат отличается от теоретически предсказанного (при идеальном выполнении операций). Результаты измерений усредняют по случайным последовательностям. Таким образом получается некая усреднённая ошибка всей последовательности, описываемая одним числом, из которой можно получить уже среднюю ошибку одной операции из набора. Недостаток понятен – мы не получаем всех характеристик ошибки. Но зато теперь за счет выполнения большого числа операций, суммарная ошибка становится лучше заметна для измерения. Также, удастся выделить ошибки считывания и приготовления, так как они не зависят от длины последовательности, а суммарная ошибка логических операций растет экспоненциально с длиной последовательности. Поэтому имея зависимость ошибки от длины, удастся выделить ошибку, присущую лишь операциям. Основное предположение метода случайного тестирования - это отсутствие корреляций между ошибками операций в последовательности.

1.1. Мотивация работы

Метод тестирования основанный на случайной выборке активно применяется для изучения качества выполнения логических операций многими экспериментальными группами [3] [7]. В большинстве таких работ полученные зависимости надежности от длины аппроксимируются экспонентой, без достаточного понимания того, насколько хорошо данная выборка усредняет ошибку. Поэтому было важно проверить насколько такая аппроксимация оправдана, а если нет, то какие зависимости следует ожидать. Также в случайном тестировании пренебрегают наличием корреляций между ошибками операций в последовательности, хотя наличие корреляций может нарушить экспоненциальное

поведение зависимостей надежности.

В случайном тестировании одного кубита у экспериментаторов имеется хорошее понимание того, что именно они измеряют. В случае же двух кубитов имеются существенные трудности. Из-за этого в некоторых работах по случайному тестированию двух кубитных операций встречается не совсем правильная интерпретация полученных данных. Поэтому основная часть моей работы посвящена случайному тестированию двух кубитов.

1.2. Список обозначений

ρ	матрица плотности
$\sigma_i, i \in \overline{0,3}$	единичная матрица и матрицы Паули
V_i, U_j, L, W_0	унитарные операторы, действуют сопряжением на ρ
W	оператор, действуют как супероператор на ρ
Λ	оператор ошибки, тоже супероператор
$W[\rho], \Lambda[\rho]$	результат действия соответствующих супероператоров на ρ
a, b, c	параметры, характеризующие величину ошибки
$\sigma_i \otimes \sigma_j, i, j \in \overline{0,3}$	базис эрмитовых операторов для двух кубитов
$\Lambda_{ij \rightarrow kl}$	элементы супероператора ошибки в базисе $\sigma_i \otimes \sigma_j$

Строчка вида:

$$VWU \quad (1)$$

означает, что вначале действует унитарный оператор V , затем оператор W и потом U . То есть в расшифровке:

$$UW[V\rho V^\dagger]U^\dagger \quad (2)$$

Действие $V \in SU(2) \times SU(2)$ на $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$

$$V\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta V^\dagger = V_{\alpha'\alpha} V^{\beta'\beta} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\beta'} \quad (3)$$

2. Случайное тестирование

Вначале систему приготавливают в определенном состоянии, описываемом матрицей плотности ρ . Фиксируется некоторый набор операций, обычно этот набор образует группу, назовем её G , например группа унитарных преобразований. Выбирается случайная последовательность операций V_i из этого набора длины n и проводится над системой:

$$V_1 V_2 \dots V_{n-1} F \quad (4)$$

За F обозначена, так называемая, восстанавливающая операция, которая в идеальном случае превращает последовательность в тождественную (если все V_i элементы группы, то F действительно одна операция). После этого измеряется итоговое состояние. В идеальном случае, состояние бы не изменилось, но так как есть ошибки, то вероятность сохраниться меньше единицы.

Генерируют новую последовательность, проделывают ту же схему и так много раз. В итоге, для группы G и длины n получается усреднённая по случайным последовательностям вероятность сохранить состояние (надежность), обозначим за P . Делая то же самое для других n , получают зависимость $P(n)$. Ожидается экспоненциальная зависимость $P(n)$ вида:

$$P(n) = A + Ba^n \quad (5)$$

Константы A , B отвечают за SPAM ошибки ¹ - возникающие при считывании результатов и приготовления начального состояния. Параметр a характеризует среднюю ошибку операции из группы G .

Пример зависимости полученной группой Е. Нилла [6]:

Также есть вариация случайного тестирования, когда с помощью метода исследуют ошибку определенной операции W (англ. "interleaved randomized benchmarking"). Для этого ее перемежают случайными операциями из группы G :

$$V_1 W V_2 W \dots V_{n-1} W F \quad (6)$$

Также ожидается экспоненциальная зависимость $P(n)$. Только теперь параметр a будет включать себя как ошибку операций из группы, так и ошибку операции W . Зная среднюю ошибку операции из группы, можно определить ошибку операции W .

Примеры экспериментальных зависимостей [7] [3]:

¹Англ. "state preparation and measurement errors"

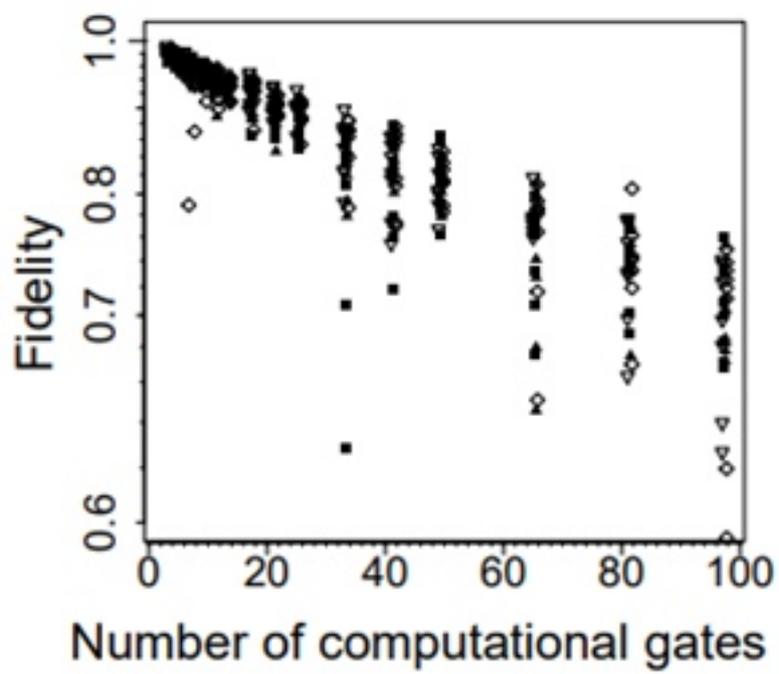


Рис. 1.

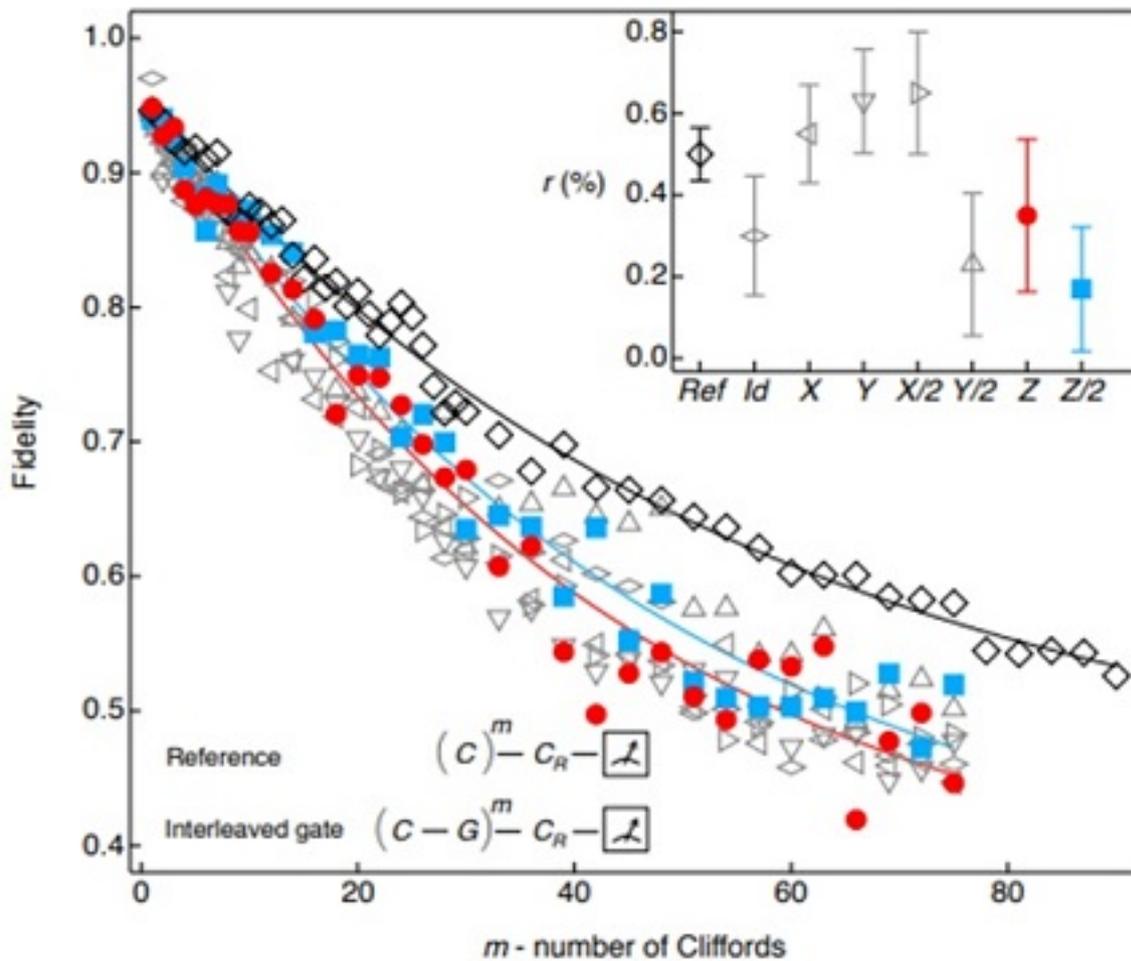


Рис. 2. Группа G - группа Клиффорда одного кубита. Черная линия - первая вариация случайного тестирования. Цветные линии - вторая вариация, с операциями из вставки в углу. На вставке изображены ошибки отдельных операций, полученные с помощью второй вариации

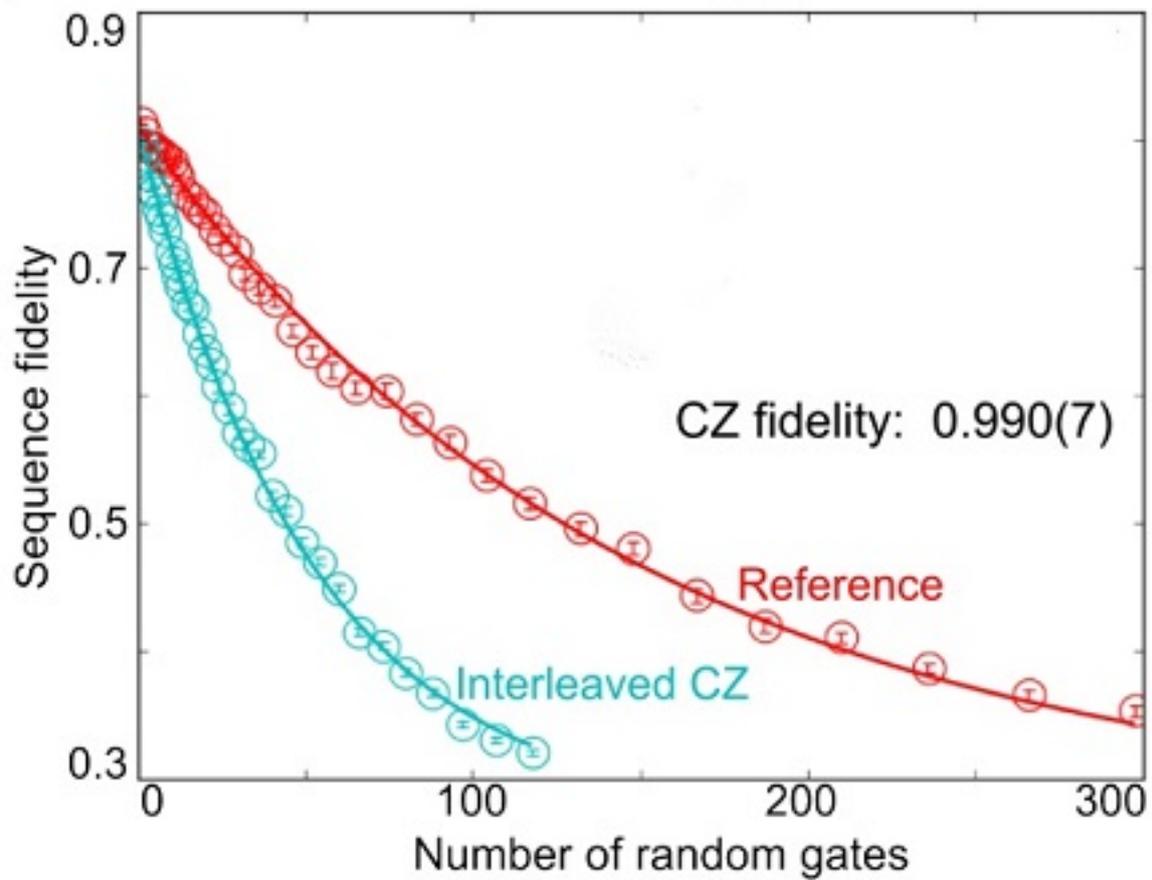


Рис. 3. Группа G - группа Клиффорда одного кубита умножить прямо на себя. Красная линия - первая вариация. Синяя линия - вторая вариация с операцией Control Z

3. Один кубит

Удобно начать изучение случайного тестирования с его применения для одного кубита. В этом разделе будут получены основные утверждения, такие как: изотропия ошибки (описание одним параметром) (3.1.3), экспоненциальная зависимость надежности от длины последовательности операций (3.2). Также будут рассмотрены примеры применения случайного тестирования (3.3) и посчитана поправка из-за корреляций в одном из случаев, описанных в примерах (3.4).

Главные результаты этого раздела могут быть легко обобщены на случай большего числа кубитов. В конце раздела я перечислю эти результаты.

3.1. Операция \overline{W}

Основные свойства получаются при усреднении последовательности из двух операторов. В действительности, экспериментаторы, конечно же, использует более длинные последовательности.

3.1.1. Формализм усреднения

Пусть есть матрица плотности кубита ρ и некая операция W , действующая на ρ по правилу $\rho \rightarrow W[\rho]$. Причем в идеальном случае, то есть без ошибок, операция W тождественна. Теперь рассмотрим такое действие, предварительно повернув базис унитарным преобразованием V , и после применения W сделаем поворот обратно. То есть $\rho \rightarrow VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger$. Назовем операцию

$$\overline{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_V, \quad (7)$$

где $\langle \dots \rangle_V$ обозначает усреднение по всем унитарным операторам V . Покажем, что данная операция инвариантна относительно поворотов. L - унитарное преобразование.

Утверждение:

$$\overline{W}[L^\dagger \rho L] = L^\dagger \overline{W}[\rho] L \quad (8)$$

Доказательство:

$$\overline{W}[L^\dagger \rho L] = \langle VW[V^\dagger L^\dagger \rho LV]V^\dagger \rangle_V = L^\dagger \langle LVW[V^\dagger L^\dagger \rho LV]V^\dagger L^\dagger \rangle_V L \quad (9)$$

домножили слева и справа на $I = L^\dagger L$ и занесли под усреднение по одному повороту в силу линейности. Видно, что под средним произошла замена $V \rightarrow LV$, но так как такое отображение инъективно, то при усреднении по V , LV пробегает все возможные унитарные операторы ровно один раз. А значит результат усреднения не поменялся. Следовательно,

$$L^\dagger \langle LVW[V^\dagger L^\dagger \rho LV]V^\dagger L^\dagger \rangle_V L = L^\dagger \overline{W}[\rho] L, \quad (10)$$

что и требовалось показать.

3.1.2. Изотропия относительно группы

Теперь возьмем некоторую группу G , являющуюся подгруппой унитарных матриц, например, это может быть вся унитарная группа $SU(2)$ или группа Клиффорда одного кубита (см. приложения).

Утверждение:

Пусть $\overline{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_V$, где V пробегает все элементы группы G , то $\overline{W}[L^\dagger \rho L] = L^\dagger \overline{W}[\rho]L$ для любого $L \in G$.

Доказательство:

Будем обозначать $V = g$, $V^\dagger = g^{-1}$, $L = h$, $L^\dagger = h^{-1}$, тогда

$$\overline{W}[\rho] = \langle gW[g^{-1}\rho g]g^{-1} \rangle_g \quad (11)$$

$$\overline{W}[h^{-1}\rho h] = \langle gW[g^{-1}h^{-1}\rho hg]g^{-1} \rangle_g \quad (12)$$

Пусть $hg = k$ и выразим g , g^{-1} через k , тогда усреднять можно по k (умножение слева на h - это автоморфизм G), получим:

$$\overline{W}[h^{-1}\rho h] = \langle h^{-1}kW[k^{-1}\rho k]k^{-1}h \rangle_k = h^{-1}\langle kW[k^{-1}\rho k]k^{-1} \rangle_k h = h^{-1}\overline{W}[\rho]h$$

Вывод:

Для того чтобы результат операции $\overline{W}[\rho]$ был изотропен относительно тех операторов, по которым мы усредняем, достаточно, чтобы эти операторы образовали группу.

3.1.3. Один параметр

Утверждение:

Если G - группа Клиффорда или любая группа, которая содержит группу Клиффорда, то $\overline{W}[\rho]$ действует так:

$$\overline{W}[\rho] = a * \rho + \frac{1-a}{2} * \hat{I}, \text{ где } a \in [-1, 1] \quad (13)$$

Доказательство:

Запишем полученное свойство:

$$W[L^\dagger \rho L] = L^\dagger \overline{W}[\rho]L, \quad (14)$$

L лежит в той же группе, что и V .

Разберемся как может выглядеть результат операции $\overline{W}[\rho]$. Если группа достаточно мощная, то это свойство накладывает существенные ограничения на $\overline{W}[\rho]$.

Сначала заметим, что для любого L возможен вариант:

$$\overline{W}[\rho] = a * \rho + \frac{1-a}{2} * \hat{I}, \text{ где } a \in [-1, 1] \quad (15)$$

Принадлежность a отрезку $[-1, 1]$ связана с физическими свойствами матрицы плотности, а именно тем, что ее собственные числа неотрицательны и небольшие единицы.

Предположим, что операция линейна по своему аргументу. Используя представление произвольной матрицы плотности двухуровневой системы:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + (\mathbf{n}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})), \quad (16)$$

Отдельно рассмотрим действие на компоненты. Беря в качестве L различные $\hat{\sigma}_\alpha$, можно получить следующие соотношения:

$$\hat{\sigma}_\alpha \overline{W}[\hat{\sigma}_\beta] = -\overline{W}[\hat{\sigma}_\beta] \hat{\sigma}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha \overline{W}[\hat{\sigma}_\alpha] = \overline{W}[\hat{\sigma}_\alpha] \hat{\sigma}_\alpha \text{ (не сумма по } \alpha) \quad (18)$$

Из этих уравнений следует, что $\overline{W}[\hat{\sigma}_\alpha] = a * \hat{\sigma}_\alpha$, где $a \in \mathbb{R}$. Теперь рассмотрим $\overline{W}[\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y]$ и $L = \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4})$:

$$\exp(-i\sigma_z \frac{\pi}{4}) * \sigma_x * \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4}) = \sigma_y \quad (19)$$

$$\exp(-i\sigma_z \frac{\pi}{4}) * \sigma_y * \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4}) = -\sigma_x \quad (20)$$

$$L^\dagger \overline{W}[\sigma_x + \sigma_y] L = a_1 * \sigma_y - a_2 * \sigma_x \quad (21)$$

$$\overline{W}[L^\dagger(\sigma_x + \sigma_y)L] = a_2 * \sigma_y - a_1 * \sigma_x \quad (22)$$

Следовательно, $a_1 = a_2$ и $\overline{W}[\sigma_x + \sigma_y] = a * (\sigma_x + \sigma_y)$. По аналогии показывается, что вообще

$$\overline{W}[(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})] = a * (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (23)$$

Также, ясно что $\overline{W}[\hat{I}] = \hat{I}$.

Вывод:

Используя L лишь из группы Клиффорда¹, следует что \overline{W} описывается одним числом a , где число a зависит от операции W .

¹Как могло показаться, для полного усреднения требуется почти вся группа $SU(2)$, но, оказывается, хватает группы Клиффорда.

3.2. Многократное усреднение

В реальных экспериментах ошибка одной операции довольно мала $a \approx 1$. Чтобы усилить ошибку повторяют операцию $\overline{W}[\rho]$ несколько раз:

$$\overline{W}^n[\rho] = a^n * \rho + \frac{(1 - a^n)}{2} * \hat{I} \quad (24)$$

Но, чтобы реализовать \overline{W} требуется сделать $|G|^2$ поворотов (усредняем по группе G). Тогда, чтобы применить эту операцию n раз, может показаться, что потребуется $|G|^{2n}$ поворотов. Покажем, что можно ограничиться $|G|^{n+1}$ поворотами.

Утверждение:

$$\langle V_1 W V_2 W \dots V_n W F \rangle_{V_1, V_2 \dots V_n} = \overline{W}^n \quad (25)$$

Доказательство:

Для удобства будем писать поворот V , где V обозначает преобразование на ρ , действующее по правилу: $\rho \rightarrow V\rho V^\dagger$. Также, если написана строчка UV , то вначале работает преобразование U , а затем V (для подробностей см. обозначения)

Рассмотрим следующую комбинацию:

$$V_1 W V_2 W \dots V_n W F \quad (26)$$

$$F = (V_1 V_2 \dots V_n)^\dagger \quad (27)$$

Тут везде по умолчанию идет усреднение по всем V_k .

$$V_1 W V_2 W \dots V_n W F = V_1 W V_1^\dagger (V_1 V_2) W (V_1 V_2)^\dagger \dots (V_1 V_2 \dots V_n) W (V_1 V_2 \dots V_n)^\dagger \quad (28)$$

Введем $U_k = \overline{V_1 V_2 \dots V_k}$ для $k = \overline{1, n}$.

$$V_1 W V_2 W \dots V_n W F = (U_1 W U_1^\dagger) (U_2 W U_2^\dagger) \dots (U_n W U_n^\dagger) \quad (29)$$

Поймем, чего мы добились. Изначально, мы усредняли по всем V_k , давайте вначале усредним по V_n , фиксируя остальные V_k . Для U_k это означает то же самое, U_n пробегает группу, пока другие U_k фиксированы. То есть можем записать:

$$(U_1 W U_1^\dagger) (U_2 W U_2^\dagger) \dots (U_n W U_n^\dagger) = (U_1 W U_1^\dagger) (U_2 W U_2^\dagger) \dots (U_{n-1} W U_{n-1}^\dagger) \overline{W} \quad (30)$$

Теперь усредним по V_{n-1} , такими же рассуждениями получается, что можно еще упростить:

$$(U_1 W U_1^\dagger) (U_2 W U_2^\dagger) \dots (U_{n-1} W U_{n-1}^\dagger) \overline{W} = (U_1 W U_1^\dagger) (U_2 W U_2^\dagger) \dots \overline{W} \overline{W} \quad (31)$$

И так далее получим, что:

$$\langle V_1 W V_2 W \dots V_n W F \rangle_{V_1, V_2 \dots V_n} = \overline{W}^n \quad (32)$$

3.3. Примеры

В примерах будут рассмотрены два варианта того, чем может быть операция W в реальном кубите и будет посчитан параметр a в этих двух случаях.

3.3.1. Эволюция кубита

Пусть W будет выжиданием времени τ при нулевом поле, то есть гамильтониан выглядит так: $H = -B_0 \cdot \sigma_z + H_{\text{bath}}$. В таком случае эволюция кубита определяется двумя временами: T_1, T_2 . Обозначим $e_j = \exp(-\frac{\tau}{T_j})$

Утверждение:

$$a = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 \quad (33)$$

Доказательство:

В представлении Блоха для матрицы плотности:

$$W[\rho] : \mathbf{n} \rightarrow W\mathbf{n} \quad (34)$$

Здесь W обозначает диагональную матрицу с (e_2, e_2, e_1) на диагонали соответственно². Также в силу связи групп $SU(2)$ и $SO(3)$ действие над матрицей плотности $V^\dagger \rho V$ означает поворот $\mathbf{n} \rightarrow O\mathbf{n}$. Тогда

$$\bar{W}[\rho] : \mathbf{n} \rightarrow \int O^T W O \mathbf{n} dO \quad (35)$$

Как было показано ранее:

$$\bar{W}[\rho] = a * \rho + \frac{1-a}{2} * \hat{I} \quad (36)$$

Для \mathbf{n} это означает $\mathbf{n} \rightarrow a * \mathbf{n}$. То есть имеем равенство:

$$\int O^T W O \mathbf{n} dO = a * \mathbf{n} \quad (37)$$

Скалярно домножим на \mathbf{n} :

$$\int (O\mathbf{n}, W O \mathbf{n}) dO = a * |\mathbf{n}|^2 \quad (38)$$

Сделаем замену $\mathbf{k} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$:

$$\int (O\mathbf{k}, W O \mathbf{k}) dO = a \quad (39)$$

²Имеется ввиду представление взаимодействия, в котором отсутствует тривиальная накрутка фазы, а есть лишь нетривиальная эволюция из-за взаимодействия с внешней средой.

Под интегралом O пробегает всю группу $SO(3)$, а значит вектор $O\mathbf{k}$ пробегает всю единичную сферу. Можно эквивалентно переписать наше равенство:

$$\int (\mathbf{k}, W\mathbf{k}) \frac{d\Omega}{4\pi} = a \quad (40)$$

$$\int (e_2(k_x^2 + k_y^2) + e_1 k_z^2) \frac{d\Omega}{4\pi} = a \quad (41)$$

$$\frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_1 = a \quad (42)$$

Тут был проделан вывод, который имеет довольно узкое применение. Далее в разделе про два кубита будет приведен более мощный инструмент усреднения по группе.

3.3.2. Шум вдоль оси Z

Пусть операция $W = \exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_z)$, где ϕ малый случайный угол имеющий распределение $P(\phi)$. Так как $\phi \ll 1$, то $P(\phi)$ сконцентрирован около некого $\phi_0 \ll 1$ и, положим, имеет гауссов вид с дисперсией A :

$$P(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \exp\left(-\frac{(\phi - \phi_0)^2}{2A}\right) \quad (43)$$

Утверждение:

$$a = \int d\phi P(\phi) \frac{2 \cos \phi + 1}{3} = \frac{2e^{-\frac{A}{2}} \cos(\phi_0) + 1}{3} \quad (44)$$

Доказательство:

Чтобы найти параметр a , рассмотрим, например, $\overline{W}[\sigma_x] = a * \sigma_x$ ¹:

$$\overline{W}[\sigma_x] = \langle (VWV^\dagger)[\sigma_x] \rangle_V = \quad (45)$$

$$\langle V_{\alpha x} (WV^\dagger)[\sigma_\alpha] \rangle_V = \langle V_{\alpha x} V^\dagger \exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_z) \sigma_\alpha \exp(-i\frac{\phi}{2}\sigma_z) V \rangle_V = \quad (46)$$

$$= \langle V^\dagger (V_{xx}(\cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y) + V_{yx}(\cos \phi \sigma_y - \sin \phi \sigma_x) + V_{zx}\sigma_z) V \rangle_V = \quad (47)$$

$$= \langle V_{xx}(V_{\gamma x}^{-1} \cos \phi \sigma_\gamma + V_{\gamma y}^{-1} \sin \phi \sigma_\gamma) + V_{yx}(V_{\gamma y}^{-1} \cos \phi \sigma_\gamma - V_{\gamma x}^{-1} \sin \phi \sigma_\gamma) + \quad (48)$$

$$+ V_{zx} V_{\gamma z}^{-1} \sigma_\gamma \rangle_V =$$

Используя средние:

$$\langle V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta}^{-1} \rangle = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (49)$$

¹Обозначения см. под таблицей обозначений

Получим:

$$= \frac{2 \cos \phi + 1}{3} \sigma_x \quad (50)$$

Тогда:

$$a = \int d\phi P(\phi) \frac{2 \cos \phi + 1}{3} = \frac{2e^{-\frac{A}{2}} \cos(\phi_0) + 1}{3} \quad (51)$$

3.4. Основные результаты

Если G - группа Клиффорда одного кубита, верно что:

$$\overline{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_{V \in G} = a * \rho + \frac{1-a}{2} * \sigma_0 \in [-1, 1] \quad (52)$$

Также для любой последовательности, где V_i унитарные и F восстанавливающая, верно что:

$$\langle V_1 W V_2 W \dots V_n W F \rangle_{V_i} = \overline{W}^n \quad (53)$$

4. Два кубита

В этом разделе я буду изучать случайное тестирование двухкубитных операций. Особенность этого раздела в том, что усреднение будет происходить по группе Клиффорда одного кубита умножить прямо на себя (вращения типа $g \otimes h$, где g, h элементы из группы Клиффорда для одного кубита). Эта группа состоит из $24 \cdot 24 = 576$ элементов и является подгруппой группы Клиффорда двух кубитов ¹. Последняя состоит из 11520 элементов и, как мы знаем, при усреднении по ней получается один параметр для ошибки. Логично ожидать, что при усреднении по однокубитным вращениям, свести ошибку к одному параметру не удастся. Тем не менее такое неполное усреднение используется в реальных экспериментах, потому что, во-первых, реализовать все 11520 элементов двухкубитной группы затруднительно, во-вторых, однокубитные вращения умеют выполнять с меньшей ошибкой, чем двухкубитные операции.

В этом разделе будет развита техника усреднения ошибок двухкубитных операций по однокубитным поворотам. Будут получены три параметра при таком усреднении (4.1) и показано, как их извлекать по отдельности из экспериментальных данных (4.2). Также для случайного тестирования второй вариации будет получено рекуррентное соотношение на усреднённые ошибки при разных длинах последовательностей (4.3). Из данного соотношения будет получена линейная связь между параметрами на соседних шагах. В качестве примера, матрица связи будет посчитана для операций CZ (4.3.1) и CNOT (4.3.2).

4.1. Усреднение по однокубитным операциям

Утверждение:

При усреднении по однокубитным поворотам будет три параметра a, b, c , описывающих действие \overline{W} . А именно:

$$\overline{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_{V \in G} \quad (54)$$

$$\{ V_1 \otimes V_2 \in G \mid V_1, V_2 \in \text{группа Клиффорда одного кубита} \} \quad (55)$$

$$\rho = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (56)$$

$$\overline{W}[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + a * n_\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + b * m_\beta \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + c * k_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (57)$$

Доказательство:

В качестве базиса эрмитовых операторов возьмем следующие, (в дальнейшем мы будем раскладывать по нему матрицу плотности)²:

$$\sigma_j \otimes \sigma_k, \quad \{i, k\} = \overline{0, 3} \quad (58)$$

¹Группа, которая переводит $\sigma_i \otimes \sigma_j$ в $\sigma_k \otimes \sigma_l$ при действии на них сопряжением.

²Действительно, это просто тензорное произведение двух однокубитных базисов - $4 \cdot 4 = 16$ элементов.

Как и в случае для одного кубита, определим операцию \overline{W} так:

$$\overline{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_V \quad (59)$$

V уже есть элемент из группы Клиффорда одного кубита умножить прямо на себя.

Тогда используя свойство:

$$\overline{W}[L^\dagger \rho L] = L^\dagger \overline{W}[\rho] L, \quad \forall L \in G. \quad (60)$$

G суть группа, по которой выполнялось усреднение.

В самом общем виде матрица плотности выглядит так (из условия эрмитовости и нормировки):

$$\rho = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (61)$$

(По повторяющимся индексам идёт суммирование). Во-первых:

$$\overline{W}[\sigma_0 \otimes \sigma_0] = \sigma_0 \otimes \sigma_0 \quad (62)$$

(Только единичная матрица инвариантна относительно всех поворотов).

Теперь рассмотрим $\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0]$, без ограничения общности, возьмем $\alpha = x$. Запишем в наиболее общем виде:

$$\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = c * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (63)$$

Беря различные L будем упрощать это выражение:

1) $L = \sigma_x \otimes \sigma_0$:

$$c + n_\alpha + m_\beta + k_{\alpha\beta} = c + n_x - n_y - n_z + m_\beta + k_{x\beta} - k_{y\beta} - k_{z\beta} \quad (64)$$

Здесь и далее записано в символическом виде (опуская матрицы Паули), чтобы не загромождать вид равенств. В точном виде после каждого коэффициента стоит соответствующий эрмитов оператор. Отсюда: $n_y = n_z = k_{y\beta} = k_{z\beta} = 0$.

2) $L = \sigma_0 \otimes \sigma_x$:

$$c + n_x + m_\beta + k_{x\beta} = c + n_x + m_x - m_y - m_z + k_{xx} - k_{xy} - k_{xz} \quad (65)$$

Отсюда: $m_y = m_z = k_{xy} = k_{xz} = 0$.

3) $L = \sigma_y \otimes \sigma_0$:

$$-c - n_x - m_x - k_{xx} = c - n_x + m_x - k_{xx} \quad (66)$$

Отсюда: $c = m_x = 0$.

4) $L = \sigma_0 \otimes \sigma_y$:

$$n_x + k_{xx} = n_x - k_{xx} \quad (67)$$

Отсюда: $k_{xx} = 0$.

И получаем, в силу равноправности σ_x , σ_y , σ_z относительно группы Клиффорда:

$$\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = a * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (68)$$

Где важно отметить, что a одинаковый коэффициент для всех α . Впрочем, последнее утверждение можно доказать и строго. Возьмем:

$$\overline{W}[n_x \sigma_x \otimes \sigma_0 + n_y \sigma_y \otimes \sigma_0] = a n_x * \sigma_x \otimes \sigma_0 + b n_y * \sigma_y \otimes \sigma_0 \quad (69)$$

и $L = \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4}) \otimes \sigma_0$. Тогда из условия изотропности относительно такого L :

$$b * n_x \sigma_y \otimes \sigma_0 - a * n_y \sigma_x \otimes \sigma_0 = a * n_x \sigma_y \otimes \sigma_0 - b * n_y \sigma_y \otimes \sigma_0 \quad (70)$$

следует, что $a = b$.

Теперь изучим, например, $\overline{W}[\sigma_x \otimes \sigma_y]$.

1) $L = \sigma_x \otimes \sigma_0$:

$$c + n_\alpha + m_\beta + k_{\alpha\beta} = c + n_x - n_y - n_z + m_\beta + k_{x\beta} - k_{y\beta} - k_{z\beta} \quad (71)$$

Отсюда: $n_y = n_z = k_{y\beta} = k_{z\beta} = 0$.

2) $L = \sigma_0 \otimes \sigma_y$:

$$c + n_x + m_\beta + k_{x\beta} = c + n_x - m_x + m_y - m_z - k_{xx} + k_{xy} - k_{xz} \quad (72)$$

Отсюда: $m_x = m_z = k_{xx} = k_{xz} = 0$.

3) $L = \sigma_y \otimes \sigma_0$:

$$-c - n_x - m_y - k_{xy} = c - n_x + m_y - k_{xy} \quad (73)$$

Отсюда: $c = m_y = 0$.

4) $L = \sigma_0 \otimes \sigma_x$:

$$-n_x - k_{xy} = n_x - k_{xy} \quad (74)$$

Отсюда: $n_x = 0$

Итого:

$$\overline{W}[\sigma_x \otimes \sigma_y] = c * \sigma_x \otimes \sigma_y \quad (75)$$

Ясно, что взяв $L = \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4}) \otimes \sigma_0$, показывается, что c одинаково для $\sigma_x \otimes \sigma_y$ и $\sigma_y \otimes \sigma_y$. Но также можно взять $L = \sigma_0 \otimes \exp(i\sigma_z \frac{\pi}{4})$ и показать, что c одинаково для $\sigma_x \otimes \sigma_x$ и $\sigma_x \otimes \sigma_y$. То есть в целом:

$$\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = c * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad \{\alpha, \beta\} = \overline{1, 3} \quad (76)$$

Итого, усредняя по прямому произведению группы Клиффорда на себя, мы имеем:

$$\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = a * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (77)$$

$$\overline{W}[\sigma_0 \otimes \sigma_\beta] = b * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta \quad (78)$$

$$\overline{W}[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = c * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad \{\alpha, \beta\} = \overline{1, 3} \quad (79)$$

Связь между коэффициентами a , b , c установить не удастся. Понять это можно так: элемент $\sigma_\alpha \otimes \sigma_0$ нельзя перевести поворотом из нашей группы в элемент $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$. Этому мешает σ_0 , которая остается на месте при таких поворотах. Итого, в терминах матрицы плотности:

$$\rho = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (80)$$

$$\overline{W}[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + a * n_\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + b * m_\beta \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + c * k_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (81)$$

Вывод:

Цена неполного усреднения - три параметра, вместо одного. Поэтому зависимость надежности в общем случае описывается тремя экспонентами с показателями a , b , c .

4.2. Операция $\overline{W}[\rho]$ с начальным состоянием $|\uparrow\uparrow\rangle$

Будем работать в базисе состояний:

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

В этом базисе, например, оператор $\sigma_0 \otimes \sigma_x$ выглядит следующим образом:

$$\sigma_0 \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приготовим систему в чистом состоянии $|\uparrow\uparrow\rangle$. Тогда её матрица плотности имеет вид:

$$\rho = \frac{1}{4}(\sigma_0 + \sigma_z) \otimes (\sigma_0 + \sigma_z) \quad (82)$$

Или раскрыв скобки:

$$\rho = \frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_z \otimes \sigma_0 + \sigma_0 \otimes \sigma_z + \sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (83)$$

Применим операцию $\overline{W}[\rho]$ n раз:

$$\overline{W}^n[\rho] = \frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + a^n \sigma_z \otimes \sigma_0 + b^n \sigma_0 \otimes \sigma_z + c^n \sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (84)$$

Обозначим вероятности системы находится в соответствующих состояниях через:

$$P_{\uparrow\uparrow}, P_{\uparrow\downarrow}, P_{\downarrow\uparrow}, P_{\downarrow\downarrow}.$$

Тогда, зная матрицу плотности, можно легко связать ее параметры с этими вероятностями:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\uparrow\uparrow} \\ P_{\uparrow\downarrow} \\ P_{\downarrow\uparrow} \\ P_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^n \\ b^n \\ a^n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Вывод:

Чтобы находить параметры a , b , c по отдельности, удобно строить описанные выше комбинации вероятностей, тогда на каждом графике будет ровно одна экспонента.

4.3. Усреднение почти унитарного поворота

В этом разделе мы будем изучать усреднение ошибки логической операции, которая в идеальном случае является не тождественным унитарным поворотом $SU(4)$. Например, это может быть вентиль CZ или SWAP.

Утверждение:

Имеется линейная рекуррентная связь между параметрами для последовательностей длины n и $n + 1$:

$$\bar{\Lambda}_n = \langle V_1 W V_2 W \dots V_n W F \rangle_V \quad (86)$$

$$\bar{\Lambda}_n[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + f_n^{(1)} * n_\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + f_n^{(2)} * m_\beta \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + f_n^{(3)} * k_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (87)$$

$$\mathbf{f}_{n+1} = \hat{M} \mathbf{f}_n, \quad \hat{M} - \text{матрица } 3 \text{ на } 3 \quad (88)$$

Доказательство:

Предположим, что эта операция выглядит так:

$$W = \Lambda W_0, \quad (89)$$

где W_0 из $SU(4)$, а $\Lambda \approx \sigma_0 \otimes \sigma_0$ её ошибка 10^{-4} . Удобно ее деполяризовать следующим способом:

$$\langle V_1 W V_2 W F \rangle_V = \langle V_1 \Lambda W_0 V_2 \Lambda W_0 F \rangle_V \quad (90)$$

тут операция $F = (V_1 W_0 V_2 W_0)^\dagger$ есть восстанавливающий поворот, который в идеальном случае $\Lambda = \sigma_0 \otimes \sigma_0$ вернул бы состояние в исходное. Вообще количество операторов V может быть произвольным, здесь взято две штуки в качестве примера. Перепишем тождественно:

$$\langle (V_1 \Lambda W_0 (V_2 \Lambda V_2^\dagger) W_0^\dagger V_1^\dagger) \rangle_V \quad (91)$$

Операция F свернулась. Введем:

$$\bar{\Lambda}_1 = \langle V \Lambda V^\dagger \rangle_V \quad (92)$$

$$\bar{\Lambda}_2 = \langle V \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V \quad (93)$$

Тогда формула (48) и есть $\bar{\Lambda}_2$. Теперь запишем деполяризацию уже с тремя операциями V :

$$\langle V_1 \Lambda W_0 V_2 \Lambda W_0 V_3 \Lambda W_0 F \rangle_{V_1, V_2, V_3} \quad (94)$$

Перепишем:

$$\langle V_1 \Lambda W_0 V_2 \Lambda W_0 (V_3 \Lambda V_3^\dagger) W_0^\dagger V_2^\dagger W_0^\dagger V_1^\dagger \rangle_{V_1, V_2, V_3} \quad (95)$$

$$\langle V_1 \Lambda W_0 (V_2 \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V_2^\dagger) W_0^\dagger V_1^\dagger \rangle_{V_1, V_2} \quad (96)$$

$$\langle V_1 \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_2 W_0^\dagger V_1^\dagger \rangle_{V_1} \quad (97)$$

Введем:

$$\bar{\Lambda}_3 = \langle V \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_2 W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V \quad (98)$$

И вообще, продолжим по индукции и получим:

$$\bar{\Lambda}_n = \langle V_1 \Lambda W_0 V_2 \Lambda W_0 V_3 \Lambda W_0 \dots V_n \Lambda W_0 F \rangle_{V_1, V_2, \dots, V_n} \quad (99)$$

$$\bar{\Lambda}_{n+1} = \langle V \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_n W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V \quad (100)$$

Введем вектор \mathbf{f}_n следующим образом:

$$\bar{\Lambda}_n[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + f_n^{(1)} * n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + f_n^{(2)} * m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + f_n^{(3)} * k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta,$$

где верхний индекс обозначает компоненту вектора \mathbf{f}_n , а нижний его номер. Связь между векторами на n -ом и $n+1$ -ом шаге задается матрицей. Назовем эту матрицу \hat{M} , тогда:

$$\mathbf{f}_n = \hat{M}^n * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

Вывод:

У матрицы \hat{M} есть три собственных числа, они и будут являться показателями экспонент на графике надежности от длины последовательности. Чтобы понять, какими комбинациями вероятностей эти моды можно выделить по отдельности, нужно смотреть на собственные вектора матрицы \hat{M} .

Метод: Чтобы найти матрицу \hat{M} для определенных вентилях мы будем пользоваться приближением $\Lambda = \bar{\Lambda}_1$ в формуле для рекуррентной связи ошибок:

$$\bar{\Lambda}_{n+1} = \langle V \bar{\Lambda}_1 W_0 \bar{\Lambda}_n W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V \quad (102)$$

Логика этого приближения в следующем. Ошибка мала $\sim 10^{-3}$. Для матричных элементов $\Lambda_{ij \rightarrow kl}$ это означает, что диагональные $\Lambda_{ij \rightarrow ij}$ близки к 1 с точностью $\sim 10^{-3}$, а недиагональные близки к 0 с той же точностью. Параметры a , b , c выражаются через диагональные элементы ошибки (см. 6.3):

$$a = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0 \rightarrow i0} \quad (103)$$

$$b = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \Lambda_{0j \rightarrow 0j} \quad (104)$$

$$c = \frac{1}{9} \sum_{i,j=1}^3 \Lambda_{ij \rightarrow ij} \quad (105)$$

Для матричных элементов $\bar{\Lambda}_1$ имеем:

$$\bar{\Lambda}_{i0 \rightarrow i0} = a \quad (106)$$

$$\bar{\Lambda}_{0j \rightarrow 0j} = b \quad (107)$$

$$\bar{\Lambda}_{ij \rightarrow ij} = c \quad i, j \in \overline{1, 3} \quad (108)$$

Поэтому приближение $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda$ позволяет найти спектральные характеристики \hat{M} с точностью $\sim 10^{-3}$. Это позволяет сделать существенные выводы. Например, если в этом приближении две моды матрицы \hat{M} меньше единицы, то на графике надежности их видно не будет на фоне медленно затухающей единичной моды¹. (Как в случае CNOT или CZ.) Или все три моды могут оказаться близки к единице, тогда с помощью правильных комбинаций вероятностей $P_{\uparrow\uparrow}$, $P_{\uparrow\downarrow}$, $P_{\downarrow\uparrow}$, $P_{\downarrow\downarrow}$ их можно выделить по отдельности, как в случае $\sqrt{\text{SWAP}}$.

4.3.1. CZ

Возьмем в качестве W_0 операцию CZ. Её матрица в нашем базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \otimes \sigma_0 + \sigma_0 \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \sigma_z \quad (109)$$

¹Почти единичная мода будет всегда, потому что последовательность в идеальном случае есть тождественный оператор

Утверждение:

Для вентиля CZ спектр матрицы \hat{M} примерно такой (с точностью до поправок линейных по $1 - a$, $1 - b$, $1 - c \sim 10^{-2}$):

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{9} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Доказательство:

Так как CZ симметрична по перестановке левого и правого сомножителя в тензорном разложении, то достаточно посчитать её действие на девяти базисных элементах. Также $W_0 = W_0^\dagger$, это тоже несколько упрощает задачу.

$$W_0 \sigma_x \otimes \sigma_0 W_0^\dagger = \sigma_x \otimes \sigma_z \quad (111)$$

$$W_0 \sigma_y \otimes \sigma_0 W_0^\dagger = \sigma_y \otimes \sigma_z \quad (112)$$

$$W_0 \sigma_z \otimes \sigma_0 W_0^\dagger = \sigma_z \otimes \sigma_0 \quad (113)$$

$$W_0 \sigma_x \otimes \sigma_x W_0^\dagger = \sigma_y \otimes \sigma_y \quad (114)$$

$$W_0 \sigma_y \otimes \sigma_y W_0^\dagger = \sigma_x \otimes \sigma_x \quad (115)$$

$$W_0 \sigma_x \otimes \sigma_y W_0^\dagger = -\sigma_y \otimes \sigma_x \quad (116)$$

Вообще матрица \hat{M} выражается через элементы супероператора ошибки Λ (см. приложения). Чтобы получить её вид через параметры a , b , c , сделаем предположение: $\Lambda = \bar{\Lambda}_1$, то есть ошибка изначально была изотропна¹.

Для дальнейшего преобразования нам будут удобны следующие обозначения. Пусть $V = V_1 \otimes V_2$ поворот из $SU(2) \otimes SU(2)$. Тогда:

$$V \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 V^\dagger = V_{\alpha'\alpha} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_0 \quad (117)$$

$$V \sigma_0 \otimes \sigma_\beta V^\dagger = V^{\beta'\beta} \sigma_0 \otimes \sigma_{\beta'} \quad (118)$$

$$V \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta V^\dagger = V_{\alpha'\alpha} V^{\beta'\beta} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\beta'} \quad (119)$$

Также обратные к этим операции:

$$V^\dagger \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 V = U_{\alpha'\alpha} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_0 \quad (120)$$

$$V^\dagger \sigma_0 \otimes \sigma_\beta V = U^{\beta'\beta} \sigma_0 \otimes \sigma_{\beta'} \quad (121)$$

$$V^\dagger \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta V = U_{\alpha'\alpha} U^{\beta'\beta} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\beta'} \quad (122)$$

¹Такое приближение разумно, так как ошибка мала и $\Lambda \approx \hat{I}$.

Где матрицы $V_{\alpha'\alpha}$ и $U_{\alpha'\alpha}$ обратны друг другу и полностью задаются элементом V_1 из $SU(2)$. Матрицы $V^{\beta'\beta}$ и $U^{\beta'\beta}$ также обратны и задаются элементом V_2 .

Как мы поняли ранее:

$$\bar{\Lambda}_1[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = a * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (123)$$

$$\bar{\Lambda}_1[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = b * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta \quad (124)$$

$$\bar{\Lambda}_1[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = c * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \quad (125)$$

где a , b , c числа чуть меньше единицы в меру малости ошибки. Теперь займемся нахождением $\bar{\Lambda}_2[\rho]$.

$$\bar{\Lambda}_2[\rho] = \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1[W_0 \bar{\Lambda}_1[V \rho V^\dagger] W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V \quad (126)$$

Будем находить ее действие на трех наборах. Для первого:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1[W_0 \bar{\Lambda}_1[V \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 V^\dagger] W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \quad (127)$$

$$= a \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1[W_0 (V_{\alpha'\alpha} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_0) W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \quad (128)$$

$$= a \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1[W_0 (V_{x\alpha} \sigma_x \otimes \sigma_0 + V_{y\alpha} \sigma_y \otimes \sigma_0 + V_{z\alpha} \sigma_z \otimes \sigma_0) W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \quad (129)$$

$$= a \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1[V_{x\alpha} \sigma_x \otimes \sigma_z + V_{y\alpha} \sigma_y \otimes \sigma_z + V_{z\alpha} \sigma_z \otimes \sigma_0] W_0 V \rangle_V = \quad (130)$$

$$= a \langle V^\dagger W_0^\dagger (c V_{x\alpha} \sigma_x \otimes \sigma_z + c V_{y\alpha} \sigma_y \otimes \sigma_z + a V_{z\alpha} \sigma_z \otimes \sigma_0) W_0 V \rangle_V = \quad (131)$$

$$= a \langle V^\dagger (c V_{x\alpha} \sigma_x \otimes \sigma_0 + c V_{y\alpha} \sigma_y \otimes \sigma_0 + a V_{z\alpha} \sigma_z \otimes \sigma_0) V \rangle_V = \quad (132)$$

$$= ac \langle V_{x\alpha} U_{\gamma x} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 + ac \langle V_{y\alpha} U_{\gamma y} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 + a^2 \langle V_{z\alpha} U_{\gamma z} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \quad (133)$$

Поймем чему равны эти средние:

$$\langle V_{x\alpha} U_{\gamma x} \rangle_V + \langle V_{y\alpha} U_{\gamma y} \rangle_V + \langle V_{z\alpha} U_{\gamma z} \rangle_V = \delta_{\alpha\gamma} \quad (134)$$

Так как выше стоит просто произведение матрицы U на обратную к ней. Также в силу равноправности осей в нашей группе, заключаем, что средние равны $\frac{1}{3} \delta_{\alpha\gamma}$. Поэтому:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = a * \frac{a + 2c}{3} \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (135)$$

Также в силу того, что наша операция симметрична по перестановке тензорных множителей, имеем:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_0 \otimes \sigma_\beta] = b * \frac{b + 2c}{3} \sigma_0 \otimes \sigma_\beta \quad (136)$$

Теперь вычислим для последнего набора:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 \bar{\Lambda}_1 [V \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta V^\dagger] W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \quad (137)$$

$$= c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{\alpha' \alpha} V^{\beta' \beta} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\beta'} W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V \quad (138)$$

Будем упрощать каждое из девяти слагаемых по отдельности:

$$1) \alpha' = x \beta' = x$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{x\alpha} V^{x\beta} \sigma_x \otimes \sigma_x W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \quad (139)$$

$$= c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [V_{x\alpha} V^{x\beta} \sigma_y \otimes \sigma_y] W_0 V \rangle_V = \quad (140)$$

$$= c^2 \langle V^\dagger W_0^\dagger V_{x\alpha} V^{x\beta} \sigma_y \otimes \sigma_y W_0 V \rangle_V = \quad (141)$$

$$= c^2 \langle V_{x\alpha} U_{\gamma x} V^{x\beta} U^{\delta x} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_\delta = \quad (142)$$

$$= \frac{c^2}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (143)$$

Последнее равенство написано из следующих соображений. Так V_1 полностью независимо от V_2 , то

$$\langle V_{x\alpha} U_{\gamma x} V^{x\beta} U^{\delta x} \rangle_V = \langle V_{x\alpha} U_{\gamma x} \rangle_{V_1} * \langle V^{x\beta} U^{\delta x} \rangle_{V_2} = \frac{1}{9} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \quad (144)$$

По аналогии для других компонент:

$$2) \alpha' = y \beta' = y$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{y\alpha} V^{y\beta} \sigma_y \otimes \sigma_y W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{c^2}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (145)$$

$$3) \alpha' = z \beta' = z$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{z\alpha} V^{z\beta} \sigma_z \otimes \sigma_z W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{c^2}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (146)$$

$$4) \alpha' = x \beta' = y$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{x\alpha} V^{y\beta} \sigma_x \otimes \sigma_y W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{c^2}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (147)$$

$$5) \alpha' = y \quad \beta' = x$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{y\alpha} V^{x\beta} \sigma_y \otimes \sigma_x W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{c^2}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (148)$$

$$6) \alpha' = x \quad \beta' = z$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{x\alpha} V^{z\beta} \sigma_x \otimes \sigma_z W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{ac}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (149)$$

$$7) \alpha' = z \quad \beta' = x$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{z\alpha} V^{x\beta} \sigma_z \otimes \sigma_x W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{bc}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (150)$$

$$8) \alpha' = y \quad \beta' = z$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{y\alpha} V^{z\beta} \sigma_y \otimes \sigma_z W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{ac}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (151)$$

$$9) \alpha' = z \quad \beta' = y$$

$$c \langle V^\dagger W_0^\dagger \bar{\Lambda}_1 [W_0 V_{z\alpha} V^{y\beta} \sigma_z \otimes \sigma_y W_0^\dagger] W_0 V \rangle_V = \frac{bc}{9} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (152)$$

Итого:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = c \frac{2a + 2b + 5c}{9} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (153)$$

То есть, имея вначале матрицу плотности:

$$\rho = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (154)$$

Применив к ней строку, где встречается W один раз, и усреднив, получим:

$$\bar{\Lambda}_1[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + a * n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + b * m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + c * k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (155)$$

А для $\bar{\Lambda}_2[\rho]$ коэффициенты заменяются следующим образом:

$$a \longrightarrow a \frac{a + 2c}{3} \quad (156)$$

$$b \longrightarrow b \frac{b + 2c}{3} \quad (157)$$

$$c \longrightarrow c \frac{2a + 2b + 5c}{9} \quad (158)$$

Тогда в силу рекуррентных соотношений между $\bar{\Lambda}_{n+1}[\rho]$ и $\bar{\Lambda}_n[\rho]$:

$$\bar{\Lambda}_n[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + f_n^{(1)} * n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + f_n^{(2)} * m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + f_n^{(3)} * k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \quad (159)$$

где верхний индекс обозначает компоненту вектора \mathbf{f}_n , а нижний его номер. А связь между векторами на n -ом и $n+1$ -ом шаге следующая:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a & 0 & \frac{2}{3}a \\ 0 & \frac{1}{3}b & \frac{2}{3}b \\ \frac{2}{9}c & \frac{2}{9}c & \frac{5}{9}c \end{pmatrix} * \mathbf{f}_n \quad (160)$$

Назовем эту матрицу \hat{M} , тогда:

$$\mathbf{f}_n = \hat{M}^n * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (161)$$

Попробуем проанализировать, что это значит в реальном эксперименте. Сразу заметим, что собственные значения данной матрицы есть "некрасивые" выражения через коэффициенты a , b , c . Поэтому будем делать анализ в приближении:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (162)$$

где α , β , $\gamma \ll 1$. В нулевом приближении спектр матрицы есть: $\{1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\}$. Причём с.з. равному единице соответствует вектор $(1 \ 1 \ 1)^T$.

Поэтому в первом (линейном) приближении достаточно оставить лишь первую моду, так как две другие быстро затухают (модуль сильно меньше единицы), к тому же коэффициенты в разложении начального условия по их собственным векторам малы в меру малости α , β , γ .

Тогда, расписав кубическое уравнение на с.з. через малые параметры, легко получается первая поправка к первой моде:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\alpha + \beta + 3\gamma}{5} \quad (163)$$

Также, разложим начальное состояние по базису с.в. с учетом первой поправки:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + \epsilon_1) * \mathbf{h}_1 + \epsilon_2 * \mathbf{h}_2 + \epsilon_3 * \mathbf{h}_3 \quad (164)$$

То есть:

$$\mathbf{f}_n \approx (1 + \epsilon_1) * \left(1 - \frac{\alpha + \beta + 3\gamma}{5}\right)^n * \mathbf{h}_1 \quad (165)$$

Значения ϵ_1 и \mathbf{h}_1 не так важны, в силу ошибок считывания и приготовления состояния. А вот зависимость от n принципиальна. То есть при таком усреднении на графике надежности будет только **одна** экспонента.

Напомним, что в случае $W_0 = \sigma_0 \otimes \sigma_0$, матрица \hat{M} диагональна с числами a, b, c на диагонали. То есть в нулевом приближении матрица единичная и важны все три моды. А в случае CZ две моды быстро вымирают.

Вывод:

Для случайного тестирования операции CZ с помощью однокубитных вращений на графике надежности следует ожидать одну экспоненту независимо от комбинации вероятностей.

4.3.2. CNOT

Пусть теперь

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (166)$$

Утверждение:

Матрица M для CNOT совпадает с матрицей \hat{M} для CZ.

Доказательство:

Выпишем действие W_0 на базисных элементах $\sigma_k \otimes \sigma_j$:

$$\sigma_x \otimes \sigma_0 \longrightarrow \sigma_x \otimes \sigma_x \quad \sigma_0 \otimes \sigma_x \longrightarrow \sigma_0 \otimes \sigma_x$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_0 \longrightarrow \sigma_y \otimes \sigma_x \quad \sigma_0 \otimes \sigma_y \longrightarrow \sigma_z \otimes \sigma_y$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_0 \longrightarrow \sigma_z \otimes \sigma_0 \quad \sigma_0 \otimes \sigma_z \longrightarrow \sigma_z \otimes \sigma_z$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x \longrightarrow \sigma_x \otimes \sigma_0 \quad \sigma_x \otimes \sigma_y \longrightarrow \sigma_y \otimes \sigma_z \quad \sigma_x \otimes \sigma_z \longrightarrow -\sigma_y \otimes \sigma_y$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_x \longrightarrow \sigma_y \otimes \sigma_0 \quad \sigma_y \otimes \sigma_y \longrightarrow -\sigma_x \otimes \sigma_z \quad \sigma_y \otimes \sigma_z \longrightarrow \sigma_x \otimes \sigma_y$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_x \longrightarrow \sigma_z \otimes \sigma_x \quad \sigma_z \otimes \sigma_y \longrightarrow \sigma_0 \otimes \sigma_y \quad \sigma_z \otimes \sigma_z \longrightarrow \sigma_0 \otimes \sigma_z$$

Можно заметить, что для нахождения матрицы перехода M нужно посчитать как наборы перемешиваются из-за действия W_0 . Поясним, среди отображений для первого набора есть 2 элемента из третьего и 1 из первого, поэтому коэффициент будет $\frac{2c+a}{3}$. Для второго набора - 2 из третьего и 1 из второго, то есть $\frac{2c+b}{3}$. Для третьего - 2 из первого, 2 из второго и 5 из третьего, то есть $\frac{5c+2a+2b}{9}$. Получается, что матрица \hat{M} совпадает с матрицей перехода для CZ.

Этому есть простое объяснение. Рассмотрим замену $W \longrightarrow U_1 W U_2$ в формуле для рекуррентной связи ошибок $\bar{\Lambda}_1$ и $\bar{\Lambda}_2$:

$$\langle V_1(U_1 \Lambda W_0 U_2) V_2(U_1 \Lambda W_0 U_2) F \rangle_V = \quad (167)$$

$$= \langle V_1 U_1 \Lambda W_0 U_2 V_2 U_1 \Lambda U_1^\dagger V_2^\dagger U_2^\dagger W_0^\dagger U_1^\dagger V_1^\dagger \rangle_V = \quad (168)$$

$$= \langle V_1 U_1 \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger U_1^\dagger V_1^\dagger \rangle_V = \langle V \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V \rangle_V \quad (169)$$

То есть, как мы видим, такая замена сохраняет $\bar{\Lambda}_2$. Поэтому двухкубитные операции, которые переводятся друг в друга через однокубитные, имеют одинаковые матрицы \hat{M} .

Вывод:

Для случайного тестирования операции CZ с помощью однокубитных вращений на графике надежности следует ожидать одну экспоненту независимо от комбинации вероятностей.

4.3.3. $\sqrt{\text{SWAP}}$

Пусть теперь

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (170)$$

Утверждение:

В изотропном приближении $\Lambda = \bar{\Lambda}_1$ для вектора \mathbf{f}_n имеем:

$$\mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} a \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \\ b \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \\ c^n \end{pmatrix} \quad (171)$$

Доказательство:

Выпишем действие W_0 на базисных элементах:

$$W_0 \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 W_0^\dagger = \frac{1+i}{2} \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + \frac{1-i}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_\alpha \quad (172)$$

$$W_0 \sigma_0 \otimes \sigma_\beta W_0^\dagger = \frac{1+i}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + \frac{1-i}{2} \sigma_\beta \otimes \sigma_0 \quad (173)$$

$$W_0 \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta W_0^\dagger = \frac{1+i}{2} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta + \frac{1-i}{2} \sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha \quad (174)$$

Найдем в изотропном приближении $\bar{\Lambda}_2[\sigma_x \otimes \sigma_0]$:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_x \otimes \sigma_0] = \langle (V \bar{\Lambda}_1 W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_x \otimes \sigma_0] \rangle_V = \quad (175)$$

$$= \langle a V_{\alpha x} (W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] \rangle_V = \quad (176)$$

$$= \langle a V_{\alpha x} (W_0^\dagger V^\dagger) [a \frac{1+i}{2} \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + b \frac{1-i}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_\alpha] \rangle_V = \quad (177)$$

$$= \langle aV_{\alpha x}(V^\dagger) \left[\frac{a+b}{2} \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + i \frac{a-b}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_\alpha \right] \rangle_V = \quad (178)$$

$$= a \frac{a+b}{2} \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \langle V_{\alpha x} U_{\gamma\alpha} \rangle_V + ia \frac{a-b}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_\gamma \langle V_{\alpha x} U^{\gamma\alpha} \rangle_V = \quad (179)$$

$$= a \frac{a+b}{2} \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \delta_{\gamma x} + 0 = a \frac{a+b}{2} \sigma_x \otimes \sigma_0 \quad (180)$$

Аналогично получим:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_0 \otimes \sigma_x] = a \frac{a+b}{2} \sigma_0 \otimes \sigma_x \quad (181)$$

Третий набор $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$ не перемешивается с другими наборами при действии W_0 , поэтому:

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta] = c^2 \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (182)$$

Итого для матрицы \hat{M} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (183)$$

Спектр и собственные вектора в этом случае имеют вид:

$$\lambda_1 = \frac{a+b}{2} \quad \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 0 \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = c \quad \mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad (184)$$

Поэтому после применения $\bar{\Lambda}_n$ имеем:

$$\mathbf{f}_n = \hat{M}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \\ b \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \\ c^n \end{pmatrix} \quad (185)$$

Тогда, используя приём описанный в (4.2), можно выделить две экспоненты по отдельности и измерить их показатели.

4.4. Основные результаты

Определим:

$$\bar{W}[\rho] = \langle VW[V^\dagger \rho V]V^\dagger \rangle_V \quad (186)$$

V элемент из группы Клиффорда одного кубита умножить прямо на себя. Тогда, если вначале:

$$\rho = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (187)$$

То после применения \overline{W}^n :

$$\overline{W}[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + a^n * n_\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + b^n * m_\beta \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + c^n * k_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \quad (188)$$

Для $W = \Lambda W_0$, где W_0 - унитарный поворот из $SU(4)$. Определим:

$$\overline{\Lambda}_n = \langle V_1 \Lambda W_0 V_2 \Lambda W_0 \dots V_n \Lambda W_0 F \rangle_{V_1, V_2, \dots, V_n} \quad (189)$$

Тогда, верно что:

$$\overline{\Lambda}_{n+1} = \langle V \Lambda W_0 \overline{\Lambda}_n W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V \quad (190)$$

Через вектор \mathbf{f}_n :

$$\overline{\Lambda}_n[\rho] = 1/4 * \sigma_0 \otimes \sigma_0 + f_n^{(1)} * n_\alpha * \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 + f_n^{(2)} * m_\beta * \sigma_0 \otimes \sigma_\beta + f_n^{(3)} * k_{\alpha\beta} * \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta,$$

Тогда, верно что:

$$\mathbf{f}_n = \hat{M}^n * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (191)$$

В случае $W = \text{CNOT} / \text{CZ}$ присутствует лишь одна мода на графике надежности, так как две другие быстро вымирают. В случае $W = \sqrt{\text{SWAP}}$ все три моды близки к единице и их можно выделять приемом (4.2).

5. Заключение

В данной работе был изучен метод случайного тестирования для измерения ошибок логических операций в алгоритмах на квантовом компьютере. Были получены и проверены основные свойства, такие как: один параметр при усреднении по группе Клиффорда, экспоненциальная зависимость надежности последовательности от её длины. В случае двух кубитов был развит метод неполного усреднения по однокубитным операциям. Были получены три параметра для такого усреднения. Было выяснено, что в общем случае имеется линейная связь между параметрами через матрицу \hat{M} на разных длинах последовательности. Из спектральных характеристик этой матрицы можно выяснить какие зависимости следует ожидать на графике надежности от длины последовательности. Была найдена матрица \hat{M} для основных двух кубитных вентилях. В процессе работы, была обнаружена статья [9], где получена часть результатов моей работы, а именно наличие трех параметров. Данное исследование актуально, так как метод случайного тестирования активно применяется многими экспериментальными группами в области квантовых вычислений.

В дальнейшем, есть планы по изучению влияния корреляций на метод случайного тестирования, часть работы была начата (см. приложения 6.5), но интересных результатов пока получить не удалось.

6. Приложения

6.1. Группа Клиффорда одного кубита

Эта такая группа, элементы которой переводят матрицы Паули в матрицы Паули при действии на них сопряжением. Менее формально, это группа поворотов, которая сохраняет оси X, Y, Z. В силу почти однозначной связи групп $SU(2)$ и $SO(3)$, о группе Клиффорда можно думать, как о группе симметрий куба.

В группе 24 элемента, породить ее можно таким набором:

$$\left\{ \exp\left(i\sigma_x \frac{\pi}{4}\right), \exp\left(i\sigma_y \frac{\pi}{4}\right), \exp\left(i\sigma_z \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (192)$$

Для более подробного рассмотрения можно обратиться к [8].

6.2. Матрица \hat{M} в общем случае

Определим действие ошибки $\Lambda[\rho]$ как линейного супероператора над элементами матрицы плотности:

$$\Lambda[\sigma_i \otimes \sigma_j] = \Lambda_{ij \rightarrow kl} \sigma_k \otimes \sigma_l \quad (193)$$

Найдем, как выражаются параметры a , b , c через элементы Λ . Согласно определению $\bar{\Lambda}_1 = \langle V \Lambda V^\dagger \rangle_V$. Тогда запишем формально:

$$\bar{\Lambda}_1[\sigma_x \otimes \sigma_0] = \langle \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow kl} V_{\alpha'x} V^\dagger \sigma_k \otimes \sigma_l V \rangle_V \quad (194)$$

Рассмотрим слагаемые с $k = 0$:

$$\langle \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0l} V_{\alpha'x} V^\dagger \sigma_0 \otimes \sigma_l V \rangle_V = \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0l} \langle V_{\alpha'x} U^{\gamma l} \rangle_V \sigma_0 \otimes \sigma_\gamma \quad (195)$$

Среднее разбивается на произведение средних, так как множители относятся к разным матрицам - V_1 и V_2 соответственно. А по отдельности они равны 0.

Теперь, если рассмотреть слагаемые, где ни k , ни l не равны 0, то возникнет опять множитель относящийся к V_2 , который даст 0 при усреднении.

Поэтому не нулевой вклад дадут лишь слагаемые с $l = 0$:

$$\langle \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow k0} V_{\alpha'x} V^\dagger \sigma_k \otimes \sigma_0 V \rangle_V = \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow k0} \langle V_{\alpha'x} U_{\gamma k} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \quad (196)$$

Такое среднее равно $\langle V_{\alpha'x} U_{\gamma k} \rangle_V = \frac{1}{3} \delta_{\alpha'k} \delta_{x\gamma}$. Отсюда:

$$\Lambda_{\alpha'0 \rightarrow k0} \langle V_{\alpha'x} U_{\gamma k} \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 = \frac{1}{3} \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow \alpha'0} \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (197)$$

То есть:

$$a = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0 \rightarrow i0} \quad (198)$$

Аналогично для двух других параметров:

$$b = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \Lambda_{0j \rightarrow 0j} \quad (199)$$

$$c = \frac{1}{9} \sum_{i, j=1}^3 \Lambda_{ij \rightarrow ij} \quad (200)$$

Теперь также формально найдем $\bar{\Lambda}_2 = \langle V \Lambda W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger \rangle_V$.

$$\bar{\Lambda}_2[\sigma_\alpha \otimes \sigma_0] = \langle V_{\alpha'\alpha} \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow kl} (W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_k \otimes \sigma_l] \rangle_V \quad (201)$$

Возьмем за W_0 - CZ, и будем смотреть слагаемые с разными k, l :

1) $k = l = 0$

$$\langle V_{\alpha'\alpha} \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 00} (W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_0 \otimes \sigma_0] \rangle_V = \langle V_{\alpha'\alpha} \rangle_V \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 00} \sigma_0 \otimes \sigma_0 = 0 \quad (202)$$

2) $k = 0, l \neq 0$:

$$\langle V_{\alpha'\alpha} \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0l} (W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_0 \otimes \sigma_l] \rangle_V = \quad (203)$$

$$= \langle V_{\alpha'\alpha} (\Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0x} c U^{\gamma x} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0y} c U^{\gamma y} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow 0z} b U^{\gamma z}) \rangle_V \sigma_0 \otimes \sigma_\gamma \quad (204)$$

Тут из-за усреднения по V тоже получается 0.

3) $k \neq 0, l = 0$:

$$\langle V_{\alpha'\alpha} \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow k0} (W_0 \bar{\Lambda}_1 W_0^\dagger V^\dagger) [\sigma_k \otimes \sigma_0] \rangle_V = \quad (205)$$

$$= \langle V_{\alpha'\alpha} (\Lambda_{\alpha'0 \rightarrow x0} c U_{\gamma x} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow y0} c U_{\gamma y} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow z0} a U_{\gamma z}) \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \quad (206)$$

Используя, что $\langle V_{\alpha'\alpha} U_{\gamma k} \rangle_V = \frac{1}{3} \delta_{\alpha'k} \delta_{\alpha\gamma}$, получим:

$$\langle V_{\alpha'\alpha} (\Lambda_{\alpha'0 \rightarrow x0} c U_{\gamma x} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow y0} c U_{\gamma y} + \Lambda_{\alpha'0 \rightarrow z0} a U_{\gamma z}) \rangle_V \sigma_\gamma \otimes \sigma_0 \quad (207)$$

$$= \frac{1}{3} (\Lambda_{x0 \rightarrow x0} c + \Lambda_{y0 \rightarrow y0} c + \Lambda_{z0 \rightarrow z0} a) \sigma_\alpha \otimes \sigma_0 \quad (208)$$

4) $k \neq 0, l \neq 0$

Возникнет множитель $U^{\gamma\delta}$ без пары, и при усреднении он занулится.

Итого, на первом шаге коэффициент перед $\sigma_\alpha \otimes \sigma_0$ был равен a . А на втором шаге этот коэффициент:

$$\frac{1}{3}(\Lambda_{x0 \rightarrow x0}c + \Lambda_{y0 \rightarrow y0}c + \Lambda_{z0 \rightarrow z0}a) \quad (209)$$

В случае, когда мы делаем приближение, что $\Lambda = \bar{\Lambda}_1$, то получаем что:

$$\bar{\Lambda}_{x0 \rightarrow x0} = \bar{\Lambda}_{y0 \rightarrow y0} = \bar{\Lambda}_{z0 \rightarrow z0} = a \quad (210)$$

Но без этого приближения, мы лишь имеем равенство:

$$a = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0 \rightarrow i0} \quad (211)$$

То есть для матрицы \hat{M} без приближений имеем:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\Lambda_{z0 \rightarrow z0} & 0 & \frac{1}{3}\Lambda_{x0 \rightarrow x0} + \frac{1}{3}\Lambda_{y0 \rightarrow y0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

6.3. Поправка из-за корреляции

Утверждение:

Для шума вида $-\frac{1}{2}X(t)\sigma_z$ с длинными корреляциями $\sim \frac{1}{\omega}$ зависимость матрицы плотности $\frac{1}{2}(\sigma_0 + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}))$ от длины последовательности операций, примененной к системе, такая:

$$\mathbf{s} \longrightarrow \left((1 - \epsilon)^n + \frac{n(n-1)}{4}\epsilon^2 \right) \mathbf{s} \quad (212)$$

Доказательство:

Пусть мы имеем шум в виде добавки в гамильтониан: $-\frac{1}{2}X(t)\sigma_z$. Среднее тривиально является перенормировкой гамильтониана, поэтому считаем: $\overline{X(t)} = 0$. Также корреляции определяются функцией: $S(\omega) = \int dt e^{i\omega t} X(t)X(0)$. Поставим задачу следующим образом:

$$\langle V_1 W_1 V_2 W_2 \dots V_n W_n F \rangle_V \quad (213)$$

W_k - это выжидание времени от T_k до T_{k+1} . А V_k делаются за пренебрежимо малое время. Преобразуем последовательность (верхняя черта усреднение по V_k):

$$\overline{W_1 W_2 \dots W_n} \quad (214)$$

Усреднять по реализациям шума надо итоговую матрицу плотности:

$$\langle \overline{W_1 W_2 \dots W_n} \rangle_{\text{Noise}} \quad (215)$$

Согласно полученному ранее имеем:

$$\left\langle \prod_{k=1}^n \frac{2 \cos \phi_k + 1}{3} \right\rangle_{\text{Noise}} \quad (216)$$

Тут введено обозначение $\phi_k = \int_{T_k}^{T_{k+1}} dt X(t)$.

$$\left\langle \prod_{k=1}^n \frac{2 \cos \phi_k + 1}{3} \right\rangle_{\text{Noise}} = \frac{1}{3^n} \left\langle \prod_{k=1}^n (e^{i\phi_k} + e^{-i\phi_k} + 1) \right\rangle_{\text{Noise}} \quad (217)$$

После раскрытия скобок в произведении, каждое слагаемое выглядит так:

$$\langle \exp i(\#\phi_1 + \#\phi_2 + \dots + \#\phi_n) \rangle_{\text{Noise}} \quad (218)$$

Где $\#$ имеет одно из трех значений -1, 0, 1 для каждого ϕ_k . Так как каждое ϕ_k распределено по гауссу, то:

$$\langle \exp i(\#\phi_1 + \#\phi_2 + \dots + \#\phi_n) \rangle_{\text{Noise}} = \exp \left(-\frac{1}{2} \langle (\#\phi_1 + \#\phi_2 + \dots + \#\phi_n)^2 \rangle \right) \quad (219)$$

Надо уметь вычислять $\langle \phi_1 \phi_k \rangle$:

$$\langle \phi_1 \phi_k \rangle = \int_0^T dt_1 \int_{(k-1)T}^{kT} dt_2 \overline{X(t_1) X(t_2)} = \quad (220)$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \int_0^T dt_1 \int_{(k-1)T}^{kT} dt_2 e^{-i(t_2-t_1)} = \quad (221)$$

$$= 2 \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) e^{-i(k-1)\omega T} \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2} \quad (222)$$

С учетом четности $S(\omega)$:

$$\langle \phi_1 \phi_k \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} S(\omega) \cos((k-1)\omega T) \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2} \quad (223)$$

В том числе для параметра a имеем:

$$a = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \exp \left(-\frac{\langle \phi_1^2 \rangle}{2} \right) \right) \quad (224)$$

Теперь возьмем существенно квантовый случай: $S(\omega) = \frac{A}{\omega}$ и инфракрасной частотой обрезки ω_c . Имеем:

$$\langle \phi_1 \phi_k \rangle = 2 \int_{\omega_c}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{A}{\omega} \cos((k-1)\omega T) \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2} \quad (225)$$

При малых $\omega_c T \ll \frac{1}{k}$ с логарифмической точностью:

$$\frac{2AT^2}{\pi} \int_{\omega_c T}^{+\infty} dx \cos((k-1)x) \frac{1 - \cos x}{x^3} = \frac{AT^2}{\pi} \log \frac{1}{\omega_c T} \quad (226)$$

Обозначим:

$$2\epsilon = \langle \phi_1 \phi_k \rangle = \frac{AT^2}{\pi} \log \frac{1}{\omega_c T} \quad (227)$$

Для a :

$$a = \frac{1 + 2e^{-\epsilon}}{3} \quad (228)$$

То есть в таком приближении зависимости от k нет. Рассмотрим:

$$\langle (\#\phi_1 + \#\phi_2 + \dots + \#\phi_n)^2 \rangle \quad (229)$$

Пусть p решеток имеют значение $+1$, а s решеток значение -1 . Тогда сгруппируем так:

$$\langle ((\psi_1 + \dots + \psi_p) - (\theta_1 + \dots + \theta_s))^2 \rangle = 2\epsilon * p^2 + 2\epsilon * s^2 - 2\epsilon * 2ps = 2\epsilon(p-s)^2 \quad (230)$$

Зададимся вопросом, сколько слагаемых имеет $p + 1$ и $s - 1$. Выбрать p плюсов есть C_n^p способов. Затем выбрать $s - 1$ при фиксированном p есть C_{n-p}^s способов. Итого:

$$\sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^{n-p} C_n^p C_{n-p}^s = 3^n \quad (231)$$

$$\left\langle \prod_{k=1}^n \frac{2 \cos \phi_k + 1}{3} \right\rangle_{\text{Noise}} = \frac{1}{3^n} \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^{n-p} C_n^p C_{n-p}^s e^{-\epsilon(p-s)^2} \quad (232)$$

Мы понимаем, что ошибка мала $1 - a \sim 10^{-3}$ (см. графики из экспериментов), то есть:

$$\epsilon = \frac{AT^2}{\pi} \log \frac{1}{\omega_c T} \sim 10^{-3} \quad (233)$$

Такие зависимости получены в приближении:

$$\omega_c T \ll \frac{1}{n} \quad \frac{AT^2}{\pi} \log \frac{1}{\omega_c T} \sim 10^{-3} \quad (234)$$

Я пытался найти в разных статьях какими могут быть эти значения, чтобы проверить разумности такого приближения. Для A - силы шума я нашел. А вот для ω_c вроде нет определенного значения.

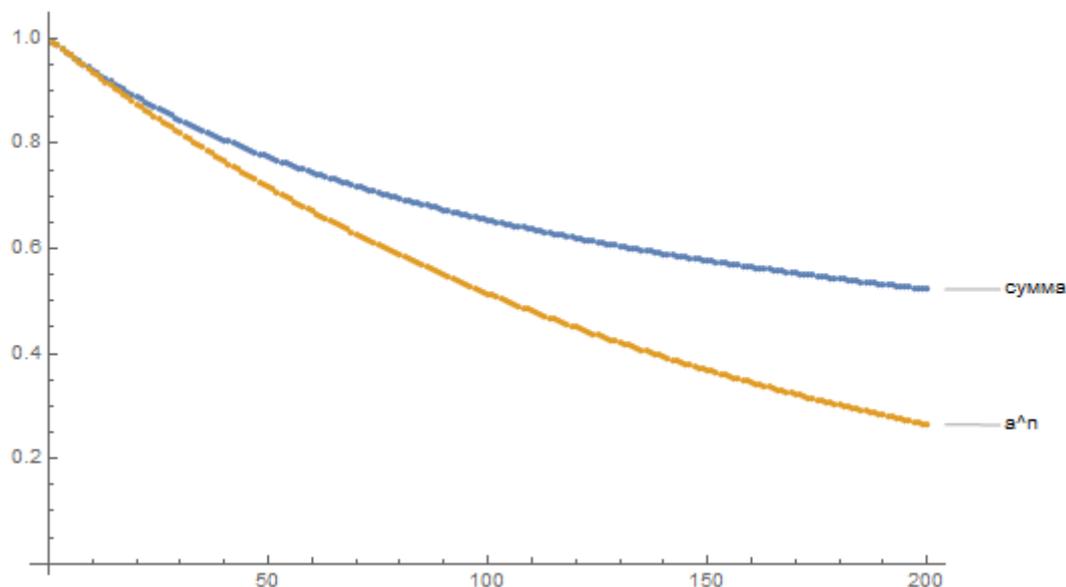


Рис. 4. График из математики этой суммы и a^n для $\epsilon = 0.01$ и $n < 200$.

Список литературы

- [1] Shor, P. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. SIAM J. Comput. 26, 14841509 (1997)
- [2] Lov K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search," arXiv:quant-ph/9605043, (1996).
- [3] Yu Chen, C. Neill, P. Roushan, N. Leung, M. Fang, R. Barends, J. Kelly, B. Campbell, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, E. Jeffrey, A. Megrant, J. Y. Mutus, P. J. J. O'Malley, C. M. Quintana, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. C. White, Michael R. Geller, A. N. Cleland, and John M. Martinis, "Qubit Architecture with High Coherence and Fast Tunable Coupling," Phys. Rev. Lett. 113, 220502 (2014).
- [4] A. M. Steane, "The ion trap quantum information processor," Appl. Phys. B. 64 , 623-642 (1997).
- [5] Patrick J. Coles, Stephan Eidenbenz, Scott Pakin, Adetokunbo Adedoyin, John Ambrosiano, Petr Anisimov, William Casper, Boram Yoon, Richard Zamora, Wei Zhu, "Quantum Algorithm Implementations for Beginners," arXiv preprint arXiv:1804.03719, (2018).
- [6] Emanuel Knill, D Leibfried, R Reichle, J Britton, RB Blakestad, John D Jost, C Langer, R Ozeri, Signe Seidelin, and David J Wineland, "Randomized benchmarking of quantum gates," Physical Review A 77, 012307 (2008).

- [7] L. Casparis, T. W. Larsen, M. S. Olsen, F. Kuemmeth, P. Krogstrup, J. Nygård, K. D. Petersson, C. M. Marcus, "Gatemon Benchmarking and Two-Qubit Operation," arXiv:1512.09195, (2015)
- [8] Maris Ozols, "Clifford group," (2008)
- [9] X. Xue, T. F. Watson, J. Helsen, D. R. Ward, D. E. Savage, M. G. Lagally, S. N. Coppersmith, M. A. Eriksson, S. Wehner, L. M. K. Vandersypen, "Benchmarking Gate Fidelities in a Si/SiGe Two-Qubit Device," arXiv:1811.04002 (2018)