

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
(бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

**СТРУКТУРА ВИХРЯ В СВЕРХПРОВОДНИКЕ
ВБЛИЗИ ПЛОСКОГО ДЕФЕКТА В ДИФФУЗНОМ
ПРЕДЕЛЕ**

(бакалаврская работа)

Студент:

Осин Александр Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Фоминов Яков Викторович,
канд. физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2019

Аннотация

В данной работе производится исследование структуры вихря на границе между двумя грязными (т.е. рассматриваемых в диффузном пределе) сверхпроводниками. Для описания данной физической ситуации используются уравнения Узаделя и граничные условия Куприянова-Лукичёва. В учебных соображениях в работе рассматривается задача о структуре вихря без границы, изложение которой представлено в статье [3]. В работе приводятся приближения, позволяющие получить некоторые аналитические оценки для решения уравнений Узаделя с учетом граничных условий и, в частности, размеры вихря.

Оглавление

Аннотация	2
Оглавление	3
1 Введение	4
2 Система уравнений в отсутствии границы	5
3 Вихрь в объеме	8
4 Граничные условия	14
4.1 Контакт Джозефсона	15
4.2 Туннельные режимы	17
5 Вихрь на границе	19
5.1 Уравнение Феррелла-Прейнджа	19
5.2 Теория возмущений	21
6 Заключение	24
Литература	26

Глава 1

Введение

В начале 20го века для некоторых металлов было обнаружено, что, если очень сильно охлаждать образец, то при некоторой температуре его сопротивление обращается в 0, а магнитное поле вытеснится из образца. Такое явление называется сверхпроводимостью. Оно стало объектом изучения большого количества ученых в 20-ом веке, поскольку, помимо красивых физических явлений, такие материалы имеют большое техническое приложение. В частности, сверхпроводники позволяют создавать кубиты — элементы памяти квантового компьютера. Для их создания очень важно избегать потерь в системе, связанных с самыми различными факторами.

На конференции 2018 года в ИТФ им. Л.Д. Ландау была представлена работа [6], в которой исследовались свойства гранулированного алюминия в сверхпроводящем состоянии в магнитном поле. Увеличение числа гранул в заданном объеме приводило к росту добротности системы, а т.е. уменьшению диссипации. Причем, если число гранул будет слишком большим, то в поведении добротности произойдут также и качественные изменения.

Как известно, в сверхпроводники второго рода магнитное поле проникает посредством вихрей Абрикосова — нитей с сердцевинной(кором) из металла в нормальном состоянии. Как раз в них и происходит диссипация энергии. Однако, гранулированный алюминий отличается от цельного куска сверхпроводника тем, что между различными гранулами существует граница — тонкий слой изолятора. В такой системе есть вероятность, что вихрь будет находиться не в объеме, а на границе между гранулами, где его свойства изменятся. В частности, должна уменьшиться диссипация энергии, т.к. у вихря на границе отсутствует кор. Поэтому для нас представляет интерес рассмотреть структуру вихря, попадающего на границу, в грязном пределе. Именно это и является основной целью данной работы. Вопрос о диссипации в такой системе все еще остается открытым и данная работа является лишь стартовой позицией в изучении этого вопроса.

Глава 2

Система уравнений в отсутствии границы

Для описания явления сверхпроводимости с микроскопической точки зрения используются уравнения, полученные Л.П.Горьковым [7]. Однако данные уравнения весьма сложны и во многих задачах можно ограничиться их упрощенным вариантом. Например, переход к квазиклассическим функциям Грина позволяет получить более простой вариант этих уравнений — уравнения Эйленбергера [8]. Эти уравнения выводятся из того, что движение электронов в паре друг относительно друга сильно быстрее, чем движение пары как целого, поэтому параметром, по которому делается это приближение, является отношение $\frac{\lambda_F}{\xi} \ll 1$. Наконец, в случае грязных сверхпроводников, т.е. в которых $\frac{\xi}{l} \gg 1$, можно воспользоваться тем, что функция Грина станет почти изотропной. Такие рассуждения приведут нас к уравнениям Узаделя [1] на изотропную часть функции Грина. С подробным выводом этих уравнений также можно ознакомиться в книге [2]. В данной главе мы приведем эти уравнения в удобной для дальнейшего решения форме.

Матрица функций Грина $\hat{G}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ в уравнениях Горькова зависит от координат электронов пары \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Для того, чтобы получить матрицу функций Грина уравнений Узаделя необходимо сначала перейти к смешанному представлению Вигнера $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Далее нужно сделать по переменной \vec{r} преобразование Фурье от Горьковской функции. Наконец, переходя от переменной \vec{r} к переменной ξ и интегрируя по переменной ξ и всем возможным направлениям импульса \vec{n} , получим матрицу \hat{g}_0 (с точностью до коэффициентов, указанных в формуле ниже):

$$\hat{g}_0(\vec{R}) \equiv 2i \int \frac{d\vec{n}}{4\pi} \int \frac{d\xi}{2\pi} \hat{G}(\vec{R}, \vec{n}, \xi) \quad (2.1)$$

$$\hat{g}_0 \equiv \begin{pmatrix} g & f \\ \tilde{f} & -g \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Введем операторы

$$\hat{\xi} \stackrel{def}{=} -i\vec{\nabla} - e\vec{A}[\sigma_z, \dots] \quad (2.3)$$

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ \Delta^* & -\omega \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Тогда уравнения Узаделя для функции Грина \widehat{g}_0 примут вид:

$$D\widehat{\xi}(\widehat{g}_0\widehat{\xi}\widehat{g}_0) + [\widehat{H}_0, \widehat{g}_0] = 0, \quad D \equiv \frac{v_0 l}{3} \quad (2.5)$$

$$g^2 + f\tilde{f} = 1 \quad (2.6)$$

Раскрытие формулы (2.5) дает следующие уравнения:

$$D\vec{\nabla}_{\vec{R}}[f\vec{\nabla}\tilde{f} - \tilde{f}\vec{\nabla}f + 4ie\vec{A}ff] - 2\tilde{f}\Delta + 2f\Delta^* = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{D}{2}[g(\vec{\nabla} - 2ie\vec{A})^2 f - f\vec{\nabla}^2 g] + g\Delta - \omega f = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{D}{2}[g(\vec{\nabla} + 2ie\vec{A})^2 \tilde{f} - \tilde{f}\vec{\nabla}^2 g] + g\Delta^* - \omega \tilde{f} = 0 \quad (2.9)$$

Условие нормировки (2.6) позволяет нам сделать следующую замену переменных:

$$g = \cos \theta \quad (2.10)$$

$$f = e^{i\chi} \sin \theta \quad (2.11)$$

$$\tilde{f} = e^{-i\chi} \sin \theta \quad (2.12)$$

$$\Delta = e^{i\varphi} \Delta_0, \Delta_0 \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

После подстановки этой замены в формулы (2.7)-(2.9) мы получаем уравнения Узаделя в угловой параметризации:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}[\sin^2 \theta (\vec{\nabla}\chi - 2e\vec{A})] = 2\frac{\Delta_0}{D} \sin(\chi - \varphi) \sin \theta, \\ D\vec{\nabla}^2 \theta + 2\Delta_0 \cos(\chi - \varphi) \cos \theta - 2\omega \sin \theta - D \sin \theta \cos \theta (\vec{\nabla}\chi - 2e\vec{A})^2 = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Эту систему необходимо дополнить еще уравнениями на ток и параметр порядка:

$$\Delta(\vec{R}) = \pi\nu_0 g T \sum_{\omega} f(\omega) = \pi\nu_0 g T \sum_{\omega} e^{i\chi(\omega)} \sin \theta(\omega) \equiv \pi\nu_0 g T \sum_{\omega} e^{i\chi} \sin \theta \quad (2.15)$$

(Индекс ω мы будем в дальнейшем опускать, зная что χ, θ от него зависят)

$$\vec{j}(\vec{R}) = e\nu_0 D T \cdot 2\pi \cdot \sum_{\omega} \sin^2 \theta (\vec{\nabla}\chi - 2e\vec{A}) \quad (2.16)$$

Последнее уравнение, необходимое для получения полной системы уравнений — уравнение Максвелла: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{j}$

В нашей задаче мы будем рассматривать только равновесную ситуацию. Это приводит к тому, что величина $\chi(\omega) = \varphi, \forall \omega$, ведь если это не так, то между разными мацубаровскими компонентами тока будет происходить перекачка энергии

в силу первого уравнения в (2.14). Действительно, дивергенция сверхтока обязана быть равна 0 в равновесной ситуации (иначе в системе будет присутствовать диссипативный ток). Если $\chi \neq \varphi$, то электроны из одной мацубаровской компоненты, перейдут в другую. Это же равенство следует и из уравнения на параметр упорядочения (2.15). Невыполнение указанного условия потребует дополнительные уравнения в силу вещественности Δ_0 , а именно:

$$\sum_{\omega} \sin(\chi - \varphi) \sin \theta = 0 \quad (2.17)$$

В силу уравнений (2.14) и (2.16) мы видим, что эта сумма эквивалентна $\text{div} \vec{j} = 0$. Стоит отметить, что в [2] данное предположение тоже используется, и было показано, что в туннельных задачах в теории возмущений по прозрачности барьера данное предположение не приводит к каким-либо нефизичным ответам или нарушениям. Однако, как мы убедимся из решения задачи про эффект Джозефсона в главе 4 такое утверждение приводит к противоречиям при не слишком малых прозрачностях границ.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}[\sin^2 \theta (\vec{\nabla} \varphi - 2e\vec{A})] = 0, \\ D\vec{\nabla}^2 \theta + 2\Delta_0 \cos \theta - 2\omega \sin \theta - D \sin \theta \cos \theta (\vec{\nabla} \varphi - 2e\vec{A})^2 = 0, \\ \Delta_0(\vec{R}) = \pi\nu_0 g T \sum_{\omega} \sin \theta, \\ \vec{j} = 2\pi e \nu_0 D T (\sum_{\omega} \sin^2 \theta) (\vec{\nabla} \varphi - 2e\vec{A}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 4\pi \vec{j}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Глава 3

Вихрь в объеме

В этой части мы предоставим асимптотическое решение уравнений Узаделя для абрикосовского вихря в сверхпроводнике без границы. Данная задача была решена в работе [3] Воттс-Тобином и Вотерворсом. Здесь мы приведем лишь отдельные важные для нас выводы из этой работы, как, например, поиск характерных масштабов в задаче:

Рассмотрим систему уравнений (2.18) для вихря в объеме, т.е. двумерного решения этих уравнений, инвариантного относительно поворотов в плоскости. В данной задаче для нас представляет интерес выяснить поведение различных физических величин, описывающих эту систему, и характерные масштабы их изменения.

Комбинация $\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\chi - 2e\vec{A}) \equiv \vec{v}_s$ называется сверхпроводящей скоростью. В силу $\varphi = \chi, \forall \omega$ мы получаем $\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\varphi - 2e\vec{A}) \equiv \vec{v}_s$. Заметим, что $\vec{\nabla} \times \vec{v}_s = -\frac{e}{m}\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{e}{m}\vec{H}, \forall \vec{r} \neq 0$. Условие $\vec{r} \neq 0$ выражает неприменимость этой формулы из-за сингулярности градиента фазы параметра порядка в начале координат. Для всех остальных точек мы можем записать:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_s = -4\pi Q \vec{v}_s \quad (3.1)$$

$$Q \equiv 4\pi e^2 \nu_0 D \cdot T \sum_{\omega} \sin^2 \theta \quad (3.2)$$

В двумерной системе вследствие симметрии $\vec{v}_s \perp \vec{\nabla}\theta, \theta(\vec{R}) = \theta(R), \Delta_0(\vec{R}) = \Delta_0(R)$. При $R \rightarrow +\infty$ параметр порядка выходит на значение Δ_{bulk} , а θ на θ_{bulk} , где $\sin \theta_{bulk} \equiv \frac{\Delta_{bulk}}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_{bulk}^2}}$. Это дает нам на больших ($R \gg \xi$) расстояниях:

$$\frac{1}{\lambda^2} = 8\pi^2 e^2 \nu_0 D \Delta_{bulk} \tanh \frac{\Delta_{bulk}}{2T} \quad (3.3)$$

$$v_s(R) = \text{const} \cdot K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) \quad (3.4)$$

Для определения этой константы достаточно заметить, что при $R \ll \lambda$ из однозначности волновой функции при обходе по кругу малого радиуса:

$$v_s(R) = \frac{1}{2mR} \quad (3.5)$$

Мы рассматриваем сверхпроводники с параметрами $\kappa \stackrel{def}{=} \frac{\lambda}{\xi} \gg 1$, $\xi^2 \stackrel{def}{=} \frac{D}{2\Delta_{bulk}}$. Тогда мы имеем право провести сшивку асимптотик (3.4) и (3.5) в области $\xi \ll R \ll \lambda$. В итоге для всех R имеем:

$$v_s(R) = \frac{1}{2m\lambda} \cdot K_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) \quad (3.6)$$

Теперь приступим к изучению асимптотик решений уравнений Узаделя на больших и малых(по сравнению с ξ) расстояниях. Запишем уравнение Узаделя:

$$\xi^2 \left(\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} \right) = 4\xi^2 m^2 v_s^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{\Delta}{\Delta_{bulk}} \cos\theta + \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin\theta \quad (3.7)$$

Давайте сделаем замену координат:

$$x \equiv \frac{R}{\lambda}, \quad x \gg \frac{1}{\kappa} \quad (3.8)$$

В терминах x уравнение переписется в виде:

$$\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{4}{\kappa^2} m^2 \lambda^2 v_s^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{\Delta}{\Delta_{bulk}} \cos\theta + \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin\theta \quad (3.9)$$

Давайте же теперь отбросим левую часть уравнения, предполагая что на бесконечности она мала по параметру $\frac{1}{\kappa}$. Позже мы убедимся, что это действительно так и даже поймем, что по порядку она $1/\kappa^4$. На указанных в (3.8) расстояниях сделаем следующий анзатц для параметра порядка:

$$\Delta(x) = \Delta_{bulk} \left(1 - \frac{b^2}{\kappa^2} K_1^2(x) \right) \quad (3.10)$$

Это дает нам:

$$\theta_{bulk} - \theta = \frac{1}{\kappa^2} (\sin\theta_{bulk} + b^2) \sin\theta_{bulk} \cos\theta_{bulk} K_1^2(x) \quad (3.11)$$

Подстановка полученной асимптотики в (3.9) показывает, что отброшенная часть действительно мала по параметру $\frac{1}{\kappa}$ и приведенные рассуждения справедливы. При этом в силу уравнения (2.15) на параметр упорядочения можно получить:

$$\sum_{\omega} \left(\frac{\sin\theta}{\Delta} - \frac{\sin\theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} \right) \equiv 0 \quad (3.12)$$

Подстановка асимптотики в пределе нулевой температуры дает значение константы b :

$$b^2 = \frac{\sum_{\omega>0} \sin^2\theta_{bulk} \cos^2\theta_{bulk}}{\sum_{\omega>0} \sin^3\theta_{bulk}} = \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(1+\omega^2)^2} / \int_0^\infty \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{4} \quad (3.13)$$

Теперь давайте перейдем к изучению поведения $\theta(R)$ в коре вихря. Для этого для начала заметим, что уравнение (3.7) может быть продолжено на $R \in \mathbb{C}$. Тогда видно, что $\theta(R)$ и $\Delta_0(R)$ должны быть нечетными функциями координаты R .

При таком продолжении мы также должны учесть, что анзац (3.10) становится несправедлив на малых расстояниях. Примером функции, удовлетворяющей асимптотике (3.10) и обладающей указанными свойствами, может быть:

$$\Delta(x) = \Delta_{bulk} / \sqrt{1 + 2 \frac{b^2}{\kappa^2} K_1^2(x)} \quad (3.14)$$

В дальнейшем именно ее мы и будем использовать для численного расчета. Перейдем к координате $r = \frac{R}{\xi}$. Тогда уравнение Узаделя примет вид:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{\kappa^2} K_1^2\left(\frac{r}{\kappa}\right) - \frac{\Delta}{\Delta_{bulk}} \cos\theta + \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin\theta \quad (3.15)$$

Нечетность $\theta(r)$ приводит к тому, что вблизи нуля уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} = -\frac{\Delta}{\Delta_{bulk}} \cos\theta + \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin\theta \quad (3.16)$$

Ограниченность правой части позволяет ее отбросить и мы приходим к уравнению:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\theta \cdot r) \right) = 0 \quad (3.17)$$

Его решение, не включающее сингулярностей, имеет вид:

$$\theta = \text{const} \cdot r \equiv Cr \quad (3.18)$$

Искать наклон графика в нуле мы можем из знания того, что на бесконечности $\theta(r) \rightarrow \theta_{bulk}$. Увы, возможности привести аналитическое выражение для этого наклона при произвольных частотах не удастся, поскольку выход на постоянное значение происходит на $r \sim 1$ и спить асимптотики (одну, что рассматривается для $r \gg 1$, и другую- $r \ll 1$) не удастся, поскольку область их перекрытия отсутствует. На этом моменте в статье [3] авторы предлагают перейти к численному решению уравнения (3.15) с параметром порядка в форме (3.14). Для различных наклонов в 0 можно убедиться, что всегда график выходит на больших r на осциллирующий режим. Условно все решения можно поделить на два класса: те, что осциллируют выше θ_{bulk} и те, что осциллируют ниже. Этот факт позволяет нам найти C со сколь угодно высокой точностью. Алгоритм поиска таков:

- 1) Делаем первое приближение наклона.
- 2) Смотрим, осциллирует ли график выше или ниже значения θ_{bulk} .
- 3) Если осцилляции выше — опускаем значение наклона, иначе — поднимаем.

Приведем график (3.1) решения уравнения (3.15) для различных значений C .

В дополнение к решению авторов статьи, мы можем привести асимптотику наклона графика $\theta(r)$ при больших частотах $\omega/\Delta_{bulk} \gg 1$: Давайте найдем поправку к θ в 0 до кубического члена

$$\theta(r) = Cr + C_1 r^3 \quad (3.19)$$

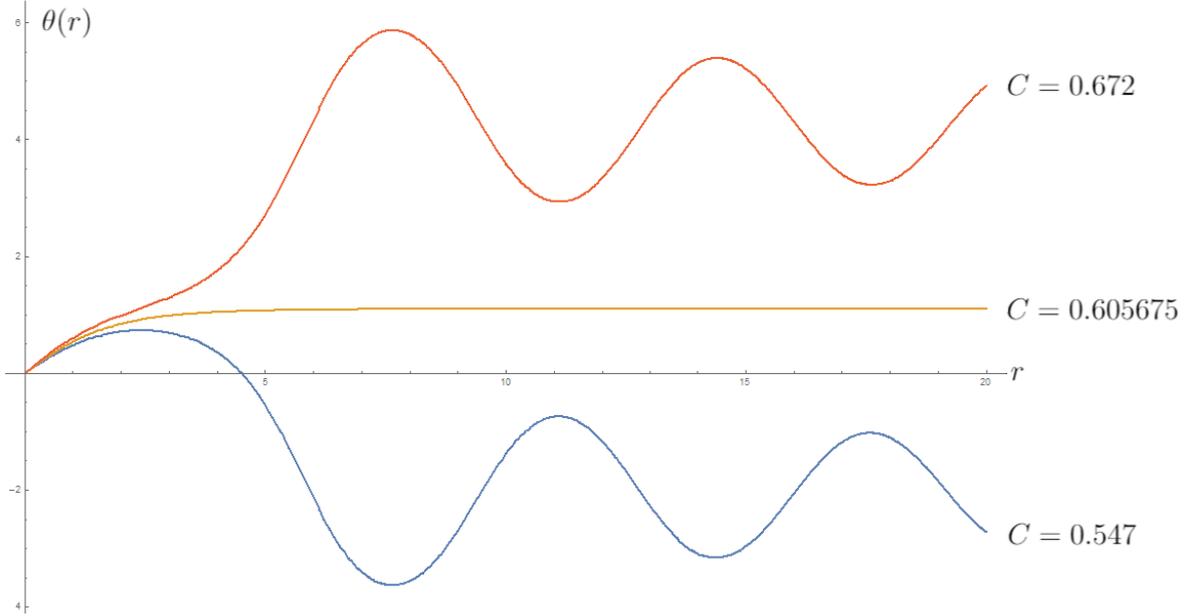


Рис. 3.1: График $\theta(r)$ для различных наклонов C .

Для простоты описания давайте рассмотрим предельный случай $\kappa \rightarrow +\infty$. Тогда, рассматривая уравнение (3.15) и раскладывая его до линейного по r члена, мы получим:

$$C_1 = -\frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} C + \frac{2}{3} C^3 \right) \quad (3.20)$$

Мы видим, что в пределе $\frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \rightarrow \infty$ величина $\theta_{bulk} \rightarrow 0$, а, значит, к 0 должны стремиться и коэффициенты разложения в ряд Тейлора до кубического члена функции $\theta(r)$. Следовательно, наклон $C \ll 1$. Учтем также, что наше решение выходит на постоянное значение на $r \sim 1$ (т.е. на радиусе кора вихря). А из этого следует, что коэффициенты при r и при r^3 должны быть одного порядка ($C \sim C_1$). В силу малости C можно пренебречь кубическим по C членом и эти рассуждения дают нам:

$$C = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\frac{\omega}{\Delta_{bulk}}}, \quad \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \gg 1 \quad (3.21)$$

Для сравнения посмотрим на график (3.2) наклонов для значений $\frac{\omega}{\Delta_{bulk}}$ от 1 до 1000 и сравним с полученной асимптотикой. Как нетрудно видеть, асимптотика все ближе к истинному значению наклона C при увеличении частоты и, начиная с 20, ошибка составляет меньше 10 %.

Последней рассматриваемой нами величиной будет плотность состояний. По определению:

$$\cos \theta(\omega, R) = \frac{i}{\pi \nu_0} G(\vec{r}_1 = \vec{r}_2, \omega) \quad (3.22)$$

Если же мы теперь представим аналитическую функцию Θ переменной ω , удовле-

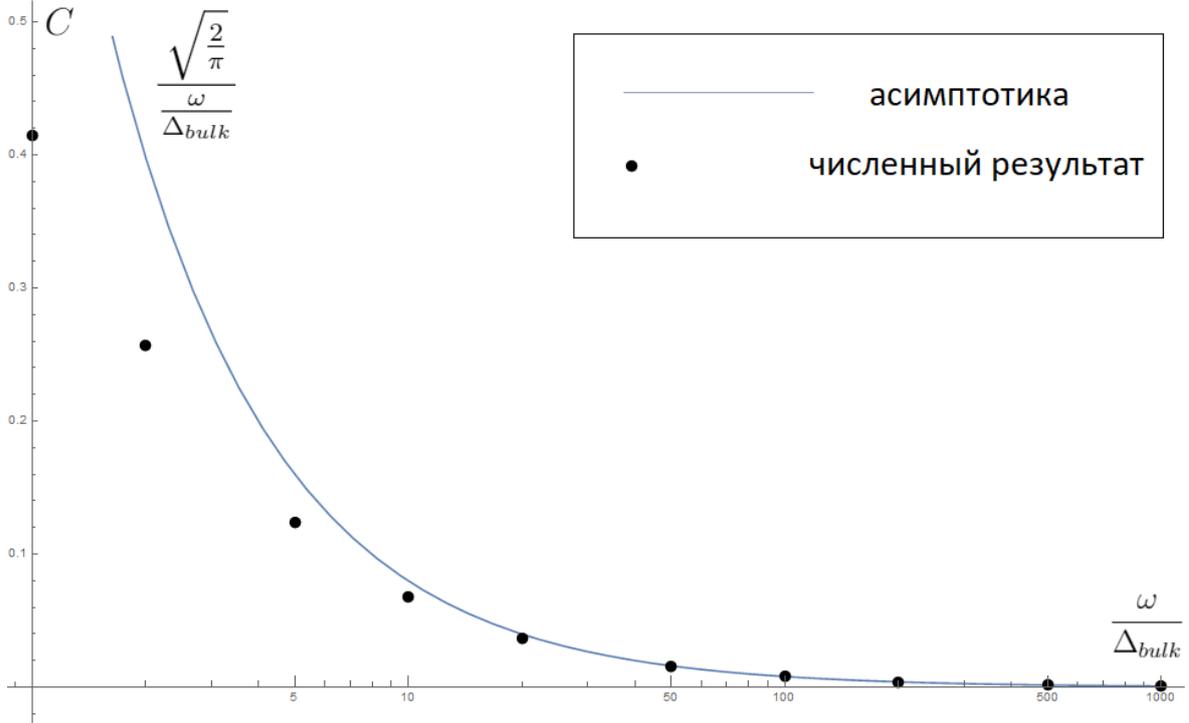


Рис. 3.2: График наклонов C в зависимости от частоты. По оси частот использован логарифмический масштаб.

творяющую следующим уравнениям:

$$\Theta(i\omega) \equiv \theta(\omega), \quad \omega = (2n + 1)\pi T \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\kappa^2} K_1^2\left(\frac{r}{\kappa}\right) - \frac{\Delta}{\Delta_{bulk}} \cos \Theta - \frac{iE}{\Delta_{bulk}} \sin \Theta \quad (3.24)$$

Тогда плотность состояний можно выразить через Θ , как:

$$\nu(E, R) = \text{Re} \cos \Theta = \cos(\text{Re}\Theta) \cosh(\text{Im}\Theta) \quad (3.25)$$

Продельвая аналогичный уравнению (3.15) анализ для решения уравнения (3.24), мы получаем:

$$\Theta = \text{const} \cdot r \equiv Cr, \quad C \in \mathbb{C} \quad (3.26)$$

В силу (3.25) мы видим, что рост или спад графика в нуле координат определяется преобладание действительной или мнимой части наклона графика Θ в нуле. Задача о вычислении наклона может быть произведена только численно и здесь мы опишем способ определения этой величины. Для решения задачи мы использовали пакет Wolfram Mathematica. В результате получаем плотность состояний в зависимости от расстояния до центра вихря (рис. 3.3). Полученные графики воспроизводят результат, полученный в статье [3]. В дополнение к результатам авторов мы получили значение E_{crit} , при котором $\left. \frac{d^2\nu}{dR^2} \right|_{R=0} = 0$. Расчет показал, что $E_{crit} = 0.5684\Delta_{bulk}$.

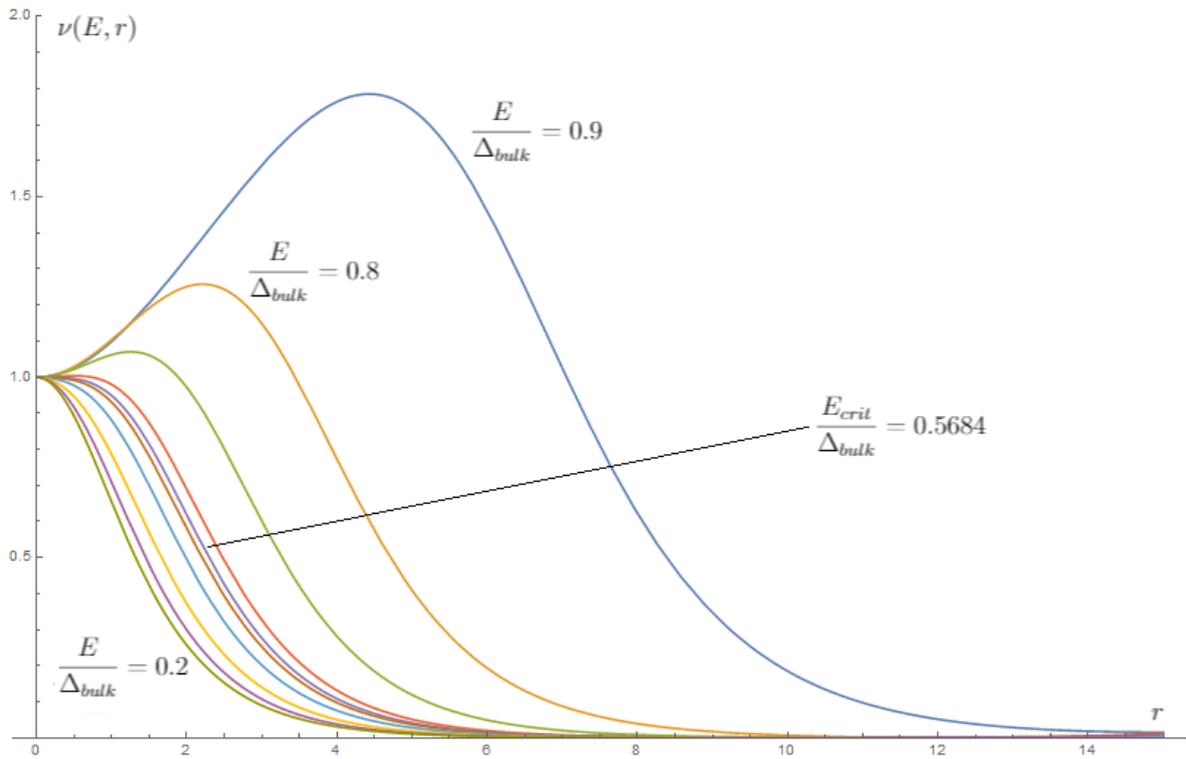


Рис. 3.3: График плотности состояний при заданной энергии в зависимости от координаты r .

В этой главе мы посмотрели, какие характерные масштабы возникают при решении уравнений Узаделя — ξ и λ , а также научились получать асимптотики решений этих уравнений в коре и на бесконечности. Процедура численного решения позволила нам научиться сшивать эти асимптотики и, в частности, получать из них плотность состояний.

Глава 4

Граничные условия

Для решения задачи о вихре на границе нам необходимо к системе уравнений (2.18) добавить граничные условия. Такие гран. условия были получены в работе [4] Куприяновым и Лукичёвым. Мы воспользуемся гран. условиями в форме, описанной в обзоре [5].

Представим, что в системе между двумя сверхпроводниками имеется плоская граница, представляющая из себя прослойку изолятора. Тогда для системы уравнений Узаделя можно записать следующие граничные условия:

$$l_2 \widehat{G}_2 i \xi \widehat{G}_2 = l_1 \widehat{G}_1 i \xi \widehat{G}_1 = t [\widehat{G}_2, \widehat{G}_1] \quad (4.1)$$

Где индексы '1' и '2' обозначают сверхпроводники справа и слева от границы соответственно, величина l – длина свободного пробега, а $t \equiv \left\langle \frac{p_{Fx} T}{p_F R} \right\rangle_{\vec{n}}$. T и R – квантовомеханические вероятности прохождения и отражения от границы. Важно понимать, что данные граничные условия выведены в пределе малых значений $t \ll 1$.

После подстановки в уравнение (4.1) изотропной функции Грина (2.1), записанной в угловой параметризации получим:

$$\begin{cases} \frac{l_2}{2t} (\nabla \theta_2)_n = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \frac{l_1}{2t} (\nabla \theta_1)_n = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \frac{l_2}{2t} (\nabla \varphi_2 - 2e\vec{A})_n \sin^2 \theta_2 = \frac{l_1}{2t} (\nabla \varphi_1 - 2e\vec{A})_n \sin^2 \theta_1 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

В этой главе мы посмотрим, какими особенностями обладают данные граничные условия и к каким эффектам могут приводить в разных физических ситуациях. Во всех дальнейших вычислениях мы будем считать, что сверхпроводники справа и слева обладают одинаковыми длинами свободного пробега, значениями параметра порядка в объеме, скоростями Ферми, иначе говоря, сделаны из одного материала. Это приводит к тому, что данные граничные условия становятся инвариантными по отношению к замене правого сверхпроводника на левый и наоборот, с последующей заменой $x \rightarrow -x$. Потому данную систему можно упростить:

$$\begin{cases} \frac{l}{2t} (\nabla \theta_1)_n = -\frac{l}{2t} (\nabla \theta_2)_n = \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)), & \theta_0 \equiv \theta(x=0) \\ \frac{l}{2t} (\nabla \varphi_2 - 2e\vec{A})_n = \frac{l}{2t} (\nabla \varphi_1 - 2e\vec{A})_n = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1 Контакт Джозефсона

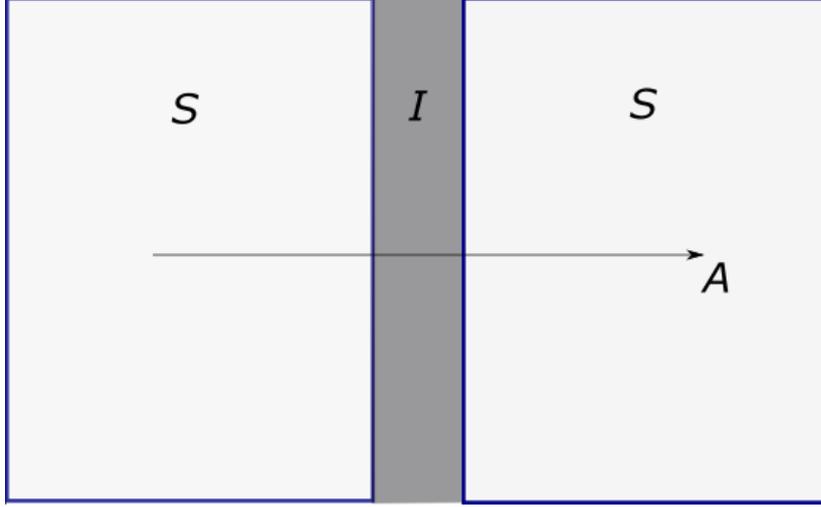


Рис. 4.1: Контакт Джозефсона в постоянном векторном потенциале

Рассмотрим контакт двух сверхпроводников, помещенных в магнитное поле с постоянным вектор-потенциалом, направленным вдоль оси x . Исходно t мы положим произвольным числом. Уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \left(\frac{d}{dx} \varphi - 2eA \right) \right) = 0 \\ \xi^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \cos \theta - \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin \theta - \xi^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d}{dx} \varphi - 2eA \right)^2 = 0 \\ \frac{d}{dx} \theta(x = +0) = \frac{2t}{l} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \\ \left(\frac{d}{dx} \varphi - 2eA \right) \Big|_{x=0} = \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Первое и четвертое уравнение системы (4.4) тривиально дают:

$$\frac{d\varphi}{dx} - 2eA = 2mv_s = \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} \quad (4.5)$$

При этом обозначим $J \equiv \sin^2 \theta \left(\frac{d}{dx} \varphi - 2eA \right) = \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin^2 \theta_0 = \text{const}$. Само значение этой константы зависит от мацубаровской частоты. Тогда уравнение Узеделя для однородного параметра порядка примет вид:

$$\xi^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \cos \theta - \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} \sin \theta - \xi^2 J^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0 \quad (4.6)$$

Данное уравнение имеет первый интеграл:

$$\xi^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = -\frac{2}{\sin \theta_{bulk}} [\cos(\theta - \theta_{bulk}) - \cos(\theta_\infty - \theta_{bulk})] - \xi^2 J^2 (\cot^2 \theta - \cot^2 \theta_\infty) \quad (4.7)$$

При этом θ_∞ определяется следующим образом:

$$\frac{\sin(\theta_{bulk} - \theta_\infty)}{\sin \theta_{bulk}} = \xi^2 J^2 \frac{\cos \theta_\infty}{\sin^3 \theta_\infty} \quad (4.8)$$

Уже здесь мы видим, что граница приводит к подавлению сверхпроводимости на бесконечности и на границе. На бесконечности этот эффект обусловлен течением тока в объеме, а подавление θ_0 вызвано границей. Давайте посмотрим роль этих эффектов с точки зрения решения уравнений. Относительно величины $z = \tan \theta_\infty$ это уравнение является алгебраическим. Степень этого уравнения определяется тем, что мы считаем заданным в нашей задаче: сверхпроводящую скорость на бесконечности, мацубаровскую компоненту тока и т.п.. К примеру, в случае задания сверхпроводящей скорости на бесконечности получим уравнение:

$$(1 + z^2) \left(1 - \frac{z}{\tan \theta_{bulk}}\right)^2 = (\xi v)^4 z^2, \quad v \equiv \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4.9)$$

Предположим, что параметр $t \ll \frac{l}{\xi} \ll 1$. Тогда $\theta_\infty = \theta_{bulk} + O\left(\left(\frac{\xi t}{l}\right)^2\right)$. Поэтому эффектом распаривания в первом порядке по t мы пренебрегаем. Для решения уравнения (4.7) разложим его до второго порядка по $\theta - \theta_{bulk}$, предполагая, что эта разность мала. Таким образом мы получим:

$$\theta(x) = \theta_{bulk} - (\theta_{bulk} - \theta_0) \exp\left(-\frac{|x|}{\xi \sqrt{\sin \theta_{bulk}}}\right) \quad (4.10)$$

Остается только проверить, что $\theta_{bulk} - \theta_0 \ll 1$:

$$(\theta_{bulk} - \theta_0) = t \frac{2\xi \sqrt{\sin \theta_{bulk}}}{l} \sin \theta_{bulk} \cos \theta_{bulk} (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (4.11)$$

Тем самым, сделанные в задаче приближения становятся оправданными. Кроме того, поправка к θ_0 оказалась линейна по $\frac{\xi t}{l}$, в то время как для θ_∞ она второго порядка. Дальше задачу можно решать итерационно (напомним, что уравнение самосогласования в данном случае не учитывалось). Однако с точки зрения получения качественного ответа этих рассуждений достаточно.

В данной задаче теорию возмущений по малому параметру $\frac{\xi t}{l} \ll 1$ в первом порядке можно довести до конца. Действительно, как мы видели, в уравнении Узаделя в силу уравнения непрерывности и граничного условия на сверхпроводящую скорость, член, содержащий сверхпроводящую скорость, имеет второй порядок по t . Потому уравнение Узаделя можно линеаризовать. Сделаем следующую подстановку $\theta \stackrel{def}{=} \theta_{bulk} + t\psi(x)$, $\Delta_0(x) = \Delta_{bulk} + t \cdot \mathcal{D}(x)$, $x = \xi \cdot z$.

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\psi}{\sin \theta_{bulk}} + \mathcal{D}(x) \frac{\cos \theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} = 0 \quad (4.12)$$

Граничное условие на $\theta(x)$ можно учесть в данном уравнении, добавив сингулярный член в правую часть:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\psi}{\sin \theta_{bulk}} + 2\mathcal{D}(x) \frac{\cos \theta_{bulk}}{D} = 2\psi'(+0)\delta(z) \quad (4.13)$$

Продельвая преобразование Фурье, немедленно получаем:

$$\psi(k) = \frac{\cos \theta_{bulk} \frac{\mathcal{D}(k)}{\Delta_{bulk}} - 2\psi'(+0)}{k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}} \quad (4.14)$$

Используем уравнение на параметр упорядочения (2.15) в следующей эквивалентной форме:

$$\Delta_0 \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) = 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{\Delta_0}{\omega} - \sin\theta\right) \quad (4.15)$$

Преимущество этой формы состоит в том, что нам не придется обрезать сумму на частотах близким к дебаевским и суммирование можно продолжить до бесконечности, не встречая расходимостей.

Граничное условие на θ дает:

$$\psi'(+0) = \frac{\xi}{l} \sin 2\theta_{bulk} (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (4.16)$$

Тогда из уравнений (4.15)-(4.16) получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k) \left\{ \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) - 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Delta_{bulk}} \frac{\cos^2 \theta_{bulk}}{k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}}\right) \right\} \\ = 8\pi T (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \frac{\xi}{l} \sum_{\omega>0} \frac{\sin \theta_{bulk} \cos^2 \theta_{bulk}}{k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тем самым поиск поправки сведен к поиску преобразования Фурье и вычислению ряда. Дальнейшие вычисления стоит провести численно.

4.2 Туннельные режимы

Однако стоит обратить внимание на один важный факт. Если мы попытаемся решить нашу задачу, не предполагая малости параметра $\frac{\xi t}{l} \ll 1$, то исходя из формулы (4.5) мы неминуемо получим, что сверхпроводящая скорость начнет зависеть от мацубаровской частоты. Действительно, формула (4.11) показывает, что $\theta(x)$ зависит от $\theta_{bulk}(\omega)$, а значит и сверхпроводящая скорость тоже. Это противоречие, естественно, означает, что по ходу решения было сделано допущение, которое в данной задаче неверно. Можно было бы подумать, что это связано с неприменимостью граничных условий при $\xi t/l \gg 1$. Однако, как известно, данные граничные условия были выведены в предположении, что именно $t \ll 1$. Из этого следует, что сверхпроводящая скорость все же может зависеть от ω , что приводит нас к $\varphi \neq \chi(\omega)$, и для решения задачи при произвольных малых $t \ll 1$ нам придется учитывать отличия в этих фазах.

Получается, что в задачах с границей в общем случае необходимо учитывать отличие этих фаз, и наши аргументы из главы 2 становятся неверными. В итоге, задачи с границей можно условно поделить на два класса: задачи в ультратуннельном режиме $\frac{\xi t}{l} \ll 1$ и задачи в умеренно-туннельном режиме $\frac{\xi t}{l} \gtrsim 1$, $t \ll 1$. Далее мы будем решать задачи в ультратуннельном режиме, а, следовательно, в предположении равенства фаз аномальной функции Грина и параметра порядка. Параметр $\alpha \equiv \frac{2\xi t}{l}$ можно интерпретировать, как отношение туннельного кондактанса (в единицах $\frac{e^2}{h}$) границы к диффузному кондактансу материала сверхпроводника (куска металла, площади S и толщины ξ) в нормальном состоянии на

длине когерентности ξ , $\alpha \sim \frac{G_T}{G_D}$. Действительно, $G_T \sim Nt$, где $N \propto \frac{S}{\lambda_F^2}$ – число каналов, $G_D \sim \frac{nl}{k_F \xi} S$, S – площадь сечения. Тогда $\frac{G_T}{G_D} \sim \frac{\xi t}{l} \frac{1}{n\lambda_F^3} \sim \frac{\xi t}{l}$.

Глава 5

Вихрь на границе

5.1 Уравнение Феррелла-Прейнджа

Для вихря на границе система уравнений Узаделя с граничными условиями принимает вид:

$$\begin{cases} \nabla(\sin^2 \theta (\nabla \varphi - 2e\vec{A})) = 0 \\ D\nabla^2 \theta + 2\Delta_0 \cos \theta - 2\omega \sin \theta - D \sin \theta \cos \theta (\nabla \varphi - 2e\vec{A})^2 = 0 \\ \Delta_0 = \pi \nu_0 g T \sum_{\omega} \sin \theta \\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} = (\nabla \varphi - 2e\vec{A}) \cdot 8\pi^2 \nu_0 D T e \sum_{\omega} \sin^2 \theta \\ (\nabla \theta_1)_n = -(\nabla \theta_2)_n = \frac{2t}{l} \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \theta_0 \equiv \theta(x=0, y) \\ (\nabla \varphi_2 - 2e\vec{A})_n = (\nabla \varphi_1 - 2e\vec{A})_n = \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Стоит отметить, что уже из вида системы становится ясно, что решение для $\theta(\vec{R})$ симметрично относительно замен $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, а $\vec{v}_s(\vec{R})$ антисимметрично относительно этих замен. В соответствии со случаем **контакта Джозефсона** мы будем рассматривать ситуацию, в которой $t_l^{\xi} \ll 1$. По этому параметру мы будем делать теорию возмущений до первого порядка. Однако в отличие от контакта Джозефсона в этом случае нам неизвестно заранее значение разности фаз по разные стороны барьера. Для стартовой оценки этой величины мы воспользуемся известным решением этой задачи — уравнением Феррелла-Прейнджа. Мы приведем вывод этого уравнения с использованием параметров нашей задачи:

Давайте рассмотрим контур C , являющийся положительно ориентированным прямоугольником. Одна из его сторон имеет длину $\delta l \rightarrow 0$ и параллельна оси y . Она расположена в точке $(+0, y)$. Параллельную ей сторону уведем на $+\infty$ вдоль оси x , где сверхпроводящая скорость обращается в 0. Тогда в силу соотношения $\nabla \times \vec{v}_s = -\frac{e}{m} \vec{H}$ и, приводя его к интегральной форме, получаем:

$$\oint_C \vec{v}_s d\vec{l} = -\frac{e}{m} \int \vec{H} d\vec{S} \quad (5.2)$$

Сокращая обе части выражения на $\delta l \rightarrow 0$, мы получаем:

$$-v_{sy}(+0, y) = -\frac{e}{m} \int_0^{+\infty} H(x) dx \quad (5.3)$$

По определению глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник

$$\delta = \frac{1}{H_0} \int_0^{+\infty} H(x) dx, H_0 \equiv H(0, y) \quad (5.4)$$

Тогда получаем:

$$v_{sy}(\pm 0, y) = \pm \frac{e}{m} \delta \cdot H_0 \quad (5.5)$$

Используя определение сверхпроводящей скорости и непрерывность векторного потенциала на границе, получаем:

$$2mv_{sy}(+0, y) - 2mv_{sy}(-0, y) \equiv \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial y} = 4e\delta \cdot H_0 \quad (5.6)$$

Добавив сюда уравнение Максвелла в проекции на ось x , выражение для тока (2.16) и граничное условие на сверхпроводящую скорость, имеем:

$$\frac{\partial^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial y^2} = 2t \frac{\delta}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot 32\pi^2 \nu_0 D T e^2 \sum_{\omega} \sin^2 \theta_0(y) \quad (5.7)$$

Используя выражение для глубины проникновения (3.3), мы получаем:

$$\frac{\partial^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial y^2} = \frac{2t}{l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \frac{\sum_{\omega} \sin^2 \theta_0(y)}{\sum_{\omega} \sin^2 \theta_{bulk}} \quad (5.8)$$

Поскольку мы рассматриваем грязный предел, следовательно между током и сверхпроводящей скоростью связь локальна, а потому $\delta = \lambda$. В конечном счете:

$$\frac{\partial^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial y^2} = \frac{2t}{\lambda l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\sum_{\omega} \sin^2 \theta_0(y)}{\sum_{\omega} \sin^2 \theta_{bulk}} \quad (5.9)$$

В малопрозрачном случае вихрь из-за скачков фазы на границе лишится своего кора и поэтому можно считать, что $|\theta - \theta_{bulk}| \ll \theta_{bulk}$. Это дает нам право в низшем порядке просто пренебречь отношением сумм в (5.9). Поэтому мы получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial y^2} = \frac{2t}{\lambda l} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv \frac{1}{\lambda_J^2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \alpha \equiv 2t \frac{\xi}{l} \quad (5.10)$$

Поскольку на бесконечности в случае одного вихря как сверхпроводящая скорость, так и разность фаз на границе должны устремляться к $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то нас интересует только солитонное решение данного уравнения:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{y}{\lambda_J}\right)\right) \quad (5.11)$$

Как видно, в задаче о распределении разности фаз на границе возник масштаб $\lambda_J \equiv \xi \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}$. Этот масштаб в зависимости от соотношений нескольких параметров задачи может быть разным. Эти параметры: $t \ll 1$ – прозрачность барьера, $\kappa \gg 1$, $\frac{\xi}{l} \gg 1$ – параметр загрязненности сверхпроводника. Напомним, что $\xi^2 \equiv \frac{D}{2\Delta_{bulk}} \sim \xi_0 l$. Для сверхпроводника второго рода можно записать следующие оценки $\frac{\xi}{l} \sim \sqrt{\frac{\xi_0}{l}} \sim 10$, $\kappa \sim 100$. Потому будем полагать, что $\lambda_J \gg \xi$ и разность фаз существенно отличается от $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ на масштабе λ_J .

5.2 Теория возмущений

Теперь мы можем приступить к построению теории возмущений. Поскольку в этой главе наибольший интерес для нас представляет окрестность вблизи центра вихря, то магнитное поле в этой системе следует положить константой (поле слабо спадает на масштабе $\sim \xi$). Тогда из (5.11):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + \frac{2y}{\lambda_J} \quad (5.12)$$

Проводя теорию возмущений до первого порядка по t , в граничном условии на θ можно положить $\theta_0 = \theta_{bulk}$. Также положим $\Delta = \Delta_{bulk} + t\mathcal{D}$, $\theta = \theta_{bulk} + t\psi$. Теперь нам важно оценить вклад сверхпроводящей скорости в решение уравнений: Полагая магнитное поле постоянным на масштабе порядка ξ уравнение (5.6) можно решить и получить, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4e\lambda \cdot H \cdot y + C \quad (5.13)$$

Сравнивая ответ с солитонным решение получаем:

$$e\lambda \cdot H \sim \frac{1}{\lambda_J} \quad (5.14)$$

А следовательно

$$mv_{sy}(+0, y) \sim \frac{1}{\lambda_J} = \frac{1}{\xi} \sqrt{t} \sqrt{\frac{\xi/l}{\kappa}} \ll \frac{1}{\xi} \sqrt{t} \quad (5.15)$$

Для компоненты вдоль оси x можно использовать граничные условия, что даст:

$$mv_{sx}(+0, y) \sim \sqrt{\left(\frac{\xi t}{l}\right)^3} \ll mv_{sy}(+0, y) \quad (5.16)$$

Тем самым мы приходим к важному выводу, отличающему данную задачу от контакта Джозефсона- вклад сверхпроводящей скорости в уравнение Узаделя имеет тот же порядок по t , что и вклад от поправок к θ и параметру к порядка. Однако в силу последнего неравенства в (5.15) этой величиной в наших оценках мы можем пренебречь. Наконец, производя разложение θ в уравнении непрерывности,

мы немедленно получаем, что $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = 0$. Итак, теперь нам необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^2 \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{\sin \theta_{bulk}} + \mathcal{D}(x, y) \frac{\cos \theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=+0} = \frac{4}{l} \sin \theta_{bulk} \cos \theta_{bulk} \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_J^2} \right) \\ \mathcal{D}(x, y) \ln \left(\frac{T_c}{T} \right) = 2\pi T \sum_{\omega > 0} \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\omega} - \psi(x, y) \cos \theta_{bulk} \right) \\ \nabla \times \vec{v}_s = -\frac{e}{m} \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = 0 \\ (\nabla \varphi - 2e\vec{A})_n \Big|_{x=0} = -2 \frac{\alpha}{\xi \lambda_J} y \\ v_{sy}(+0, y) = \frac{e}{m} \lambda \cdot H_0 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Как мы видим, система уравнений разделилась. Одна ее часть позволяет нам находить ψ и \mathcal{D} . Вторая – распределение сверхпроводящей скорости. Этого следовало ожидать по аналогии со случаем контакта Джозефсона, где распределение θ не влияло на распределение сверхпроводящей скорости в данном порядке теории возмущений.

Давайте найдем распределение ψ без учета самосогласования для понимания качественного вида распределения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\psi}{\xi^2 \sin \theta_{bulk}} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=+0} = \frac{4}{l} \sin \theta_{bulk} \cos \theta_{bulk} \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_J^2} \right) \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Удовлетворение граничному условию достигается введением сингулярности в правую часть уравнения Узаделя, и после преобразования Фурье по переменной x/ξ мы получим:

$$\psi(k, y) = \frac{b}{a^2} \left(\frac{2\xi^2/a^2}{\lambda_J^2} - \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_J^2} \right) \right), \quad b \equiv \frac{8\xi}{l} \sin \theta_{bulk} \cos \theta_{bulk}, \quad a^2(k) \equiv k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}} \quad (5.19)$$

Таким образом

$$\psi(x, y) = \frac{b}{2} \sqrt{\sin \theta_{bulk}} e^{-\frac{|x|}{\xi \sqrt{\sin \theta_{bulk}}}} \left(\frac{\xi^2 \sin \theta_{bulk}}{\lambda_J^2} \left(\frac{|x|}{\xi \sqrt{\sin \theta_{bulk}}} + 1 \right) - \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_J^2} \right) \right) \quad (5.20)$$

В силу $\frac{\xi}{\lambda_J} \ll 1$ получаем:

$$\psi(x, y) \approx -\frac{2\xi}{l} \sqrt{\sin^3 \theta_{bulk} \cos^2 \theta_{bulk}} e^{-\frac{|x|}{\xi \sqrt{\sin \theta_{bulk}}}} \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_J^2} \right) \quad (5.21)$$

Из этой формулы мы видим, что вдоль оси x по прежнему сохранился масштаб ξ . Однако для оси y он изменился и стал λ_J . Стоит отдельно отметить, что оценки параллельной составляющей сверхпроводящей скорости проведены в предположении постоянства магнитного поля. Более правильно будет учесть спад магнитного

поля вдоль границы на масштабе λ_J , поскольку на этом масштабе спадает и ψ . В результате получим:

$$H \propto \frac{1}{\lambda_J} \frac{1}{\cosh \frac{y}{\lambda_J}} \quad (5.22)$$

Таким образом спад квадрата сверхпроводящей скорости на масштабе λ_J такой же, как у ψ . Также, сравнивая $\frac{\xi}{l}$ с $\sqrt{\frac{\xi/l}{\kappa}}$, мы понимаем, что пренебрежение членом со сверхпроводящей скоростью в уравнении Узаделя оправдано в силу $\frac{\xi \kappa}{l} \gg 1$. Теперь давайте приступим к теории возмущений с учетом самосогласования. Введем новые переменные $z \equiv \frac{x}{\xi}$, $h \equiv \frac{y}{\xi}$. Тогда уравнения на ψ можно в этих переменных записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - \frac{\psi}{\sin \theta_{bulk}} + \mathcal{D}(x, y) \frac{\cos \theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=+0} = \frac{2\xi}{l} \sin 2\theta_{bulk} \frac{1}{\cosh^2(h \frac{\xi}{\lambda_J})} \end{cases} \quad (5.23)$$

Данная система эквивалентна уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} - \frac{\psi}{\sin \theta_{bulk}} + \mathcal{D}(z, h) \frac{\cos \theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} = \frac{4\xi}{l} \sin 2\theta_{bulk} \frac{1}{\cosh^2(h \frac{\xi}{\lambda_J})} \delta(z) \quad (5.24)$$

Преобразование Фурье дает:

$$-\left(k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}\right)\psi + \mathcal{D} \frac{\cos \theta_{bulk}}{\Delta_{bulk}} = \gamma \sin \theta_{bulk} \cos \theta_{bulk}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (5.25)$$

Где введено обозначение:

$$\gamma \equiv \frac{16\xi}{l} \cdot \varkappa_J \frac{\frac{\pi \varkappa_J k_y}{2}}{\sinh \frac{\pi \varkappa_J k_y}{2}}, \quad \varkappa_J \equiv \frac{\lambda_J}{\xi} \quad (5.26)$$

Таким образом, из уравнения (4.15) мы немедленно получаем ответ для Фурье-образа параметра порядка в данной задаче:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k) \left\{ \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) - 2\pi T \sum_{\omega>0} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Delta_{bulk}} \frac{\cos^2 \theta_{bulk}}{k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}} \right) \right\} = \\ 2\pi T \gamma \sum_{\omega>0} \frac{\sin \theta_{bulk} \cos^2 \theta_{bulk}}{k^2 + \frac{1}{\sin \theta_{bulk}}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Вводя обозначения $\tau \equiv \frac{2\pi T}{\Delta_{bulk}}$, $\varepsilon \equiv \frac{\omega}{\Delta_{bulk}} = \tau(n + \frac{1}{2})$, данные суммы можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k) \left\{ \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) - \tau \sum_{\varepsilon>0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{(k^2 + \sqrt{\varepsilon^2 + 1})(\varepsilon^2 + 1)} \right) \right\} = \\ \gamma \tau \sum_{\varepsilon>0} \frac{\varepsilon^2}{(k^2 + \sqrt{\varepsilon^2 + 1})\sqrt{\varepsilon^2 + 1}^3} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Глава 6

Заключение

В данной работе было получено несколько результатов. С целью освоения материала в задаче о вихре в объеме были оценены значения наклонов графиков $\theta(r)$ в пределе больших частот. В рамках этой же задачи было получено значение критической энергии, при которой вторая производная плотности состояний по координате в нуле обращалась в 0.

Относительно структуры вихря на границе удалось получить его размер вдоль перпендикулярного и параллельного границе направлений — ξ и $\lambda_J \equiv \xi \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}$ (где $\xi = \sqrt{\frac{D}{2\Delta_{bulk}}}$ — длина когерентности в грязном сверхпроводнике, $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \gg 1$, $\alpha = \frac{2t\xi}{l}$ — параметр прозрачности туннельной границы, говорящий о выходе на умеренно туннельный режим или ультратуннельный, t — прозрачность границы), а также структуру поправки $\psi = (\theta - \theta_{bulk})/t$ в зависимости от координат и частоты в случае $\alpha \ll 1$ без учета самосогласования.

На примере задачи об эффекте Джозефсона было выяснено, что при $\alpha \gtrsim 1$ аргумент о равенстве фазы мацубаровской компоненты аномальной функции Грина фазе параметра порядка неверен, поскольку при таких условиях решение уравнения непрерывности приводит к противоречиям.

Стоит отметить, что при не слишком сильных полях сверхпроводящее состояние энергетически выгоднее, чем нормальное. При попадании вихря в объем он приобретает кор (область нормального металла), а на границе этого кора нет — там лишь происходит малое подавление θ по параметру α . Также на границе из-за малой прозрачности барьера текущие в системе токи малы по параметру $t \ll 1$, в то время как в вихре в объеме скорость сверхпроводящего конденсата при приближении к кору увеличивается. На основании этого можно заключить, что вихрь будет притягиваться к границе — к месту, где ему энергетически выгодно находиться. Следовательно диссипация энергии в такой системе будет происходить только при движении вихря вдоль границы. Возвращаясь к экспериментальной ситуации, где рассматривался гранулированный алюминий, мы приходим к выводу, что в случае соприкосновения трех гранул, вихрь будет находиться в их общей точке касания.

В дальнейшем планируется завершить расчет вихря с учетом самосогласования. После этого планируется провести исследование движения вихря под действием текущих транспортных токов, что позволит извлечь информацию о диссипации в такой системе. Также интересно рассмотреть решение этой же задачи в

умеренно-туннельном режиме.

Литература

- [1] Klaus D. Usadel. *Generalized diffusion equation for superconducting alloys*. Phys. Rev. Lett. 25, 507 (1970).
- [2] А. В. Свидзинский. *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*. (Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1982).
- [3] R. J. Watts-Tobin and G. M. Waterworth . *Calculation of the Vortex Structure in a Superconducting Alloy*. Z. Physik 261,249–268 (1973).
- [4] M. Yu. Kuprianov and V. F. Lukichev . *Influence of boundary transparency on the critical current of "dirty"SS'S structures*. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 94,139-149 (June 1988).
- [5] Wolfgang Belzig, Frank K. Wilhelm, Christoph Bruder, Gerd Schon, and Andrei D.Zaikin. *Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity*. arXiv:cond-mat/9812297.
- [6] Britton L. T. Plourde. *Vortex Microwave Response in High Kinetic Inductance Superconducting Thin Films*. Workshop on Localization, Interactions and Superconductivity, Landau Institute, July 2, 2018.
- [7] Л.П.Горьков, *ЖЭТФ*, 34, 735 (1958)
- [8] G.Eilenberger, *Z.Phys B* 214,195 (1968)